ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 7 (1987)

FRANTIŠEK KUŘINA
Hradec Králové, Czechosłowacja



# Dydaktyka matematyki a praktyka nauczania

Mój głos wywodzi się z osobistych doświadczeń dydaktycznych oraz ze studiowania literatury. Nie reprezentuje on stanowiska żadnej instytucji. Artykuł składa się z trzech części: w pierwszej z nich zastanawiam się, co wpływa na nauczanie matematyki, w drugiej formułuję pewne problemy dydaktyczne, a w trzeciej ustosunkowuję się do dziewiątego problemu Freudenthala.

## 1. ZNACZENIE DYDAKTYKI MATEMATYKI DLA PRAKTYKI

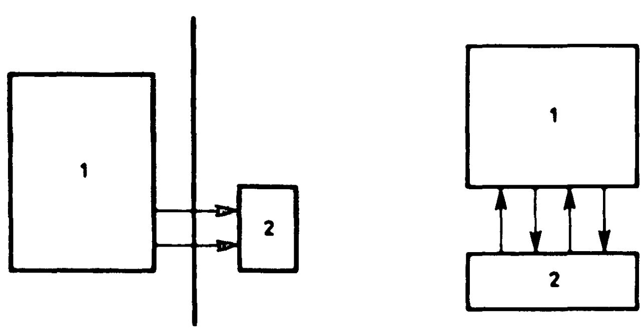
Można przytoczyć przykłady na to, że na nauczanie matematyki wpływają często subiektywne stanowiska, że nawet praktyczne potrzeby nie są stawiane dostatecznie obiektywnie; programy są określane z jednej strony tradycją, z drugiej zaś modą; przecenia się znaczenie zmian w treści nauczania, a nie respektuje się w sposób dostateczny rzeczywistych warunków, w których realizuje się nauczanie.

*Dlaczego tak jest* ?

Jednym z powodów jest bezsprzecznie fakt, że dydaktyka matematyki nie daje wystarczająco głębokich i obiektywnie sprawdzonych rezultatów, które by praktyka nauczania mogła wykorzystywać. O dydaktyce matematyki mówi się i pisze od wielu lat, istnieje szereg instytucji, które sią nią zajmują, a światowa twórczość w dziedzinie dydaktyki jest już stosunkowo bogata. Pomimo to jednak przy rozwiązywaniu teoretycznych i praktycznych problemów związanych z nauczaniem matematyki jesteśmy świadkami raczej rozstrzygania opartego na rzeczywistości i empirii niż na teorii. Nadzwyczajny wpływ mają w tej sytuacji osobowości, które łączą podejście teoretyczne z doświadczeniami życiowymi, matematyczne punkty widzenia z poglądami nauczycieli, teorię z praktyką. Taką osobowość reprezentuje bezsprzecznie pani profesor Zofia Krygowska, która przyczyniła się w znacznej mierze do przekształcenia dydaktyki matematyki z pogranicza nauki w szczegółową dyscyplinę.

W pracy *Kierunki badań dydaktyki matematyki* prof. Krygowska podkreśla, że dydaktyka matematyki zajmuje się wszystkimi problemami związanymi z uczeniem się i nauczaniem matematyki, więc - moim zdaniem - także problemami związanymi z praktyką nauczania. W tym kontekście chciałbym zwrócić uwagę na to, że J.A. Komeński, w *Dydaktyce analitycznej* wydanej w Lesznie w roku 1948, charakteryzuje dydaktykę jako teorię właściwego nauczania. Teoria nauczania polega, według niego, na opanowaniu pewnych metod nauczania - uczenia się i, w oparciu o nie, prowadzeniu uczniów do przyswojenia wiadomości szybko, z ochotą i skutecznie. Teoria nauczania jest tu więc również związana z praktyką nauczania.

Choć na wiele pytań dydaktyka nie daje dotąd zadowalających odpowiedzi, praktyka musi na nie reagować, są bowiem związane z rozwojem społeczeństwa. Tak więc szkolna praktyka staje się wielkim poligonem doświadczalnym; niestety, tak wielkim, że nie nadążamy z należytą oceną efektów tej pracy.




Rys. 1. 1 - Praktyka szkolna; 2 - dydaktyka matematyki

Wydaje się, że nie wykorzystujemy efektywnie tych doświadczeń, które przyniosła w przeszłości i przynosi współcześnie praktyka nauczania matematyki we wszystkich typach szkół. Dlatego jest konieczna ścisła współpraca teoretyków z nauczycielami.

Być może, rzadko na świecie podejmowano się rozwiązywania problemu nauczania matematyki na zasadzie głębokiej analizy przyczyn niedostatków w istniejącym nauczaniu. Analiza procesu nauczania z punktu widzenia jego efektywności i z punktu widzenia osiąganych celów powinna być oczywistą podstawą do prowadzenia reform szkolnych. Reformy opierane na naiwnym założeniu, że nowe będzie lepsze, okazują się nieskuteczne.

## 2. NIEKTÓRE PROBLEMY DYDAKTYCZNE

Dla dydaktyki matematyki charakterystyczne jest - jak podkreślił na IV kongresie ICME prof. H. Freudenthal - że dydaktyczne problemy nie są izolowane, ale nawzajem się łączą: rozwiązanie jednych warunkuje rozwiązanie następnych, a wszystkie są związane, bądź to bezpośrednio, bądź też pośrednio, z praktyką.

Praktyka wymaga nieustannie odpowiedzi na pytania:

*Czego uczyć z matematyki w szkole podstawowej* ?

*Czego z matematyki uczyć w szkole średniej*?

*Czego uczyć z matematyki w szkole wyższej*?

*Jak uczyć matematyki* ?

*Jaką rolę w procesie poznania odgrywa doświadczenie ucznia* ?

Odpowiedzi na pytania, *Czego* uczyć i *Jak* uczyć dają zazwyczaj tradycje kulturalne i potrzeby społeczeństwa. Jest bezsporne, że tym sposobem są ustanawiane treści i metody raczej na podstawie doświadczenia z przeszłości i, oczywiście, nie najlepiej. Dydaktyka matematyki będzie tylko wtedy dyscypliną naukową, gdy zdoła określić odpowiednie treści i metody z wyprzedzeniem, przed rozwojem społecznym, i jeśli zdoła te potrzeby przewidywać. Dziś nie można jeszcze dać ugruntowanych odpowiedzi na podstawowe pytania, które by uzasadniały wybór treści nauczania i metod pracy nauczyciela w klasie:

*Jak wpływają na szkolną matematykę praktyczne potrzeby społeczeństwa* ?

*Jaką rolę mają odgrywać odkrycia matematyczne, metody i pojęcia w intelektualnym rozwoju dziecka* ?

Na przykład z problemów aktualnych szczególne znaczenie dla praktyki ma pytanie:

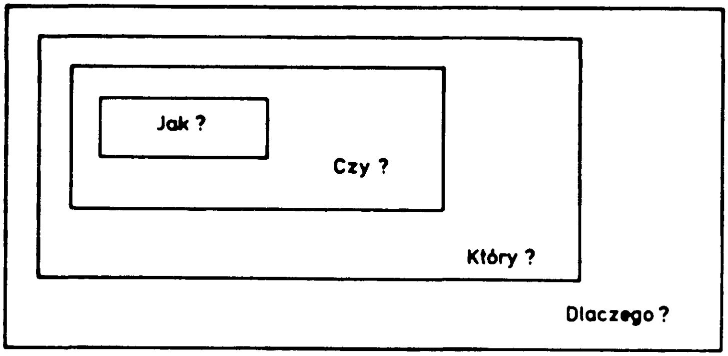
*Jak organizować nauczanie* ?

W zakres pytania wchodzą problemy organizacji pracy grup uczniowskich, ich wielkość, struktura i stabilność. Problemy te są bardzo silnie powiązane z organizacją działalności szkół i pozostają wyraźnie pod wpływem częściowo tradycji, a częściowo ekonomicznych możliwości społeczeństwa. Należą tu również problemy organizacji kształcenia, albo w zakresie wielu od siebie niezależnych przedmiotów, tak jak się ta sytuacja rozwinęła w wyniku tworzenia pojedynczych dyscyplin naukowych, albo w zakresie integrowanych przedmiotów, które w ostatnich czasach odpowiadają tendencjom tworzenia nowych interdyscyplinarnych podejść do zastosowań.

Dla każdej z możliwych koncepcji można przytoczyć wiele argumentów. Wydaje się, że dziś nie można w sposób pewny udowodnić, która z koncepcji będzie efektywniejsza. Trudność leży przede wszystkim w tym, że wiarygodna ocena wniosków jest długotrwała i musi być weryfikowana w praktyce, i to bynajmniej nie tylko w praktyce warunków laboratoryjnych.

Do tej tematyki należy także problem organizacji pracy uczniów w poszozególnych godzinach lekcyjnych. Nawet najlepsza koncepcja nauczania, przemyślana pojęciowa konstrukcja dyscypliny, system tez, to wszystko razem jest zupełnie nieskuteczne, jeśli nauczyciel nie zdoła wciągnąć aktywnie do pracy wszystkich uczniów. Praktyka szkolna jest decydującym kryterium skuteczności opracowania pewnej tematycznej całości. Według naszych doświadczeń, najważniejsza jest decyzja co do kolejności problemów, na które będziemy w trakcie nauczania wraz z uczniami poszukiwać odpowiedzi. Te problemy powinny być - o ile to możliwe - atrakcyjne dla uczniów. Oczywiście, muszą być dla nich zrozumiałe, pociągające. O ile to możliwe, inspirujące uczniów do dalszej pracy powinny być także odpowiedzi na postawione pytania. Pytania mogą być motywowane problemem poznawania zjawisk otaczającego ucznia świata - są to więc analogie do problemów formułowanych w nauce; mogą to być również pytania związane wprost z procesem uczenia się, a więc z dociekliwością uczniów i z ich chęcią osiągnięcia wytyczonego celu.

Najczęstszy typ problemów w nauczaniu to pytania typu *Jak*; odpowiadają bowiem one w najbardziej naturalny sposób pojęciu czynnościowego nauczania matematyki. Aktywności ucznia są związane z metodami algorytmicznymi, które zazwyczaj odgrywają w poznawaniu pierwszoplanową rolę, pomimo że zamknięta dyscyplina naukowa stawia na pierwszym miejscu pytania o egzystencję (typu *Czy*) i pytania uzasadniające (typu *Dlaczego*).




Rys. 2

Jest prawdopodobnie konsekwencją tradycji, że najczęstszym typem zadań matematyki szkolnej są zadania typu *Który*. Chodzi w zasadzie o klasyczne zadania, które zazwyczaj nazywamy zadaniami wyszczególniającymi. Do nich należą na przykład zadania następujących typów:

a) rozwiązywanie równań,

b) rozwiązywanie nierówności,

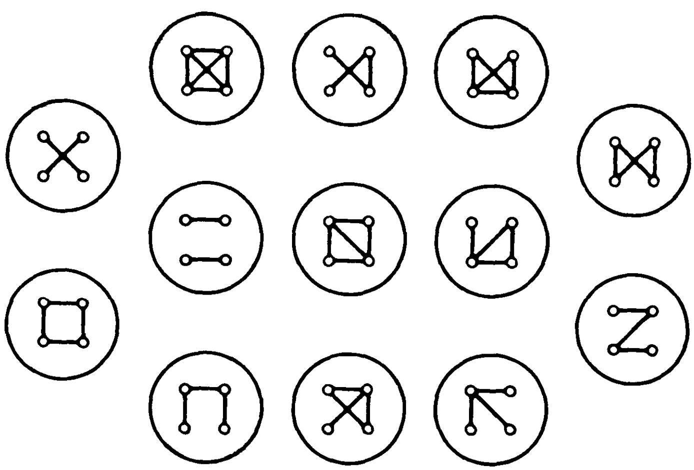
c) zadania konstrukcyjne.

Jest oczywiste, że odpowiedź na pytania typu *Który* zakłada znajomość albo znalezienie odpowiedzi na jedno lub szereg pytań typu *Jak*. Pytania typu *Jak* eksponujące zasady konstrukcyjne były w przeszłości, ale i są w większości aktualnych podręczników zaniedbywane. Przy tym problem dotyczy nauczania matematyki na najróżniejszych poziomach. Na przykład w artykule [3] autorzy podkreślają fakt, że istota problemu indukcji matematycznej leży w braku umiejętności konstruowania $n$-tego (albo odpowiednio $(n+1)$-ego) wyrazu ciągu, a więc w typowej niemożności odpowiedzi na pytanie typu *Jak* (jaki będzie następny wyraz?). Na tym przykładzie możemy sobie uświadomić, że pytania typu *Jak* są czasami podstawą do sformułowania odpowiedzi także na pytania typu *Czy* (czy zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych?), na pytania typu *Który* (dla których liczb zachodzi?) i na pytania typu *Dlaczego* (dowód indukcją matematyczną).

Odpowiednie zadania typu *Jak* mogą się przyczyniać do rozwoju twórczego myślenia (jak inaczej to jeszcze można rozwiązać? czy zostały wyczerpane wszystkie przypadki?...). Mogą być również propedeutyką niektórych pojęć matematycznych.

Zilustrujmy ostatnią myśl dwoma przykładami z eksperymentalnego nauczania geometrii ośmio i dziewięcioletnich uczniów. Eksperyment odbywał się w szkołach kierowanych przez Pracownię Dydaktyki Matematyki Instytutu Matematycznego Czechosłowackiej Akademii Nauk w Pradze. O tych badaniach wspomnimy jeszcze później.

PRZYKŁAD 1. Dziewięcioletniemu uczniowi Markowi K. postawiłem pytanie: Jak można przyszyć guzik z czterema dziurkami? Nastąpiła ciekawa dyskusja, której wynikiem były naturalne umowy: z każdej dziurki musi wychodzić ścieg; jest obojętne, jak się patrzy na przyszyty guzik. Potem Marek podawał wnioski: jednym ściegiem nie można przyszyć guzika, dwoma ściegami można (zob. rys.3). Guzik można przyszyć także 6 ściegami. Jak inaczej można przyszyć guzik dwoma



Rys. 3. Jak przyszyć guzik

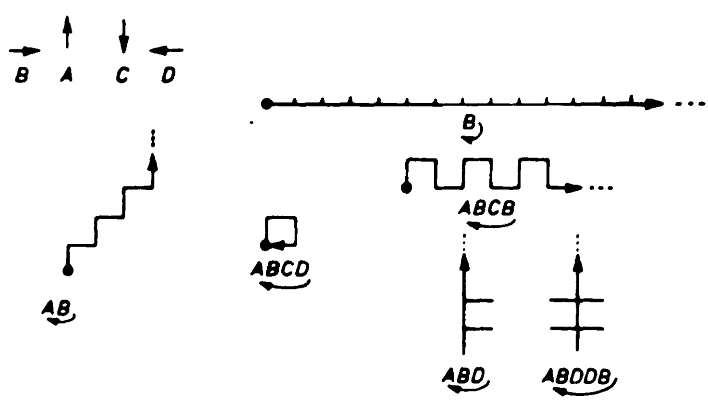
ściegami? Rezultat znów zostaje narysowany. Kolejne wyniki Marek rysował na podstawie samodzielnych rozważań i są one przedstawione na rysunku. Zadanie załączyliśmy jako ćwiczenie do zestawu ćwiczeń dla drugiego rocznika. Wyniki pokazują, że trudno jest w pracy z liczną grupą uczniów w klasie doprowadzić ich do zrozumienia problemu, które dwa przyszycia można uważać za jednakowe, i doprowadzić do dyskusji o wszystkich możliwych sposobach przyszycia. Praktyka będzie prawdopodobnie zawsze korygować, i to czasami bardzo wyraźnie, rezultaty, które można osiągnąć spekulacją albo indywidualnymi eksperymentami pedagogicznymi.

PRZYKŁAD 2. Z pojęciem odcinka zapoznajemy uczniów poprzez ciąg zadań, które dotyczą schematyzacji czynności ucznia (ruch po najkrótszej linii, droga promienia świetlnego, naciągnięty sznurek...).
Do zapoznania z pojęciem półprostej i prostej odpowiednie jest podejście konstrukcyjne: nie wiemy, co to jest półprosta, ale możemy dobrze ćwiczyć powstawanie półprostej przez nieograniczone przedłużanie odcinka. Do tego celu sporządziliśmy zestaw zadań typu „jak rośnie wąż" i z niego przytoczymy przykłady.

Uczniowie pracują na kratkowanym papierze i rysują węże, które rosną według uzgodnionych reguł. Na rysunku 4 przedstawione jest rośnięcie węży według reguł:

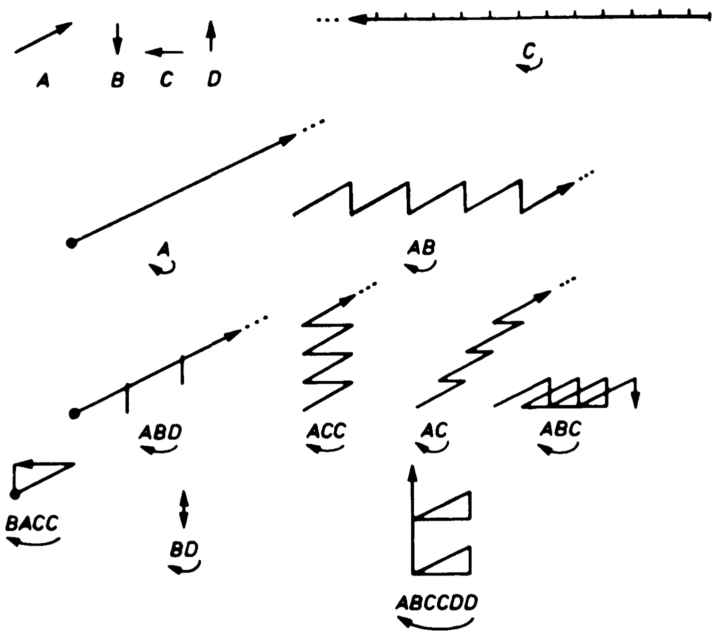
B , AB , ABCB , ABCD , ABD , ABDDB .

Zadania są dla uczniów atrakcyjne, albowiem dochodzą oni do interesujących wyników. Z matematycznego punktu widzenia idzie o propedeutykę wielu pojęć: półprosta, wektor, wektor przeciwny, okresowość,...




Rys. 4. Jak rośnie wąż

Niektórzy uczniowie po przećwiczeniu zapisów zaczynają powoli tworzyć w symbolicznym języku „słowa" określające wzrastanie danego na rysunku węża. Na rysunku 5 są pokazane niektóre wyniki. Komentarze uczniów typu: „wąż zaklęty w trójkącie" (*BACC*) albo „wąż z węzełkami" (*ABCCDD*) ukazują, że uczniowie przeżywają z zainteresowaniem fakt, że „rozwój się zatrzymał" albo że przebiega niespodziewanie.




Rys. 5

Nacisk na zadania typu *Jak* odpowiada, według naszych doświadczeń, przede wszystkim uczniom w wieku 6-15 lat, albowiem wyniki tych zadań dają się zwykle „zobaczyć", zadania są bezpośrednio związane z czynnościami uczniów, pobudzają uczniów do rywalizacji i inspirują aktywności różnego typu: od czynności manualnych (kreślenie i rysowanie), przez czynności algorytmiczne określonego typu (rachunek według reguł przy użyciu technik rachunkowych), aż do czynności myślowych, które prowadzą do uzasadniania twierdzeń.

Matematyka w tym ujęciu rozumiana jest przede wszystkim jako metoda albo technika - jak podkreślają np. czechosłowacki matematyk P. Vopěnka albo radziecki matematyk A.D. Aleksandrow [4].

Interesujące jest, że również J. Bruner formułuje w pracy [5] tezę, że w wychowaniu trzeba kłaść największy nacisk na umiejętności, i to umiejętności manualne, umiejętności wizualne i umiejętności potrzebne w operacjach symbolicznych.

Według mnie są to dziedziny nauczania w praktyce modernizowanych kursów matematyki bardzo często zaniedbywane. Jest to zrozumiałe, gdyż reakcją na matematykę uprawianą jako dryl była matematyka, w której podkreślało się przede wszystkim strukturę pojęciową. Kładło się raczej nacisk na odpowiedzi na pytanie typu *Co* niż na pytania typu *Jak*.

Problem umiejętności pozostaje, moim zdaniem, aktualnym problemem praktyki nauczania na każdym poziomie szkolnym. Umiejętności uczniów znajdują zastosowanie przy ich czynnościach. Wykonując czynności (manualne czy myślowe) uczniowie zdobywają doświadczenie. Problem, jaką rolę może i powinno odgrywać doświadczenie ucznia w procesie nauczania i uczenia się, jest nie mającym do tej pory odpowiedzi podstawowym pytaniem praktyki nauczania, a więc także i dydaktyki matematyki.

## 3. O KIERUNKACH UJĘCIA GEOMETRII DLA 8-10-LETNICH UCZNIÓW

Na IV Kongresie ICME H. Freudenthal przedstawił zespół głównych problemów nauczania matematyki, z których dziewiąty dotyczył nauczania geometrii:

*Czy można uczyć geometrii na podstawie rozwijania uczniowskich intuicji przestrzeni, która go otacza ?*

Spróbuję w ramach mego wystąpienia dać częściową odpowiedź na dziewiąty problem Freudenthala.

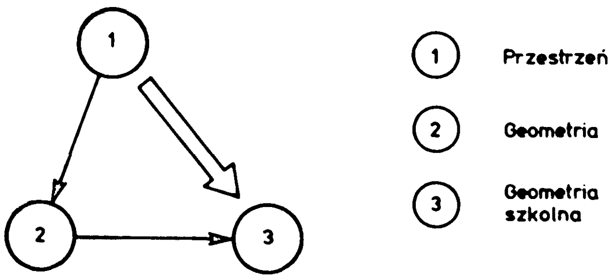
Niepełność mojej odpowiedzi dotyczy dwu aspektów:

1. ograniczę się do nauczania geometrii uczniów w wieku 8-12 lat,

2. pozytywną odpowiedź na przedstawione pytanie opieram na obserwacji i ocenie dotąd nieukończonych eksperymentów.

W Czechosłowacji przeprowadzono modernizację nauczania geometrii skonstruowanej w ramach aksjomatycznego systemu, z pojęciami pierwotnymi: punkt i odcinek. Figury geometryczne wprowadzono na podstawie ich mnogościowych definicji. To podejście nie prowadziło w praktyce do zadowalających wyników, a nauczanie miało wyraźnie charakter werbalny.

Spróbowaliśmy wobec tego zbudować kurs geometrii, który opiera się na bezpośrednich doświadczeniach geometrycznych ucznia, rozwijanych dalej poprzez pracę najróżniejszego typu. W pierwszym etapie miały wpływ na ten eksperyment idee grupy IOWO.




Rys. 6

Zakładamy, że dla przestrzeni, w której powstają uczniowskie doświadczenia, charakterystyczne jest jej wypełnianie i jej dzielenie. Z obydwiema operacjami styka się dziecko praktycznie od pierwszych miesięcy życia (tam, gdzie jest łóżeczko, nie może być krzesła, mieszkanie jest podzielone na pokoje,...). Dalszy złożony proces, bez którego nie można poznawać przestrzeni, to ruch. Na podstawie kategorii przestrzeni i ruchu określiliśmy zakres czynności ucznia, na których opiera się nasze ujęcie geometrii. Wszystkie czynności, które będziemy dalej przytaczać, są ściśle ze sobą powiązane, jedna warunkuje drugą i nie można ich od siebie oddzielić.

1. *Wypełnianie przestrzeni* .

Najbardziej urozmaiconą dziecięcą czynnością, która prowadzi do wypełniania przestrzeni, jest zabawa klockami. Używamy sześciennych klocków i ich płaskich odpowiedników - mozaiki. Czynności wykonywane z użyciem tych materiałów nie tylko rozwijają wyobraźnię geometryczną, ale inspirują także propedeutykę wielu ważnych pojęć geometrycznych. Tak więc uczniowie zapoznają się np. z charakterystykami figur geometrycznych (zużycie sześcianów na budowę...), z kartezjańską strukturalizacją przestrzeni (określenie położenia punktu...) i z niektórymi relacjami geometrycznymi.

2. *Dzielenie przestrzeni.*

Ta czynność jest w pewnym sensie odwrotna do wypełniania przestrzeni. Tak samo jak ściany pokoju dzielą przestrzeń, w której żyjemy, na części, dzieli przestrzeń także i pudełko (wnętrze i zewnętrze). Płaszczyznę dzielą np. dwa okręgi, dwie proste,...;

3. *Rysowanie i kreślenie.*

Te czynności wyrażają się przede wszystkim w śladach ruchu ołówka po papierze. Ruch związany pewnymi warunkami prowadzi do modelowania pewnych figur geometrycznych, np. odcinka i okręgu. Ruchem wytwarzamy, albo likwidujemy granice przy podziale przestrzeni, i to nie tylko w geometrycznym sensie, ale i w sensie praktycznym (rysowanie prostokąta, otwieranie i zamykanie drzwi,...). Rysowanie rozumiemy jako metodę, za pomocą której możemy zdobywać nowe doświadczenia dotyczące rzeczywistości.

4. *Modelowanie.*

Chodzi przede wszystkim o modelowanie za pomocą przestrzennej i płaskiej składanki i modelowanie za pomocą sieci. Modelem figury geometrycznej jest jej narysowany obraz; następnie prowadzimy ucznia także ku reprezentacji punktów za pomocą uporządkowanej pary liczb.

5. *Mierzenie.*

Tradycyjny temat geometrii szkolnej łączymy maksymalnie z czynnościami uczniów. W równym stopniu jak operacje mierzenia, rozwijamy także operacje tworzenia skali.

Geometria była w naszym eksperymencie rozumiana jako metoda uzyskiwania - za pomocą rysowania albo modelowania - odpowiedzi na pytania, które były dla uczniów interesujące. Częściowo miała charakter techniczny. Niektórzy uczniowie osiągali zaskakująco dobre wyniki w ćwiczeniach w rysowaniu. Przy rozwiązywaniu niektórych zadań można było ukazać geometrię jako narzędzie wygodne do zrozumienia łatwych problemów technicznych. Dzięki swej przejrzystości, geometria była odpowiednim polem uczniowskich eksperymentów.

Na podstawie ponad pięcioletnich doświadczeń ze wspomnianym eksperymentem jestem przekonany, że nauczanie geometrii 6-10-letnich uczniów nie tylko można, ale i trzeba oprzeć na ich geometrycznych doświadczeniach w przestrzeni, w której żyją. Te doświadczenia trzeba koniecznie systematycznie rozwijać, i to zarówno w sensie praktycznym, jak i teoretycznym.

Jednym ze skutecznych sposobów wpływania dydaktyki matematyki na praktykę nauczania jest wychowanie nowej generacji nauczycieli matematyki. Problemy dobrego przygotowania nauczycieli dla przyszłości są problemami dużej wagi i bardzo aktualnymi.

## LITERATURA

[1] H. Freudenthal, *Major Problems of Mathematical Education*, Educational Studies in Mathematics 12 (1981), 2.

[2] J.A. Komenský, *Didaktika analytická*, Praha 1964.

[3] K. Benešová, E. Calda, J. Šedivý, *Výzkum úprav výrazů užitečných k osvojení metody matematické indukce*, Matematika a fyzika ve škole 2 (1984).

[4] A.D. Alexandrov, *Matematika a dialektika*, ibidem 8, 9 (1974).

[5] J.S. Bruner, *Towards a Theory of Instruction*, 1966.

[6] *Five Years IOWO*, D. Reidel, Dordrecht - Holland, 1976.

(z czeskiego tłumaczył A. Płocki)

## Didactics of mathematics and the practice of teaching mathematics

Summary

The author claims that so-called HOW-questions, exposing construction principles, neglected in the teaching process, contribute in the development of students' creative thinking. One of his problems used as evidence is the following: „How to sew a button on?"; its solution by a boy of nine is reported.