

KLAUS HÄRTIG
Berlin, NRD

Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyzszego



O dowodach i dowodzeniu w nauczaniu matematyki

Kilka tez i przykładów

Zamierzam ograniczyć się do pewnych tylko rozważań na temat nauki dowodzenia w ramach nauczania matematyki. Wybrałem argumenty i przykłady, którym, w moim przekonaniu, należy się głębsza analiza, a tu i ówdzie także uwaga polemiczna. Być może, weryfikacja naskicowanych tu idei mogłaby trochę pomóc przy zbilansowaniu *statu quo* nauczania matematyki - także u mnie, w NRD - oraz wskazać pewne rezerwy, które można wykorzystać w dalszym rozwijaniu koncepcji tego nauczania. Wiele aspektów tej matematyki musi tu pozostać nieukniętych. Nie będę wchodzić w powody, dlaczego zajmowanie się dowodami matematycznymi jest tak ważne, na czym polega ich wartość kształcąca i wychowawcza ani też w odnośne zagadnienie logiki i teorii poznania.

Choć w niektórych sytuacjach można całkiem rozsądnie rozróżnić „dowodzenie” i „uzasadnianie”, w dalszym ciągu oba te terminy będą używane synonimicznie.

I jeszcze trzy rzeczy, których uwzględnienie jest konieczne dla zrozumienia mojego stanowiska w zasadniczych kwestiach:

(1)* Gdy mówimy o przebiegu dowodu, o postępowaniu dowodowym, to oczywiście zawsze także o *dowodach*, tj. o istniejących niezależnie od nauczyciela i ucznia związkach dowodowych. A priori, elastyczność i różnorodność wariantów leży nie w tym, co robi dowodzący, ale także (a nawet przede wszystkim) „w obiekcie”.

(2) Jest wskazane, aby *pojęcie dowodzenia rozumieć dostatecznie szeroko*. Nie należy ograniczać się tylko do wypowiedzi formuło-

wanych wyraźnie jako twierdzenia, ale włączyć też całą dedukcyjną aktywność myśli, aż po rachunki, tj. realizację algorytmów. Dowodzenie w nieco węższym sensie wiąże się z użyciem w budowie dowodu *sprawy logicznej*, tj. języka rachunku logicznego.

(3) Nasz temat dotyczy, oczywiście, nie tylko kształcenia językowo-logicznego, ale również *rozwijania wyobraźni*. Zawsze wówczas, gdy najpierw widzimy związki dowodowe, a dopiero potem je formułujemy - aspekt *poglądowy* (dowodu i dowodzenia) jest nawet pierwotny w stosunku do pojęciowego.

1.

(1) *Trzeba wcześniej zacząć stawiać (także okazujnie) pytanie: „Jak to się dzieje?”* (Czyż pytanie to nie pojawia się częściej na każdym placu zabaw, w każdej dyskusji wśród dzieci, niż na lekcji matematyki?)

Byłoby, na przykład, błędem metodycznym, gdyby przy odkryciu lub odgadnięciu twierdzenia, że suma dwu liczb nieparzystych jest „zawsze”, „z pewnością” parzysta, stwierdzenie to traktować jako główny cel. Właściwa praca, której tu można wymagać od uczniów, polega na znalezieniu (lub w przypadku niepowodzenia - naśladowaniu) *uzasadnienia* tego związku. Wystarczy w zupełności, by dla dwóch dostatecznie dużych liczb a , b nie wyliczać sumy $a + b$ (czego uczniowie może nawet jeszcze nie umieją), ale przekonać się o parzystości $a + b$ „z zielonego stolika”; najlepiej nie arytmetycznie, lecz przez reprezentujące a i b zbiory (klocków itp.), a być może symbolicznie lub „w głowie”.

Warto w wymaganiach należyście podkreślić, iż wymagany wynikiem pracy (począwszy np. od II lub III klasy) będzie nie sama odpowiedź, że np. dane równanie czy nierówność nie ma rozwiązania lub że rozdzielnność zachodzi, i nie tylko stwierdzenie, że tak jest, ale także uzasadnienie, dlaczego tak jest.

Nie chodzi o to, by „obudzić potrzebę dowodu”; nie może chodzić o to, by „motywować”, dlaczego pytamy „Dlaczego?”. Natomiast gdy się zajmujemy matematyką, często pytamy: „Jak to się dzieje?”. Ciekawi jesteśmy, jak jedno z drugiego koniecznie wynika, jak funkcjonują koła zębate tych zależności!

(2) *Nauczanie matematyki musi od początku dbać o „higienę lo-*

giczną", gdyż jest to niezbędne przygotowanie do dedukcji. Już wtedy, gdy język potoczny dominuje w rozmowie o przedmiotach matematycznych, nauczyciel musi pilnować poprawności, a nawet ostrości pewnych sformułowań, na przykład przy poprawnym użyciu rodzajników określonych ("*eine Zahl*" o tej i tej własności, niekoniecznie jest "*die Zahl*" o tej własności) albo przy przestrzeganiu rozróżnienia między "gdy...", "wtedy" i "dokładnie wtedy, gdy" (w żywym potocznym sformułowaniu). Nie trzeba rozprawiać na temat tych sprawności logicznych, ale przez ćwiczenie wyrabiać nawyki, tak jak przyzwyczajając dzieci do mycia rąk w stosownych okazjach, nie robimy im wykładów z bakteriologii.

Uczeń nie powinien *sgadywać*, kiedy nauczyciel będzie zadowolony, także wtedy, gdy zgadnąć jest łatwo. Gdy nauczyciel od początku mówi o "zadaniu $2x + 5 < 22$ ", wówczas jest trochę hipnotyzerem, a uczniowie powinni być trochę oportunistami. Do wyrabiania nawyku ścisłości matematycznej należy także to, by we właściwym momencie powiedzieć, że rozwiązać powyższą nierówność znaczy znaleźć wszystkie liczby x , dla których $2x + 5$ *jest* mniejsze od 22.

2.

Wynik nauki dowodzenia, w ramach kursu matematyki jako całości, zależy istotnie od substancji matematycznej rozważanych przykładów. Lub inaczej: główną przyczyną trudności w nauce rozumienia, odtwarzania i odkrywania dowodów jest bezkrwistość, nieciekawość materiału przykładowego. Z pewnością pióro, czy kreda, powinny wzbraniać się przed napisaniem: "Twierdzenie. Nie wszystkie liczby naturalne są liczbami pierwszymi. Dowód..." Uczniowie (a także studenci!) łatwiej wciągają się w wymagające, ale zawierające piękne konstrukcje procesy dowodowe, niż w całkiem łatwe, w których jednak nie ma niczego prócz przekształceń logicznych, i to niezależnie od tego, jak oczywiste wydaje im się twierdzenie. W geometrii w stylu euklidesowskim jest dość substancji, ale w arytmetyce i początkach analizy nie jest ona hojnie rozsypana na drodze.

Do tego *funduszu*, którego zasoby, jak powiedziałem, są decydujące, należą na szczęście różne rzeczy, które z powodzeniem można zaliczyć do nauki dowodzenia:

- *Oszacowywanie* ($2^{100} > 10^{30}$), a nawet *rachunek* ($16 + 45 = 61$), można wyrazić w postaci dedukowania, jeżeli nie chodzi tu wyłącznie o opracowanie lub wyćwiczenie pewnego algorytmu.

- Przejścia myślowe przy rozwiązywaniu zadań na stosowanie matematyki zawierają łańcuchy wnioskowań logicznych, co gdzie indziej⁽¹⁾ pokazałem na przykładzie $5 - 2 = 3$ z pierwszej klasy. Jeśli nawet aparat dedukcyjny rachunku różniczkowego jest w szkole potraktowany w sposób niepełny, to przy rozwiązywaniu zadania na pojemność puszki (znajdowanie maksimum) konieczny jest ciąg kroków logicznych bez luk.

Oczywiście, obydwa te źródła materiału przykładowego są czynne tylko wówczas, gdy - jak już mówiłem na wstępie - hasło „Dowodzenie” ma bardzo liberalnie wyznaczone granice. Inaczej jest w przypadku następnej kopalni ćwiczeń, które tym razem zawierają prawdziwe dowody w węższym sensie; chodzi mianowicie o przygotowanie do niektórych definicji wymagających sprawdzenia istnienia i jednoznaczności:

Istnieje dokładnie jedna liczba rzeczywista x taka, że $x^3 = 5$. Dowód: ...

D e f i n i c j a. $\sqrt[3]{5}$ oznacza taką liczbę rzeczywistą, dla której $x^3 = 5$.

3.

Ogólność wcale nie jest charakterystyczną cechą dowodów.

Opracowanie przypadków szczególnych lub pojedynczych może być, po pierwsze, bardzo wydajne przy nauczaniu dedukowania, a po drugie, gdy później ma nastąpić uogólnienie, stanowi często główną część pracy, istotną ideę dowodu. (O skomplikowanej i interesującej dialektyce szczegółu i ogółu należałoby właściwie trochę pofilozofować; ale będziemy takich terminów jak „przypadek szczególny” czy „przypadek ogólny” używać w sensie całkiem naiwnym).

⁽¹⁾K. H ä r t i g, *Bemerkungen zum Thema Mathematische Strenge im Unterstufenunterricht*, Wiss. Zeitschr. Humboldt Univ. Berlin. Math.-Not. R. 32 (1983), 21-24.

Oto trzy typy pracy dedukcyjnej dotyczącej przypadków szczególnych:

(1) Gdy uczniowie odkryli, jak się zdarza, że

$$\binom{10}{4} + \binom{10}{5} = \binom{11}{5},$$

to zauważą też szybko, że dla 17 i 3 można „dokładnie tak samo” rozumować jak dla 10 i 4, albo zamiast 10 i 4 można wziąć 23 i 13. Jest to sformułowana przez A.Z. Krygowską niezmiennie płodna zasada „uzmiennienia stałych”⁽²⁾: Związek ogólny:

$$(I) \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

będzie pojęty jako *wymienialność* liczb, na których wykonuje się ten rachunek. W odpowiednio wyższej klasie, jak pokazała A.Z. Krygowska, to ogólne „wiedzieć dlaczego” nie opiera się ani na aparacie formalnym (jak (I)), ani na wielokrotnym sprawdzeniu rachunkiem; zmienne pozostają – przede wszystkim – *variables dans la pensée*.

(2) Niekiedy a priori w ogóle nie chodzi o nic ogólniejszego, ale przy okazji opracowywania szczególnego przypadku występuje coś, co można także zrobić ogólniej.

Między 100 i 110 są dokładnie cztery liczby pierwsze. W istocie: kandydatami mogą tu być, oczywiście, tylko 101, 103, 107 i 109. Ponieważ $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$, więc żadna z tych czterech liczb (nieparzystych) 105 ± 2 i 105 ± 4 nie jest podzielna przez 2, 3, 5, ani 7; ich czynniki pierwsze muszą więc być nie mniejsze od 11. Gdyby któraś z nich, a , nie była liczbą pierwszą, to byłoby $a \geq 11 \cdot 11 = 121$, co nie zachodzi.

Nie całe to uzasadnienie, ale jego ostatni fragment (dotyczący 11²) daje się uogólnić; ta puenta warta jest tego, by do niej jeszcze wrócić.

⁽²⁾A.Z. K r y g o w s k a, *Variables dans le raisonnement mathématique des enfants à l'âge de 8 ans*, Symposium des Centro Inter-universitario per la Ricerca Matematica, Trento 1980. Są tam i inne przykłady, tu także wykorzystane.

(3) Gdy na przykład stwierdzamy, że $2^{2^5} + 1$ jest podzielna przez 641, albo że w siatce dwunastościanu pięciokątnego istnieje okrąg Hamiltona (zob. dalej, ustęp 9), mamy rzeczywiście do czynienia z czysto jednostkowym przypadkiem. Takie dowody, naturalnie, na ogół nie pełnią funkcji „zawładnięcia za jednym ciosem” wieloma, może nieskończenie wieloma przypadkami szczególnymi.

4.

Trzeba wiele z „matematycznego katalogu reklamowego” widzieć i wypróbować, by móc matematyczną „okolicę” jakiegoś twierdzenia (różne podejścia dedukcyjne, analogie, wnioski, uogólnienia) świadomie wykorzystać dla efektywnej pracy z uczniami. Warto także poprzebierać w możliwie różnorodnych wariantach sformułowania i upogłdowienia, nie mówiąc o materiale przykładowym. Jest podejrzane, gdy jakieś ważne twierdzenie rozważa się tylko w tym ujęciu, w tym sformułowaniu, z tym dowodem, w tym języku zapisanym. Równie wątpliwa jest zbytnia abstynencja od „dalszego dopytywania się”. Weźmy jako ważny przykład procedurę dowodową indukcji zupełnej, wnioskowania z n na $n + 1$. Czy rzeczywiście jest najlepiej ograniczyć się do jednego wyrażenia obowiązującego dla dowolnej własności (formy zdaniowej) P :

$$(II) \quad (P(0) \wedge \forall_n (P(n) \rightarrow P(n+1))) \rightarrow \forall_n P(n)$$

(naturalnie, nie w tej formalnej postaci) albo jego odpowiednika w języku mnogościowym (bez meta-zmiennej P), i ćwiczeń w stosowaniu go, z pomocniczym odwoływaniem się do domina i długiej drabiny? Niewątpliwie głęboka analiza dydaktyczno-psychologiczna - diagnoza i terapia! - pracy opartej wyłącznie na (II) już także byłaby pożyteczna. Ale wrażenia, że (II) jest odosobnioną sztuką magiczną, można się pozbyć i zastąpić je poczuciem słuszności, naturalności, jeśli się nie trzymać sztywno „wypracowanej” rzeczy, ale ją *zmieniać*. Doświadczenie poucza, że gdy *więcej* zrobić - będzie łatwiej; A.Z. Krygowska nazwała to kiedyś „odciążeniem przez wzbogacenie”. W matematycznym „katalogu reklamowym” można znaleźć wiele rzeczy, być może także płodnych, dla nauczania szkolnego:

- Należy przywołać równoważne, a w zastosowaniach językowo prostsze twierdzenia, jak zasada najmniejszej liczby (własność dobrego uporządkowania); może także zasada szufladkowa Dedekinda.

- Jak wygląda indukcja zupełna dla liczb całkowitych, jak dla wymiernych, jak dla słów nad alfabetem $\{a, b, c\}$, jak dla sieci wyłączników? (dla nauczyciela: A jak dla punktów płaszczyzny?)

- To i tylko to, co może być indukcyjnie spłodzone, może być następnie także objęte dowodami indukcyjnymi. Dlatego nieco trudniejszy temat *definicji* indukcyjnych tylko pozornie daje się oddzielić od dowodów indukcyjnych.

- Także jakieś wnioskowanie z n na $n + 3$, z n na $2n$ i na $2n + 1$ (z odpowiednimi warunkami początkowymi) może się przyczynić do wyraźniejszego dostrzegania pogładowego jądra tej rzeczy.

- Ważne są także dowody szczególnych faktów, jak $P(1000)$, przez wnioskowanie z n na $n + 1$; nie występuje tu zupełnie „nieskończoność”, czy „ogólność” w ścisłym sensie.

- *Dowód* aksjomatu indukcji, może w postaci (II), byłby z pewnością potężnym dodatkowym środkiem przeciw tak zwanemu złemu samopoczuciu. Zależnie od wyboru stanowiącej tu podstawę definicji skończoności. Są różne ładne, wcale nie trudne dowody, których przeprowadzenie całkowicie jednak by zdeformowało ramy czasowe i treściowe tego tematu. Ale trzeba raz odważyć się to powiedzieć, tu i ówdzie bowiem dyskutuje się nad skreśleniem indukcji z programu nauczania.

Tyle na temat tego nieco prowokującego przykładu.

Co do włączenia *większej liczby równoległych wariantów*: ileż tracimy przez to, że *różne dowody, różne sformułowania* itd. praktycznie mają zabroniony wstęp na lekcje! To jest tylko pozorna oszczędność wysiłku i czasu. *Intensywność* pracy nad *jednym* tematem tak bardzo się liczy (także dla nastawienia ucznia), że nawet znaczniejszy wydatek czasu na to jest usprawiedliwiony.

Kilka przykładów różnych wariantów ujęcia znajdzie się w ustępie 5, a kilka przykładów różnych dowodów tego samego twierdzenia - w ustępie 6.

5.

Ścisłość przebiegu rozumowań matematycznych - szczególnie w dowodach - *nie jest związana z użyciem standardowego języka*. Chociaż zdolność do przejścia od poprawnej dedukcji (w języku zdecydowanie potocznym) do poprawnej dedukcji w języku matematyki należy kształcić przynajmniej na dodatkowych zajęciach.

Współczynniki binomialne $\binom{n}{k}$ (przy n, k naturalnych) są wprowadzane kombinatorycznie.

TWIERDZENIE. Dla $0 \leq k \leq n$ jest $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

D o w ó d (I ujęcie). Gdy gajowy w lesie o n drzewach wyznacza k drzew do ścięcia, może

- każde drzewo do ścięcia zaznaczyć karbem wyrąbanym siekierą: jest na to $\binom{n}{k}$ możliwości,
albo

- na każdym z $n - k$ drzew nie przeznaczonych do ścięcia nakleić kartkę z napisem: „Proszę nie ścinać”: jest na to $\binom{n}{n-k}$ możliwości.

D o w ó d (II ujęcie). Zbiór N składa się z n elementów. Zbiór k -elementowych podzbiorów zbioru N składa się z $\binom{n}{k}$ elementów. Zbiór $(n-k)$ -elementowych podzbiorów zbioru N składa się z $\binom{n}{n-k}$ elementów. Niech dla $T \subseteq N$ będzie $\varphi(T) = N \setminus T$. Funkcja φ odwzorowuje w sposób wzajemnie jednoznaczny X na Y , więc $\bar{X} = \bar{Y}$.

Tak skonfrontowane zostały dwa rodzaje ścisłości, które chcę także tutaj rozróżnić⁽³⁾.

„Ścisłość I” (bez wymagań dotyczących sposobu sformułowania) nie tylko wyprzedza „Ścisłość II” chronologicznie i psychogenetycznie, ale jest także ważniejsza dla kształcenia ogólnego i procesu wychowania.

Jeszcze jeden elementarny przykład dla I. Jeżeli obie liczby naturalne a, b są parzyste, to liczba $a \cdot b$ jest podzielna przez 4. Łatwo to widzieć, gdy się narysuje na kratkowanym papierze (wzdłuż kretek) prostokąt o a kratkach w jednym kierunku i b

⁽³⁾ Por. K. H ä r t i g, op. cit.

w drugim, a potem dokona jego rozkładu na 4 przystające prostokąty. To jest *poglądowy dowód* (a nie tylko „*pewne upogłdowanie*”). Utworzony tu łańcuch wnioskowań, wyżej zaledwie napomknięty, jest pełnym niepodważalnym dowodem. „Bardziej zielone już nie będzie” powiedzielibyśmy do kierowcy stojącego pod zielonym światłem sygnalizacji drogowej. Zresztą odpowiedni dowód czysto arytmetyczny - bez użycia reprezentacji - byłby tu możliwy już prawie w stylu II.

A oto kolejny przykład kombinatoryczny, na którym dobrze daje się pokazać to, co w mojej tezie nazwałem przejściem. Na początku zmiany w oddziale fabrycznym o n robotników należy odkomenderować brygadzystę z k robotnikami w celu wykonania pewnej naprawy. Na ile sposobów można ich wybrać? Pierwsza droga: dyrektor wybierze $k+1$ robotników - co może zrobić na $\binom{n}{k+1}$ sposobów - i poleca im wyznaczyć spośród siebie brygadzystę - co daje im w każdym przypadku $k+1$ możliwości. Otrzymujemy więc $\binom{n}{k+1} \cdot (k+1)$ możliwości. Druga droga: dyrektor wybiera najpierw k robotników - co może zrobić na $\binom{n}{k}$ sposobów - i spośród reszty załogi wybiera brygadzystę - za każdym razem na $n-k$ sposobów. Tym razem będzie więc $\binom{n}{k} \cdot (n-k)$ możliwości. Mamy zatem aż dwie odpowiedzi na nasze pytanie. Nie byłoby dobrze te dwa wyniki pozostawić bez komentarza i zająć się czymś innym. Ponieważ obie liczby muszą się zgadzać, mamy więc

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \binom{n}{k} .$$

Byłoby szkoda - w sensie tezy 4 - zmarnować możliwość nauczania się czegoś interesującego z tego wyniku (który z samym zadaniem już wcale nie jest związany), a mianowicie pewnego wzoru rekurencyjnego. Pozwala on mianowicie obliczyć np. $\binom{n}{20}$ z $\binom{n}{19}$, a potem z $\binom{n}{18}$ itd., prowadząc do rozkładu $\binom{n}{k}$ na czynniki. Jak trudne jest teraz przejść do „ściśłości II”, tzn. do zwyczajnego języka matematyków? Nie wymaga ono wielkiego wysiłku. Przede wszystkim można początek zmiany, dyrektora, naprawę, członków brygady itd. skreślić bez zastępowania czymkolwiek lub po prostu pozbyć się ich (mówi się raczej „*abstrahować*” od nich) w ten sposób, że zapytamy o liczbę możliwości wyboru ze zbioru n -elementowego $k+1$ elementów, wśród których jeden jest wyróżniony. Jeszcze jeden krok (ważny w kształceniu nauczycieli, mniej w szkole) polegałby na eliminacji słów „możli-

wość", „wyróżniony", „wybór", co na ogół można uczynić w kombinatoryce, ale się to zaniedbuje; wtedy mówimy już tylko o podzbiorach, funkcjach itd.

Na koniec powiedzmy sobie wyraźnie, że *pełna formalizacja* dowodów matematycznych - poza podstawami matematyki (rachunkiem predykatów, teorią dowodu itd.) byłaby całkowicie absurdalna. W dowodach, które można by śledzić tylko w zwolnionym tempie, zginęłyby wszystkie akcenty i puenty. Kiedyś próbowałem sformalizować dowód Euklidesa tego, że jest nieskończenie wiele liczb pierwszych...

6.

W toku nauczania uczniowie powinni być stopniowo wdrażani do refleksji nad przeprowadzonym dowodem. Do tej refleksji należy także - pożądaną - rozkład akcentów w dowodzie (według wykorzystania uprzedniej wiedzy, według wartości idei i „substancji” dowodu).

Okazyjnie należałoby też stawiać pytania następującego rodzaju:

- Gdzie w dowodzie ingerują założenia?
- Na jakich twierdzeniach i definicjach opiera się ten dowód? (Może to być szczególnie instruktywne przy konfrontowaniu różnych dowodów tego samego twierdzenia; patrz niżej).
- Dowód ten składał się z dwu. części; która była łatwiejsza?
- Czy można udowodnić twierdzenie A bez powołania się na twierdzenie B?
- Co w napotkanym fragmencie materiału było wykorzystane bez dowodu?

W dowodach *ad hoc* uczeń powinien też widzieć dowody. I należy też zwrócić uwagę uczniów na to, jeśli udało się udowodnić więcej niż zamierzano lub niż było potrzebne.

Oto dwa dowody twierdzenia: Jeżeli $|x| < 1$, to $x^n \rightarrow 0$.

Pierwszeństwo damy dowodowi opierającemu się na nierówności Bernoulliego, która dla $x = 0,99$ prowadzi do następującego oszacowania:

$$0 < 0,99^n = \frac{1}{\left(\frac{100}{99}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{99}\right)^n} < \frac{1}{1 + \frac{n}{99}} < \frac{99}{n} \rightarrow 0$$

Dowód ten przebiega w liczbach wymiernych; wiedza o liczbach rzeczywistych i ich zupełności (oraz konsekwencjach zupełności) nie jest w ogóle potrzebna. Gdy jednak mamy to do dyspozycji, można rozumować tak: Ciąg $0,99^n$ maleje *monotonicznie*, jest *ograniczony* (zerem) od dołu, więc ma *kres dolny* g , który jest zarazem jego granicą: $0,99^n \rightarrow g$. Także każdy podciąg jest zbieżny do tej granicy: $0,99^{2n} \rightarrow g$.

Ponieważ

$$0,99^{2n} = (0,99^n)^2 \rightarrow g^2,$$

więc $g^2 = g$, a zatem $g = 0$, gdyż $g = 1$ nie wchodzi w rachubę. Ten dowód jest „naturalniejszy”, ale grubszego kalibru. Chodzi tu o to, że nie tylko uczeń przejdzie obie drogi rozumowania, ale że będzie on mógł też zauważyć i opisać istotną różnicę w środkach dowodowych.

Za kolejny przykład posłużą tożsamości

$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha,$$

którą szybko można otrzymać z twierdzenia o cosinusie sumy. A co robić, gdy tego środka użyć nie chcemy lub nie możemy, gdy zapomnieliśmy tego wzoru i nie możemy go szybko odtworzyć?

Gdy nawiniemy w znany sposób nitkę długości α na koło jednostkowe od punktu $(1;0)$ do punktu P o współrzędnych $x = \cos \alpha$ i $y = \sin \alpha$, to koniec przedłużenia nitki o π wypadnie na tym kole dokładnie naprzeciw P , tj. w punkcie $(-x; -y)$. A więc $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$ i $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$.

Znowu chodzi tu nie tylko o intensywność pracy nad jakimś zadaniem i nie tylko o coraz pełniejszą świadomość, że wiele dróg prowadzi do Rzymu, ale przede wszystkim o świadomą refleksję: tu muszę znać definicje $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ (utrwalenie ich jest mile widziane!) - tam nie; tam twierdzenie o funkcjach sumy - tu nie.

Gdy chodzi o zalecany przeze mnie rozkład akcentów - należy śmiało rozróżniać:

DOWÓD
Dowód
(Dowód)
:
...,bowiem...
:

podobnie jak raz Edmund Landau typograficznie wyniósł pewne TWIERDZENIE ponad inne twierdzenia.

Przy zwykłym podejściu do twierdzenia Rolle'a i twierdzenia o wartości średniej w rachunku różniczkowym, cały wysiłek poświęca się dowodowi twierdzenia Rolle'a. Gdy zaś z niego uzyskuje się przez proste podstawienie tak przecież ważne twierdzenie o wartości średniej, wzdragamy się przed użyciem tu gromkiego słowa „dowód”.

Gdy nie powiemy wyraźnie, że jednoznaczność rozwiązania równania $x^3 = 5$ wynika po prostu z monotoniczności x^3 (bez drobiazgowej analizy), wówczas wykazanie jego istnienia jest bardzo pracochłonne (choć można to zrobić w bardzo naturalny i pożyteczny sposób). Zamiast więc wykonać jedno i drugie w jednakowym *meszoforte*, może lepiej by było z obydwu dowodów całkiem zrezygnować; byłoby to jednak złe z innych powodów.

7.

Przejdźmy teraz do trzech dalszych przykładów. Zobaczmy, jak różnorakie rzeczy można zauważyć i wykorzystać w toku prowadzenia dowodu, czego - poza uporaniem się z samym dowodem - można na nim nauczyć się lub co wyćwiczyć.

Oto pierwszy dodatkowy przykład. Po przerobieniu z uczniami równań kwadratowych zapytajmy: „Dlaczego właściwie każde równanie kwadratowe ma co najwyżej dwa rozwiązania? Z doświadczenia wiem, że niektórzy uczniowie wskazują po prostu na wzory:

$$(1) \quad x_1, x_2 = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q},$$

mówiąc: „Przecież to są dwa”. Takie „nieuzasadnienie” sugeruje, że trzeba powtórzyć pytanie z dodatkowym żądaniem pokazania tego wprost, a więc bez posługiwania się wzorami (1). Instruktywne i poglądowe byłoby uzasadnienie odwołujące się do przebiegu funkcji, bez użycia początkowych wiadomości z rachunku różniczkowego lub też z użyciem ich. Tu natomiast chcę omówić nie to, ale pewne uzasadnienie *ad hoc*.

O dowolnej funkcji kwadratowej f mamy wykazać co następuje: Funkcja f nie ma trzech różnych miejsc zerowych. Innymi słowy: Jeżeli ja wymienię jakieś miejsce zerowe i ty wymienisz jakieś miejsce zerowe, ale nie to samo co ja, i on wymieni jakieś miejsce zero-

we, także nie to samo co ja, to on wymienił to samo co ty.
A to znaczy, że dla

$$f(x) = x^2 + px + q$$

zakładamy:

$$(2) \quad f(a) = 0,$$

$$(3) \quad f(b) = 0,$$

$$(4) \quad b \neq a,$$

$$(5) \quad f(c) = 0,$$

$$(6) \quad c \neq a$$

i twierdzimy, że:

$$b = c.$$

D o w ó d.

$$a^2 + pa + q = 0$$

na podstawie (2),

$$b^2 + pb + q = 0$$

na podstawie (3)

$$(a - b)(a + b + p) = 0$$

przez odjęcie (3) od (2),

$$a + b + p = 0$$

ze względu na (4),

$$a + c + p = 0$$

analogicznie, na podstawie (2), (5)

i (6)

$$b = c, \quad \text{jak twierdziliśmy.}$$

Na tablicy, naturalnie, nie napiszemy: „na podstawie ...”, ale po prostu każdorazowo zastosowane założenie podkreślimy lub na nie wskażemy.

Typowe przy takim opracowaniu omawianego przykładu jest małe *collegium logicum*, a mianowicie analiza kwantyfikatorów „jest co najwyżej dwa”. Zależnie od tego, czy uczniowie analizy tej dopiero dokonują czy jest to już rutynowe przejście, nierutynowa część postępowania dowodowego, a więc to, na co trzeba *wpaść*, zredukuje się do nielicznych odejmowań i dzieleni lub nie.

8.

A oto drugi dodatkowy przykład. W ciągu liczb Fibonacciego określonym następująco:

$$(1) \quad u_0 = 0, u_1 = 1, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad (n \geq 0)$$

zauważamy, że poczynając od $u_0 = 0$, $u_5 = 5$, $u_{10} = 55$ każda piąta liczba jest podzielna przez 5, a inne nie:

$$(2) \quad 5 \mid u_n \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } 5 \mid n.$$

Nie możemy tu wchodzić w liczne znane i interesujące wprowadzenia tego ciągu, ani też w motywy zajmowania się akurat tą własnością liczb Fibonacciego. Przypuśćmy dla prostoty, że przy obliczaniu kolejnych liczb, gdzieś około u_{20} , uczniowie zauważą coś bliskiego (2). Czy dalej będzie podobnie? Wielokrotne zastosowanie wzoru rekurencyjnego (1) daje

$$\begin{aligned} u_{n+5} &= u_{n+4} + u_{n+3} \\ &= 2 \cdot u_{n+3} + u_{n+2} \\ &= 3 \cdot u_{n+2} + 2 \cdot u_{n+1} \\ &= 5 \cdot u_{n+1} + 3 \cdot u_n, \end{aligned}$$

a więc

$$u_{n+5} \equiv 3u_n \pmod{5}.$$

Stąd zaś twierdzenie (2) otrzymamy za pomocą indukcji z n na $n+5$.

Ten krótki i całkowicie naturalny rachunek wymaga pewnego wyrobienia w obchodzeniu się ze zmiennymi - tu w podstawianiu wskaźników. Jeżeli nie chcemy stawiać tych wstępnych wymagań, to jest do dyspozycji inny, o wiele dłuższy, ale bardzo instruktywny sposób, który dużo silniej nawiązuje do prób, mianowicie do obliczania pierwszych wyrazów ciągu.

Jeżeli chcemy sprawdzić (2) dla nieco większych n , to ułatwimy sobie życie obliczając nie samo u_n , ale tylko cyfrę jedności e_n tych liczb:

n	01234	5	10	15	20	25	30
e_n	01123	28314	29437	07741	26178	23819	09987

n	35	40	45	50	55
e_n	52796	51673	03369	54932	27

Jak długo mamy to kontynuować? Czego właściwie oczekujemy? Cyfry od 0 do 9 są - jak się wydaje - pomieszane jak groch z kapustą! Gdy to pomieszanie zacznie się po pewnym czasie powtarzać - będziemy u celu. Ale czy ciąg $e_0, e_1, \dots$ jest rzeczywiście okresowy? Byłoby tak z pewnością, gdyby jakieś dwa kolejne wyrazy znowu się gdzieś dalej powtórzyły obok siebie i w tym porządku, np. tak:

$$(4) \quad \dots \overset{*}{\boxed{31}} \quad \dots \quad \overset{**}{\boxed{31}} \quad \dots$$

Wtedy można by te dwie ramki przesunąć równolegle w lewo (wówczas każdorazowa zawartość $*$ zawsze będzie równa zawartości $**$), aż do oporu:

$$(5) \quad \overset{*}{\boxed{01}} \quad \dots \quad \overset{**}{\boxed{01}}$$

Nie jest możliwe, by przy każdej ze 101 początkowych pozycji ramki jej zawartość, tj. para kolejnych liczb e_0, e_1 , aż do e_{101} , była inna, jest ich bowiem tylko 100 (mianowicie 00, 01, ..., 99). Wobec tego sytuacja jest taka jak w (4), a więc i sytuacja (5) rzeczywiście musi się zdarzyć, a przy tym $**$ jest oddalone od $*$ o najwyżej 100 kroków. Możemy być spokojni: najpóźniej po 100 krokach wszystko zacznie się *dać opo*. Kontynuujemy więc cierpliwie wypełnianie tabelki:

n	55					60	61
e_n	5	7	2	9	1	0	1

Mieliśmy szczęście: „już” $e_{60} = 0$, $e_{61} = 1$, więc nasz ciąg ma okres 60 i wcale nie trzeba 100 kroków. Dobrze, że przy e_{56} , a więc niemal u celu, po tylu trudach nie daliśmy za wygraną! Wciąż jest więc

$$e_m = e_{m+60} = e_{m+120} = \dots ;$$

na przykład

$$e_{1035} = e_{60 \cdot 17 + 15} = e_{15} = 0 ,$$

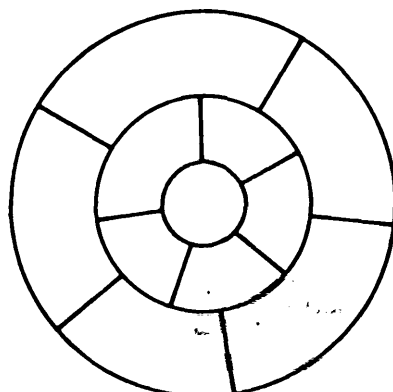
a zatem liczba e_{1035} kończy się cyfrą 0 i jest podzielna przez 5.

W związku z tym rozumowaniem, a także moimi tezami, nasuwają się różne uwagi:

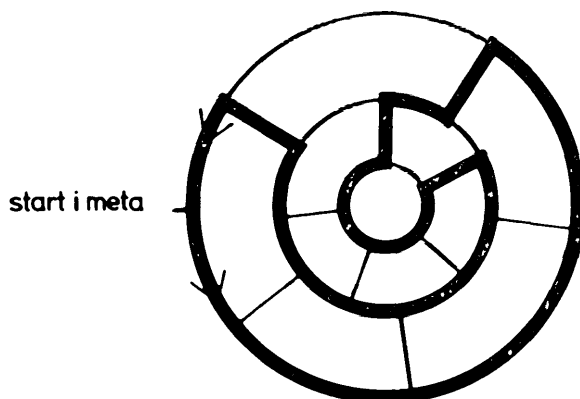
- Nie jest rzeczą nieodzowną dążyć do sprawdzenia (2) dla dowolnego n . Całą istotną część pracy musimy wykonać już dla zbadania czy u_{1035} kończy się na 0 lub 5.
- Dla wyliczenia żadanego e_n potrzebne są jedynie umiejętności rachunkowe na poziomie pierwszej klasy.
- Przyczyni się to do rozwinięcia prostej, a nieocenionej umiejętności przejrzystego budowania tabel i ich komentowania.
- Przejście od u_n do e_n , a więc do reszt modulo 10, jest paradygmatycznym przykładem często spotykanego postępowania matematycznego „nie chcieć wiedzieć aż tak dokładnie”, które uczniowie znają np. z pojęcia podzielności (istnieje iloraz całkowity, „który jednak teraz nie będzie nas interesować”).
- Indukcja zupełna jest tutaj wnioskowaniem z n na $n+60$. Okresowość jest zagwarantowana za pomocą zasady szufladkowej.
- Pokazaliśmy nieco więcej, niż mówi twierdzenie.
- Upór, z którym wytrwaliśmy aż do $n = 61$, został wynagrodzony.
- Szczególnie godne uwagi jest to, że „uspokajający krok” - wykazanie okresowości - można wykreślić z dowodu, który nie stanie się przez to błędny lub niepełny!
- Jeszcze nieco „dalszego dopytywania się”:
Dlaczego ...,5,0,... nie pojawia się w ciągu e_n ?
Dlaczego nie ...,2,6,... ? I nieco trudniejsze pytanie:
Dlaczego nie ...,7,6,... ?

9.

Ostatni przykład dotyczy twierdzenia: Siatkę krawędzi dwunastościanu pięciokątnego (szwy na piłce) można tak przejść, że każdy wierzchołek (t.j. punkt spotkania się trzech krawędzi) zostanie przekroczony dokładnie raz, po czym wrócimy do punktu wyjścia. (Można to przeformułować np. na wypowiedź o sieci ulic i trasie urzędnika pocztowego opróżniającego skrzynki). To brzmi bardzo prosto i niezbyt matematycznie. Robi się taką siatkę, rysuje się żądane przejście („okrąg Hamiltona”) - i basta, to już jest dowód (albo „dowód”,



Rys. 1



Rys. 2

jeżeli kto woli)). Ale jak zapamiętać rozwiązanie? Jak przekazać rozwiązanie telefonicznie komuś, kto już dość długo bezowocnie go poszukiwał? Ponumerowanie 20 wierzchołków byłoby bezcelowe, jako wymagające rozwlekłego opisu. Przejście może być odtworzone np. na podstawie instrukcji

$$(P^3 (LP)^2 L^3)^2,$$

co jest, naturalnie, skrótem dla „PPPLPLPLLL i jeszcze raz to samo”, gdzie P znaczy „w prawo!” i L „w lewo!”. Przecież w każdym wierzchołku, do którego dochodzimy, trzeba wiedzieć jedynie, czy dalej iść w prawo, czy w lewo. Oto jest wprowadzenie najprostszych sugestywnych oznaczeń, pozwalających na takie małe kodowanie.

Dwa dodatkowe pytania apelują do wyobraźni przestrzennej:

a) *Dlaczego*, gdy zamieniamy w naszych instrukcjach L i P , także otrzymujemy przejście? (Pomyślmy o sieci wraz z zaznaczonym przejściem narysowanej na szybie, na którą patrzymy z drugiej strony).

b) *Dlaczego* dany opis drogi jest ważny przy *dowolnym* punkcie wyjściowym i *dowolnym* kierunku wyjściowym? (Pomyślmy o szkielecie dwunastościanu jako realnej siatce wykonanej z elastycznego materiału, naciągniętej na kulę tak, że pięciokąty są przystające. Wtedy wystarczy tylko tę kulę odpowiednio obracać).

Nawet tutaj rozmaity udział mają: formułowanie, widzenie, a także nieco poglądowych przekształceń topologicznych.

10.

Co byłoby największym sukcesem nauczyciela, którego uczniowie zdobyli solidne umiejętności w dowodzeniu i przy przeprowadzaniu dowodów okazują tyleż fantazji co dyscypliny? Byłaby to radość uczących się z piękna związków matematycznych i z tej poważnej samodzielnej pracy.

(Z niemieckiego tłumaczył S. Turnau)

On proofs and proving in the teaching of mathematics

Summary

The author appeals that the sense of deduction were not developed through solemn proofs with the ringing of bells, but rather by using various tiny but interesting occasions; lots of examples are proposed.