ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 6(1986)

Stefan Turnau
Wyższa Szkoła Pedagogiczna
Kraków (Polska)

Dlaczego szkolne lekcje matematyki nie uczą matematyki?

1. SZKOLNA WIEDZA MATEMATYCZNA I ZDROWY ROZSĄDEK

Gdy uczyłem matematyki w szkole średniej w latach pięćdziesiątych, uderzyło mnie następujące zjawisko. Dopóki uczniowie nie opanowali dostatecznie arytmetyki i algebry, zwykło się przypuszczać, że zwiększenie wysiłku i poprawa pilności uczniów, a także lepsza praca nauczycieli wystarczą, by zadowalająco podnieść wyniki. Gdy tylko jednak sprawności, mierzone w skali ocen testów, idą w górę - wychodzą na jaw wszystkie niedostatki tak zwanego wykształcenia matematycznego tych młodych ludzi, nasuwając wątpliwości co do wartości wysiłku, zarówno ich samych jak i ich nauczycieli.

Powszechnie sądzi się, że matematyka rozwija pewien rodzaj logicznego, zdyscyplinowanego myślenia. I rzeczywiście, rozwija je u niektórych uczniów. Ale u wielu innych lekcje matematyki zabijają myślenie oparte na zdrowym rozsądku. Ponieważ jednocześnie u uczniów tych rodzi się bezpodstawna wiara w siłę procedur symbolicznych, nieraz stosowanych niedbale i nieodpowiedzialnie, nauka matematyki zabija w nich to, co w podejściu matematycznym najważniejsze - posługiwanie się pojęciami matematycznymi. Następpujące przykłady wyjaśnią, o jakim rodzaju myślenia jest mowa.

Przykład 1. Uczeń rozwiązuje równanie i otrzymuje błędny wynik. W zasadzie zna on metodę rozwiązania, ale popełnia tak zwany "głupi błąd". Podstawienie znalezionej liczby dla zauważenia błędu i ewentualnego poprawienia rozwiązania zajęłoby mu kilka sekund. Jednak bez względu na to, jak wiele uwagi poświęcono temu na lekcjach, nasz uczeń należałby do rzadkości, gdyby samorzutnie dokonał tego podstawienia.

Przykład 2. Uczeń ma rozwiązać układ równań liniowych i wykreślić obydwa równania. Wydaje się sprawą naturalną i oczywistą, że trzeba porównać współrzędne wspólnego punktu prostych wykresu ze znalezionymi wcześniej liczbami. Nie jest tak dla naszego ucznia, jak też dla wielu jego kolegów, gdyż proste na wykresie nie zostały nawet przedłużone na tyle, by widoczny był punkt przecięcia.

Przykład 3. Trzydziestu pięciu studentów amerykańskiego koledżu otrzymało, w ramach kursu pt. "Matematyka dla handlowców i ekonomistów", następujące nietypowe zadanie. Dana była macierz A ilości trzech składników trzech rodzajów ciasta oraz ceny tych składników. Zadanie polegało na: 1) przedstawieniu cen w postaci macierzy jednowierszowej B i macierzy jednokolumnowej C, 2) wskazaniu, które iloczyny spośród AB, AC, BA, CA są wykonalne, 3) wskazaniu, które z wykonalnych iloczynów mają sens realny i podaniu ich znaczenia. Niemal wszystkie odpowiedzi na pytania 1 i 2 były poprawne i niemal wszystkie odpowiedzi na pytanie 3

- błędne; tylko nieliczni studenci odwoływali się do realnego sensu występujących w zadaniu liczb i tylko dwu z nich odpowiedziało poprawnie na pytanie 3.

2. DWA PODEJŚCIA: W STRUKTURACH POWIERZCHNIOWYCH I W STRUKTURACH GŁĘBOKICH

Dlaczego tak jest, że uczenie się matematyki zabija u niektórych uczniów zwykłe, praktyczne myślenie, zamiast je wspomagać i rozwijać?

Matematykę można rozumieć, uprawiać, a nawet - do pewnego stopnia - stosować w dwu istotnie różnych płaszczyznach. Są to, w terminologii Skempa (1982), płaszczyzna struktur głębokich i płaszczyzna struktur powierzchniowych. Działać w płaszczyźnie struktur głębokich - znaczy używać sensownie pojęć matematycznych i ich związków w celu znalezienia odpowiedzi na pytania dotyczące tych pojęć lub przedmiotów realnych, do których te pojęcia mogą być zastosowane. Działać w płaszczyźnie struktur powierzchniowych - znaczy używać symboli matematycznych (cyfr, liter, wykresów itp.) w celu wyprodukowania pewnych napisów lub wykresów jako poprawnej odpowiedzi na dany problem, czy to czysto matematyczny czy stosowany.

Na krótką metę mniejszego wysiłku wymaga opanowanie podejścia w strukturach powierzchniowych do większości szkolnych problemów matematycznych w stopniu, wystarczającym do uzyskiwania przyzwoitych wyników w testach i na egzaminach. Dla ucznia nastawionego na struktury powierzchniowe wątpliwą pomoc stanowi odwołanie się do struktur głębokich w przypadku utknięcia; często wzmaga to jego zagubienie lub prowadzi do "rozwiązania", któremu brak jakiejkolwiek logiki. Dzieje się tak dlatego, że struktury powierzchniowe tylko częściowo odpowiadają strukturom głębokim, toteż dla mniej zdolnego lub niedoświadczonego ucznia jest rzeczą trudną i ryzykowną okazyjne odwoływanie się do sensu używanych symboli, gdy pozostaje w zasadzie w płaszczyźnie struktur powierzchniowych. Zobaczmy to na przykładzie.

Przykład 4. Dla rozwiązania nierówności

$$(x + 2)(x - 3) < 0$$

rozumowo, tj. działając w płaszczyźnie struktur głębokich, można postępować w sposób następujący.

Iloczyn po lewej ma być ujemny. W tym celu jeden czynnik musi być ujemny, a drugi dodatni. Wyrażenie x + 2 jest równe 0 dla x = -2, ujemne - dla liczb mniejszych od -2 i dodatnie - dla większych od -2. Podobnie drugi czynnik. Informacje te można krótko zapisać w tabeli:

		-2		3	
x+2	-	0	+	+	+
x-3	-	-	-	0	+

Z tabeli widzimy, że jedyny przedział, w którym czynniki te mają przeciwne znaki, a więc iloczyn jest - jak wymaga nierówność - ujemny, tworzą liczby między -2 i 3. Zatem przedział (-2, 3) jest rozwiązaniem nierówności.

To samo można zrobić w płaszczyźnie struktur powierzchniowych. Najpierw przygotowujemy tabelkę z dwoma czynnikami liniowymi w pierwszej kolumnie i liczbami przeciwnymi do liczb w nawiasach w pierwszym wierszu. Następnie umieszczamy zera na przekątnej tabelki i uzupełniamy tabelkę znakami - i +, zaczynając od znaku - i zmieniając go na znak +, gdy przechodzimy przez 0. Wreszcie wybieramy przedział (przedziały), gdzie schodzą się w kolumnie różne znaki (w przypadku nierówności "mniejsze od 0").

Zauważmy, że rozumowanie to jest całkowicie inne niż w poprzednim rozwiązaniu, mimo że tabela i wynik są te same. W szczególności brak tu zupełnie odwołania się do wartości wyrażeń lub ich znaków. Jeżeli uczeń popełni błąd, wyjaśnienie w rodzaju: "Twoja tabela pokazuje, że x - 3 jest dodatnie na prawo od -2, co nie jest prawdą" *wymagałoby zmiany płaszczyzny* rozumowania i porzucenie - przynajmniej na tę chwilę - stosowanej reguły konstruowania tabeli. Na to, by taki przeskok mógł być dokonany z niewielkim ryzykiem pomyłki, ingerujące tu pojęcia musiałyby być ukształtowane dostatecznie głęboko i operatywnie. Gdy tak nie jest, uczeń uznaje za pomoc jedynie wyjaśnienie odnoszące się bezpośrednio do jego reguły symbolicznej. Postęp wiedzy tego ucznia polega wówczas jedynie na doskonaleniu matematyki struktur powierzchniowych.

Zarówno podejścia czysto pojęciowe, jak i czysto symboliczne są bezużyteczne. Pierwsze jest wysoce nieefektywne, drugie musi być najpierw każdorazowo pojęciowo zaadaptowane, by można je efektywnie zastosować. Jedynie umiejętność posłużenia się każdym z nich tam, gdzie jest to właściwe, i przestawienia się z jednego na drugie, gdy to okazuje się konieczne, umożliwia rozwiązywanie niestandardowych problemów matematycznych bądź autentycznie realnych, a więc przez to niestandardowych, problemów-zastosowań. Matematyka uprawiana jedynie w płaszczyźnie struktur powierzchniowych jest niestosowalna, bezużyteczna. Zatem uczenie się tego rodzaju matematyki w szkole lub nie uczenie się jej nie stanowi istotnej różnicy dla przyszłej działalności zawodowej ucznia. Być też może, że taka nauka matematyki wywołuje szkodliwy skutek zablokowania na zawsze możliwości opanowania jakichkolwiek struktur głębokich, a więc jakiejkolwiek matematyki stosowalnej. Możliwy jest też transfer tej blokady na inne dziedziny wiedzy szkolnej.

3. ALIENACJA UCZENIA SIĘ

Niechęć, jaką przejawiają uczniowie wobec prób wprowadzenia ich w myślenie pojęciowe,ma też ważną przyczynę natury społeczno-ekonomicznej; jest nią alienacja uczenia się. Podobnie jak praca (zob. Fromm 1955, s. 111-137), tak uczenie się stało się aktywnością, której celem nie jest już samospełnienie, której motywacją nie jest już pragnienie stania się lepszym człowiekiem. Jest ono narzucone uczniowi przez całą strukturę społeczną, w której żyje. Uczy się nie dla siebie, ale dla swoich nauczycieli, egzaminatorów, pracodawców itp. I skoro stopień szkolny stał się jedynym wymaganym produktem - produkuje on stopnie.

Skutkiem alienacji uczenia się, podobnie jak alienacji pracy, jest zastąpienie zadowolenia z ujrzenia od dawna pożądanych i znaczących wyników wysiłku przez zadowolenie z uzyskania najwyższej możliwie ceny za jak najmniejszy wysiłek. To nie rzeczywiste wyniki uczenia się dają satysfakcję (prawdziwe wyniki uczenia się są na ogół nieznane uczniowi, jak wyniki wyalienowanej pracy są nieznane robotnikowi), ale nagroda, jaką za nie otrzymuje, czy to wyrażona w jednostkach monetarnych czy w punktach oceny testu. To wyłączne zainteresowanie uczniów pozytywnymi wynikami testu, będące w sprzeczności z samą istotą uczenia się i uprawiania matematyki, nie tylko nie sprzyja podnoszeniu ich wykształcenia matematycznego, ale daje efekt przeciwny. Charakterystycznym tego przykładem jest stosunek uczniów do zgadywania.

Ponieważ wyalienowane uczenie się matematyki, podobnie jak sam przedmiot, jest nieinteresujące i tylko stopień na świadectwie motywuje wysiłek, wszelkie sposoby uniknięcia tego wysiłku i uzyskania mimo to pożądanego stopnia są chętnie przyjmowane przez ucznia i aprobowane przez jego kolegów; koniec końcem, aprobują je także mimo woli nauczyciele. Ponieważ cały wysiłek uczniów jest skierowany na zdanie testów, a testy polegają na odpowiadaniu na pytania - uczniowi wydaje się oczywiste, że za każdą poprawną odpowiedź powinny być przyznane punkty (część punktów za odpowiedź częściowo poprawną), bez względu na sposób uzyskania tej odpowiedzi. I tak udane zgadywanie staje się w pełni prawomocną metodą zdobywania punktów za testy. Oto przykład takiego podejścia, bardzo typowy dla wielu studentów koledżów amerykańskich.

Przykład 5. Uczeń "rozwiązał" nierówność

$$(x + 1)(x - 3) > 0$$

w sposób dobrze znany wszystkim uczącym:

$$(x + 1) > 0, \qquad x - 3 > 0$$
$$x > -1, \qquad x > 3.$$

Uczeń ten nie otrzymał żadnego punktu za to zadanie, przyszedł więc ze skargą: "Mój wyniki jest częściowo poprawny ($x > 3$); dlaczego nie dostałem częściowych punktów?" Nauczyciel odpowiedział, że metoda rozwiązania zastosowana przez ucznia była całkowicie błędna, więc nie zasłużył on na żaden punkt; część jego odpowiedzi przypadkowo występuje też w odpowiedzi poprawnej, to jednak nie może wpłynąć na ocenę metody. "Nie wiem, co pan rozumie przez metodę - odpowiedział oburzony student - ale jest faktem, że moja metoda jest częściowo poprawna, tak jak odpowiedź, więc z pewnością zarobiłem jakieś punkty". W tym momencie było oczywiste, że wszelka dalsza dyskusja byłaby bezużyteczna. Nauczyciel uważał bowiem, że uczeń nie zasługuje na punkty, gdyż nie opanował tego, co właśnie miał opanować, uczeń zaś uważał, że zasłużył na punkty, gdyż zdołał wytworzyć wyrażenie, które było identyczne z częścią wyrażenia, jakie powinien był wytworzyć. Ich rozumienia tego, czym jest uczyć się i umieć matematykę, były nie do pogodzenia.

Wielu uczniów od pierwszej klasy po uniwersytet żyje w świecie niemal bezsensownych operacji symbolicznych, nieraz przedwcześnie i błędnie utworzonych na bazie przykładów. Uczniowie ci stają się coraz bardziej głusi na próby przekazania im jakiejś głębszej wiedzy. Kończą oni przedmiot z zasobem wiedzy, zawierającym niewiele ponad pewną liczbę kiepsko pamiętanych, niestabilnych procedur symbolicznych i standardowych metod rozwiązywania standardowych zadań.

4. PROPONOWANE ZMIANY

Jak można by zmienić ten prawdziwie katastrofalny stan rzeczy?

4.1. PROGRAMY MUSZĄ ULEC REDUKCJI

W obecnym systemie szkolnym dla wielu uczniów nie jest korzystne - wbrew rozpowszechnionym opiniom - przechodzenie przez obszerny program matematyki. Im więcej matematyki muszą się oni uczyć, tym bardziej cała ich wiedza nabiera charakteru struktur powierzchniowych, staje się przez to bezużyteczna. Powinni oni poprzestać raczej na rzeczach podstawowych, określonych zgodnie z współczesnymi potrzebami i rozwijać umiejętności rozsądnego stosowania swej skromnej wiedzy w bardzo różnorodnych sytuacjach. Aby osiągnąć nawet ten bardzo ograniczony cel, tj. doprowadzić do opanowania przez wszystkich uczniów umiejętności sensownego i poprawnego stosowania matematyki zawsze, gdy tego potrzebują, muszą zajść następujące zmiany sprzyjające pojęciowemu uczeniu się matematyki.

4.2. ROZUMIENIE MUSI BYĆ NAGRADZANE

Skoro główną, jeżeli nie jedyną, motywacją uczenia się jest dla wielu uczniów ich powodzenie szkolne, musi stać się dla ucznia korzystniejsze, w sensie stopni szkolnych, opanowanie rozumienia i stosowania pojęć matematycznych, jako podstawy operacji symbolicznych i algorytmów, niż tylko doskonalenie pozbawionych treści sprawności formalnych, jak nieraz bywa.

4.3. METODY OCENY MUSZĄ ULEC ZMIANIE

Na to, aby dziecko chciało nauczyć się myślenia pojęciowego (tj. rozwiązywania pewnych problemów w pewien określony sposób), myślenie takie musi być też preferowane przez jego nauczyciela. Tymczasem nauczyciel, wbrew swemu wykształceniu pedagogicznemu, jest uwarunkowany latami uczenia się matematyki, kiedy struktury powierzchniowe wydawały mu się być samą istotą matematyki, kiedy usiłując opanować reguły nie miał nawet okazji, ani potrzeby, zadać sobie lub swemu nauczycielowi prostego pytania: "Dlaczego?".

Z drugiej strony, po to, by odnieść sukces w nauczaniu, nauczyciel musi zyskać współpracę uczniów; a większość z nich nie będzie współpracować z nauczycielem, jeżeli nauczanie, jakkolwiek na wysokim poziomie matematycznym i ukierunkowane na bezdyskusyjne cele dydaktyczne, pozostaje w niezgodzie ze stosowanymi narzędziami oceny, przynosząc im za wysiłek karę zamiast nagrody. Taka sprzeczność jest nieunikniona, jeżeli nauczyciel wymaga myślenia pojęciowego, podczas gdy dla uporania się z większością pospolitych zadań testowych przeciętny uczeń potrzebuje bardziej znajomości reguł i metod formalnych niż umiejętności używania pojęć matematycznych.

Uwarunkowanie nauczyciela i konieczność zabiegania o współpracę uczniów zniechęcają go do nauczania bardziej pojęciowego, nawet jeżeli uznaje wartość takiego podejścia. Przesunięcie nauczania matematyki w kierunku struktur głębokich wymaga istotnych zmian w postawie, zarówno uczniów jak nauczycieli, co z kolei wymaga zmiany w metodach oceny wiedzy matematycznej uczniów. Jedna z takich zmian powinna polegać na powrocie - wbrew powszechnemu trendowi - do staromodnego częstego ustnego odpytywania uczniów przez nauczyciela. Właśnie w dialogu można ocenić, jak uczniowie używają pojęć. W dialogu z odpowiednio przygotowanym nauczycielem uczeń może wyczuć, że liczy się jego rozumowanie, a nie poszukiwana w tym rozumowaniu odpowiedź na zadanie. Uczeń nie będzie też bał się popełnić błędu, jeżeli ten błąd będzie mu wolno znaleźć i poprawić. Wreszcie dialog z uczniem umożliwia nauczycielowi uchwycenie trudności ucznia i udzielenie właściwej pomocy.

4.4. ZMIANY MUSZĄ SIĘ ZACZĄĆ OD KLAS POCZĄTKOWYCH

Jakakolwiek zmiana musi się zacząć dostatecznie wcześnie, kiedy wiedza i postawa uczniów nie są jeszcze stabilne i związane z sobą. Bowiem im wyższe są umiejętności ucznia w strukturach powierzchniowych matematyki, tym bardziej jest on otwarty na ten typ nauczania i tym bardziej zamknięty na nauczanie pojęciowe. A więc reformy wymierzone w późne stadia nauczania matematyki stają wobec niepokonalnej bariery postaw wielu uczniów. Wolne i głębokie rozwijanie pojęcia liczby powinno przede wszystkim zastąpić obecne pospieszne wyuczanie sprawności rachunkowych.

Niestety, obecne tendencje w kształceniu matematycznym i proponowane wyżej zmiany są w sprzeczności, która wydaje się nie do pokonania. Ponieważ liczba uczniów, którzy są obowiązani uczyć się matematyki, stale rośnie, przeciętna liczebność klas czyni bezpośredni kontakt między uczniem i nauczycielem bardzo trudnym. Ponieważ wymaga się od uczniów opanowania wciąż rosnącego programu w czasie, który ledwie wystarcza na poruszenie wszystkich tematów - jedynie realny na dłuższą metę styl pracy to cykl: wykład-ćwiczenie-test, który można obserwować od pierwszej klasy aż po uniwersytet. Wreszcie, w samym systemie szkolnym jest zbyt wiele powiązanych z sobą uwarunkowań, działających przeciw podejściu pojęciowemu do matematyki, by reformy usiłujące narzucić to podejście nauczycielom i uczniom mogły zakończyć się powodzeniem. Jedyna nadzieja jest w reformie ewolucyjnej, starannie zaplanowanej na dziesięciolecia, powolnej lecz konsekwentnej i uporczywej, której efekty stałyby się widoczne dopiero, być może, w następnym stuleciu.

BIBLIOGRAFIA

FROMM E., The Sane society. New York: Fawcett Premier, 1955.

SKEMP R., Communicating Mathematics: Surface Structures and Deep Structures. In: Visible Language, 16(1982), s. 281-288.

WHY MATHEMATICS CLASSES DO NOT TEACH MATHEMATICS?

Summary

When they solve mathematical problems, students make errors apparently showing their lack of common sense. This phenomenon can be explained by the assumption that students operate mainly in the surface structures, unable to refer to the deep structures or conceptual interpretation of the problem and applied procedures. This situation is caused by the alienation of learning, i.e. learning for a reward /score, grade, diploma, position, etc./, and not in order to know. The proposed cure is in /1/ a reduction of the curriculum content, /2/ upgrading of understanding, /3/ putting more emphasis on oral questioning, /4/ changing the elementary instruction from teaching skills to developing number concepts.

powierzchniowych matematyki, tym bardziej jest on otwarty na ten typ nauczania i tym bardziej zamknięty na nauczanie pojęciowe. A więc reformy wymierzone w późne stadia nauczania matematyki stają wobec niepokonalnej bariery postaw wielu uczniów. Wolne i głębokie rozwijanie pojęcia liczby powinno przede wszystkim zastąpić obecne pospieszne wyuczanie sprawności rachunkowych.

Niestety, obecne tendencje w kształceniu matematycznym i proponowane wyżej zmiany są w sprzeczności, która wydaje się nie do pokonania. Ponieważ liczba uczniów, którzy są obowiązani uczyć się matematyki, stale rośnie, przeciętna liczebność klas czyni bezpośredni kontakt między uczniem i nauczycielem bardzo trudnym. Ponieważ wymaga się od uczniów opanowania wciąż rosnącego programu w czasie, który ledwie wystarcza na poruszenie wszystkich tematów - jedynie realny na dłuższą metę styl pracy to cykl: wykład-ćwiczenie-test, który można obserwować od pierwszej klasy aż po uniwersytet. Wreszcie, w samym systemie szkolnym jest zbyt wiele powiązanych z sobą uwarunkowań, działających przeciw podejściu pojęciowemu do matematyki, by reformy usiłujące narzucić to podejście nauczycielom i uczniom mogły zakończyć się powodzeniem. Jedyna nadzieja jest w reformie ewolucyjnej, starannie zaplanowanej na dziesięciolecia, powolnej lecz konsekwentnej i uporczywej, której efekty stałyby się widoczne dopiero, być może, w następnym stuleciu.

BIBLIOGRAFIA

FROMM E., The Sane society. New York: Fawcett Premier, 1955.

SKEMP R., Communicating Mathematics: Surface Structures and Deep Structures. In: Visible Language, 16(1982), s. 281-288.

WHY MATHEMATICS CLASSES DO NOT TEACH MATHEMATICS?

Summary

When they solve mathematical problems, students make errors apparently showing their lack of common sense. This phenomenon can be explained by the assumption that students operate mainly in the surface structures, unable to refer to the deep structures or conceptual interpretation of the problem and applied procedures. This situation is caused by the alienation of learning, i.e. learning for a reward /score, grade, diploma, position, etc./, and not in order to know. The proposed cure is in /1/ a reduction of the curriculum content, /2/ upgrading of understanding, /3/ putting more emphasis on oral questioning, /4/ changing the elementary instruction from teaching skills to developing number concepts.