ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 6(1986)

Jan de Lange Jzn
Rijksuniversiteit Utrecht
Utrecht (Holandia)

Geometria dla wszystkich, czy w ogóle nie geometria?

WSTĘP

Rozpocznę od wspomnienia sprzed roku. Wracałem z odczytu, który wygłosiłem dla belgijskich i duńskich nauczycieli. Tym samym pociągiem wracało dwoje nauczycieli, uczestników tego odczytu. Dyskutowali nad jednym z problemów, które zaproponowałem słuchaczom.

Polegał on na tym, by po obejrzeniu rysunku

(a) widok z przodu *(b) widok z boku*

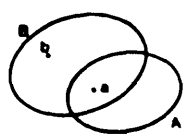
rozstrzygnąć, jaka jest najmniejsza liczba sześcianów, z których można wznieść taką budowlę.

Dyskutowaliśmy wspólnie nad możliwymi rozwiązaniami, gdy chłopiec siedzący po sąsiedniej stronie włączył się, pró-

bując też rozwiązać zagadnienie; jak się okazało, był on studentem architektury. Niebawem wywołał on żywą dyskusję z siedzącą naprzeciw dziewczyną; chodziło o sprecyzowanie problemu. Zupełnie nieoczekiwanie, w przeciągu 15 minut, najmniej 20 osób parało się już tym zagadnieniem. Niektóre z nich były mocno podniecone. Kiedy wysiadałem w Utrechcie, zostawiłem ich, wielu bardzo zaintrygowanych.

Zanim przejdę do kontynuowania rozważań o przedstawionym problemie, chciałbym przekazać Państwu stronicę z podręcznika geometrii - raczej nowego podręcznika.

2°) *Peut-il se faire que deux droites A et B aient un seul point commun ?*



Soit A une droite. D'après l'axiome G_1, elle n'est pas vide. Désignons par a un point de A.

En vertu de l'axiome G_2, A est une partie propre de Π.

Soit b un point qui n'appartient pas à A.

Comme $a \in A$ et $b \notin A$ on a $a \neq b$.

En vertu de G_1, la paire $\{a, b\}$ est contenue dans une seule droite, soit B.

Comme $a \in A$ et $a \in B$ on a $a \in A \cap B$.

L'intersection $A \cap B$ peut-elle comprendre un point c distinct de a ?

On aurait dans ce cas

$$a \neq c \qquad \{a, c\} \subset A \quad \text{et} \quad \{a, c\} \subset B$$

D'où en vertu de l'axiome G_1

$$A = B$$

Mais cette égalité est impossible puisque

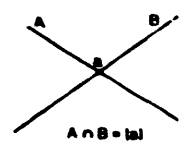
$$b \notin A \quad \text{et} \quad b \in B$$

En conclusion, $A \cap B = \{a\}$

DÉFINITIONS

Deux droites qui ont pour intersection un singleton $\{a\}$ sont dites sécantes au point a qui est leur point d'intersection.

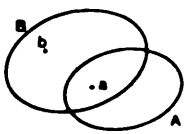
Elles se coupent en a



Spróbuję przetłumaczyć dwa pierwsze zdania dla tych z Państwa, którzy nie znają francuskiego. Mówią one:

"2° Czy jest możliwe, by dwie linie proste A i B miały jeden i tylko jeden punkt wspólny?"

Pytanie to zadaje się dość młodym dzieciom, bo w wieku 12-14 lat. Możliwe, że ktoś odpowie na to pytanie "tak". Ale prześledźmy tekst:



"Niech A będzie linią prostą: zgodnie z aksjomatem G_3 nie jest ona pusta. Niech a będzie punktem na A".

Chciałbym tutaj przerwać. Czy jeśli spojrzeliście Państwo dokładnie na rysunek, domyśliliście się, że A jest linią prostą i a punktem na niej?

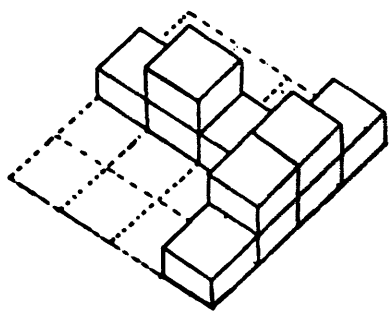
Dałem ten drugi przykład, by pokazać, jak według mego zdania nie powinna wyglądać "geometria dla wszystkich". Dużo trudniej jest zdecydować, jak ona wyglądać powinna. Ale pierwszy z przykładów może tu służyć za wskazówkę. Sądzę, że większość ludzi zgodzi się, iż jest to geometria. Sytuacja, jaka miała miejsce w pociągu, wskazuje, że mogłaby ona być dla wszystkich.

Co można powiedzieć o poziomie?

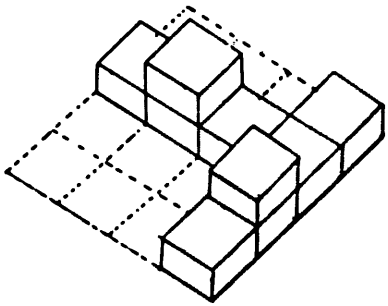
W naszej najbardziej liczącej się politechnice przeprowadziliśmy interesujący eksperyment: problem ten zadaliśmy trój-

ce studentów będących niemal u pomyślnego końca swych studiów. Prosiliśmy ich o rozwiązanie go, przy czym daliśmy im do dyspozycji około 20 klocków. Rzec można - geometria jako aktywność.

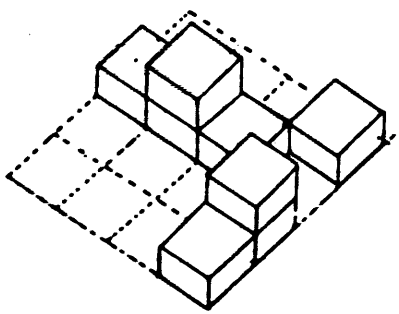
Eksperyment był rejestrowany na taśmie wideofonu. Po chwili studenci znaleźli rozwiązanie, na które zgodzili się. Najmniejsza liczba wynosi 10.



Po starannym przemyśleniu i spacerze wokół stołu jeden ze studentów odkrył, że jeden sześcian był zupełnie zbędny. Dumnie zaprezentowane zostało nowe rozwiązanie.

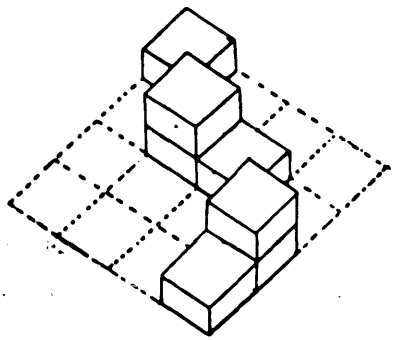


Ale ciągle były pewne wątpliwości. Wyglądało to już dość minimalnie, ale... Ostatecznie znaleziono "minimalne" rozwiązanie złożone z 8 sześcianów.

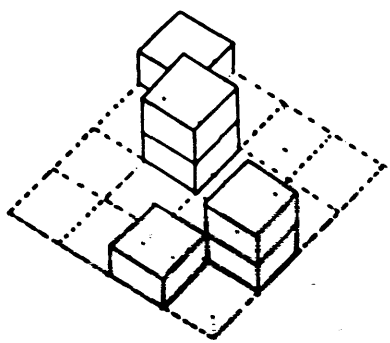


Zgodzono się, że jest to ostateczne najmniejsze rozwiązanie. Dwaj profesorowie, którzy obserwowali eksperyment, byli zaskoczeni. Ci studenci byli uważani za bardzo dobrych z matematyki, a męczyli się w wieku 24 lat z tak "prostym" problemem. Napisano potem piękny artykuł na temat tego eksperymentu, opublikowany w "The New Mathpaper". Na około 2 tysiące potencjalnych czytelników, wydawca uzyskał jedną reakcję od nauczy-

ciela, który z dumą zaprezentował "bardziej minimalne" rozwiązanie.



Na koniec tego wstępu pozwolę sobie przedstawić rzeczywiście minimalne rozwiązanie.



Pozostaje otwarte pytanie, jak Państwo możecie się upewnić, że jest to istotne minimalne rozwiązanie? Czy można to udowodnić?

CZASY SIĘ ZMIENIAJĄ

Kształcenie geometryczne ulegało zmianom. Nie tylko w ostatniej dekadzie, ale od długiego już czasu. Obok tradycyjnej geometrii euklidesowej, lub w jej miejsce, pojawiły się geometria rzutowa i afiniczna. Wzajemne ich związki badano przy użyciu idei geometrii przekształceń. Przekształcenia geometryczne były zalecane już dawno temu przez Feliksa Kleina (jako konsekwencja jego tak zwanego "Programu Erlengeńskiego"). Ale przenikanie ich nawet w Niemczech trwało przez długi czas. Wynikało to prawdopodobnie z faktu, że Kleinowskie podejście algebraiczne (grupowe) było za mało geometryczne. Inne kraje poszły w ślad Niemiec w rozpowszechnieniu użycia przekształceń, chociaż często uczono tego kiepsko. Traktowanie geometrii wyłącznie w ramach algebry liniowej było bardzo zalecane w szczególności na Konferencji na temat geometrii w Aarchus w 1960 r. Idea ta została rozpowszechniona w wielu krajach, w tym i w Holandii. Był to chyba początek końca dla geometrii.

Wymagania coraz bardziej kładły nacisk na algebraiczne składniki algebry liniowej, prawdopodobnie dlatego, że łatwiej było je sprawdzać (badać testowo) na końcowych egzaminach. Po kilku latach trudno było komuś powiedzieć nieco więcej o geometrii. Powodowało to, że coraz mniej uwagi poświęcano geometrii również na niższych poziomach. Wydać się mogło oczywiste, że skoro nie ma geometrii w końcowych wymaganiach, to nie ma sensu przeznaczać tak dużo czasu na geometrię we wcześniejszych stadiach nauczania.

Inne kraje cierpiały też na tę chorobę. Zainteresowanie geometrią słabło. Wyraża się niekiedy pogląd, że geometria podupadła, ponieważ nie była wystarczająco dedukcyjna. Bardzo wielu matematyków sądzi nadal, że matematyki i geometrii uczyć należy w systemie dedukcyjnym. Inni, z Freudenthalem na czele uważają, że geometria dedukcyjna zawiodła dlatego, iż jej dedukcyjność nie może być na nowo odkrywana przez uczącego się, ale wyłącznie narzucana. A musimy się zgodzić, że są ludzie, którzy nigdy nie zbudują systemu dedukcyjnego sami z siebie, ani nawet nie zrekonstruują jakiegoś systemu danego przez innych. Jak więc powinno się uczyć geometrii, a dokładniej geometrii dla wszystkich?

Należy mieć na uwadze:

- co dzieci potrafią?
- czego nauczyciel może uczyć?
- co jest ważne z matematycznego punktu widzenia?
- czego potrzeba w działalności społecznej?

Nie sądzę, by odpowiedź na każde z tych pytań dała nam ostateczne rozwiązanie.

W latach siedemdziesiątych było "w modzie" stawianie dziecka na miejscu centralnym. Jest to oczywiście właściwe, ale czy my naprawdę wiemy, co dzieci potrafią. Nie ma ogólnej zgody wśród nauczycieli co do tego, czy dzieci nie stać na coś więcej. Osobiście sądzę, że dzieci potrafią znacznie więcej, niż się na ogół przypuszcza. Pogląd ten nie opiera się na naszych własnych obserwacjach w klasie, które można

dezawuować jako niezbyt naukowe. Ale eksperymenty, w szczególności prowadzone przez Dienesa, pokazały,że dzieci mogą prowadzić dość złożoną działalność matematyczną na bardzo wczesnym etapie rozwoju. Ale mogą one również nauczyć się stronicy książki, na której udowodniono z użyciem aparatu teorio-mnogościowego, iż dwie proste mają tylko jeden punkt wspólny. To jednak nie koniecznie oznacza, że należy w ten sposób uczyć.

Czy powinniśmy brać pod uwagę, czego nauczyciel może uczyć? Wydaje się oczywiste, że odpowiedź brzmi "tak". Ale tkwi w tym wielki problem. Nauczyciele na ogół wydają się niechętni wprowadzaniu nowego programu i nowego podejścia. Nie dlatego, żeby nie potrafili uczyć nowego typu matematyki. Bardziej dlatego, że czują się niepewni. Zwłaszcza, jeśli nie są przekonani, że nowy program jest lepszy od dawnego. Problem ten można rozwiązać tylko wtedy, gdy przydatność programu jest jasna i dla uczniów,i dla nauczycieli. Fakt ten - zaakcentowany przez Alana Bishopa na Konferencji Geometrycznej w Mons w 1982 r. - jest bardzo ważny. Niezależnie od tego faktu należy sobie jasno uświadomić, że nowe podejście, szczególnie w geometrii,mogło stwarzać nauczycielowi szereg dodatkowych problemów, np. aktywność podobną do opisanej na wstępie nie tak łatwo wywołać w 30-osobowej rozbrykanej klasie, jak w grupie trzech młodych osób dorosłych. W każdym razie, jeżeli chodzi o nauczycieli, powinniśmy zapewnić, by przydatność geometrii dla wszystkich była jasna i zaproponować pewne rozwiązania problemów, które mogą wyniknąć

w trakcie nauczania tego rodzaju matematyki.

Trzecie pytanie brzmiało: co jest ważne z matematycznego punktu widzenia? Być może patrzę na rzecz nieco pesymistycznie, ale moim zdaniem, to właśnie spowodowało, że matematyka nowoczesna (modern mathematics) zawiodła. Jak zauważył Damerow w swym referacie na obecnym sympozjum, była ona z całą pewnością zrozumiała dla wszystkich. Z matematycznego punktu widzenia być może. Ale zapewne nie z punktu widzenia ogólnego wykształcenia i przydatności.

Ostatniej z podniesionych kwestii warto poświęcić znacznie więcej czasu. W istocie w naszym codziennym życiu nie potrzebujemy geometrii. Obecnie wielu nauczycieli matematyki w Holandii zna gruntownie geometrię. Jeśli im nie wydaje się ona użyteczna, to co może myśleć przeciętny człowiek.

Jak więc powinno się uczyć geometrii dla wszystkich?

Na temat sposobu jej uczenia się można oczekiwać bardzo prostej odpowiedzi. Rozumiemy przez to: postępowanie, w którym może ona być odkrywana przez uczącego się. Oznacza to, że powinniśmy rozpoczynać nauczanie geometrii jako aktywność w doświadczeniach. W niektórych krajach, jak w Wielkiej Brytanii, Holandii czy we Włoszech wydaje się istnieć tendencja do zwiększania aktywności i jej wzbogacania, co uprzednio było raczej ograniczane w podejściu do nauczania geometrii. Przyjmuje się pogląd, że intuicyjne aktywności doświadczalne nie powinny być ograniczane do nauczania początkowego, ale winny mieć miejsce również na poziomie szkoły średniej (ponad-

podstawowej). Hasło Freudenthala "Matematyka jako ludzka aktywność" winno stanowić punkt wyjścia, gdy myślimy o geometrii dla wszystkich.

Można by startować od:

- codziennych problemów,
- orientacji przestrzennej,
- jak widzimy przedmioty,
- świat wokół nas.

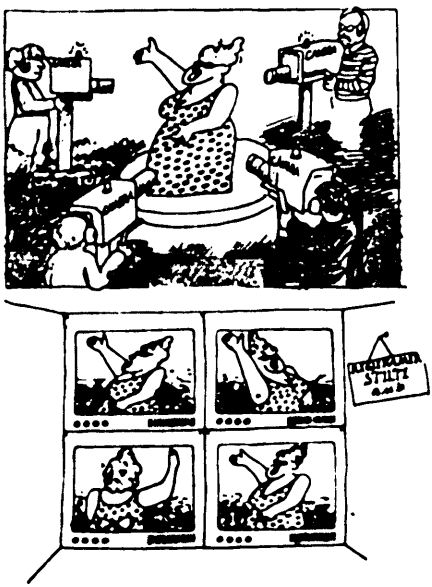
Najłatwiej wyjaśnię, o czym myślę, jeśli podam Państwu odpowiednie przykłady.

Zacznijmy od szkoły początkowej.

Przykłady

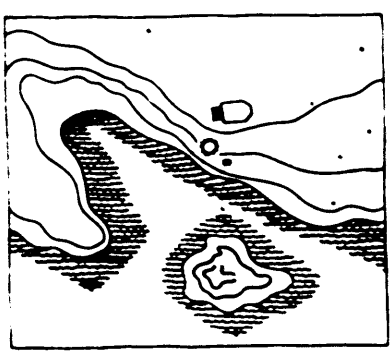
Pierwszy przykład pomyślany jest dla dzieci w wieku około 10 lat.

Pytanie: Która kamera wykonała zaprezentowane zdjęcie?



Drugi przykład dla grupy w tym samym wieku.

Rysunek przedstawia mapę części wysp Bermudów.

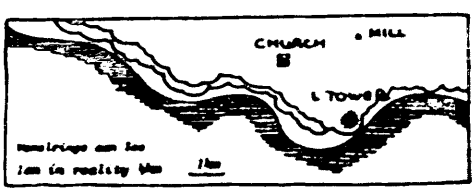


Pokazujemy następnie trzy przeźrocza.

Pytanie: Który rysunek przedstawia taką sytuację, jaka jest na Bermudach?

W dyskusji wywołanej tym pytaniem, wyjaśnia się, że jedno z trzech przeźroczy nie może przedstawiać takiej sytuacji, jaka jest na Bermudach: wieża kościelna musi być na prawo od latarni morskiej.

Kolejny przykład z tej samej serii.



(church - kościół
mill - wiatrak,
l.tower - latarnia morska)

"Holownik holuje jacht do zatoki. Płyną wzdłuż wybrzeża w pobliżu wsi Wemerlinge. Kapitan rozpoznaje na Bermudach kilka punktów: kościół, latarnię morską i w pewnej odległości na wydmie widzi wiatrak. Wyświetlamy teraz przeźrocza z sześcioma widokami. Są to zdjęcia wykonane przez kapitana, gdy okrążał Wemerlinge.
Niestety, zdjęcia wysypały się i zostały wymieszane."

Pytanie: W jakiej kolejności wykonano te zdjęcia?

Pewien uczeń ustawił szybko zdjęcia a-f-b-c-d-e. Uderza szybkość, z jaką to robił. Istotne okazało się, że na pierwszy rzut oka porównał zdjęcie a z f i próbował wyrazić zmianę położeń, z których te sytuacje mogły być widziane.

"Płyniecie taką drogą" i wskazuje od prawej do lewej

strony. Trzecim zdjęciem w tym ciągu jest b, ponieważ na nim wiatrak chowa się za wieżę kościelną. Na c wiatrak staje się ponownie widoczny. Jest uderzające, że uczeń tak szybko dostrzega to, co autor chciał przez te zdjęcia ukazać. Jestem przekonany, że jest w tym coś więcej niż pozytywna postawa ze strony uczniów. Musiała wpłynąć na to wcześniejsza rozmowa. W dyskusji widoczne się staje, że uczeń może porządkować zdjęcia posługując się kryterium: "widzisz to przed tamtym". Okazało się, że ustalona za pierwszym razem kolejność zdjęć nie jest właściwa i w dyskusji podniesiono ważne argumenty. Nie byłoby dobrze, gdyby odkryty za pierwszym razem porządek był poprawny.

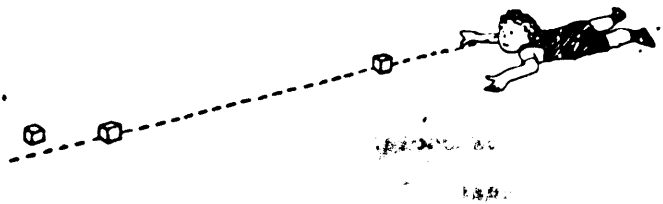
Nauczyciel pozwala klasie pracować nad pytaniem o kolejność zdjęć, przy czym stawia stymulujące pytania:
"Jak sądzisz, które zdjęcie kapitan wykonał jako pierwsze; to czy tamto?", "Dlaczego tak myślisz?", "Gdzie teraz jest wiatrak?"

Wykorzystano porządek na prostej:

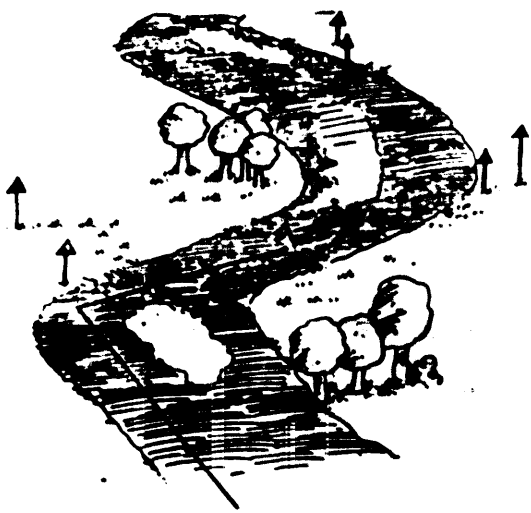
$$\dot{a} \quad \dot{f} \quad \dot{b},$$

co oznacza, że a jest przed f i b albo z drugiej strony b jest przed f i a.

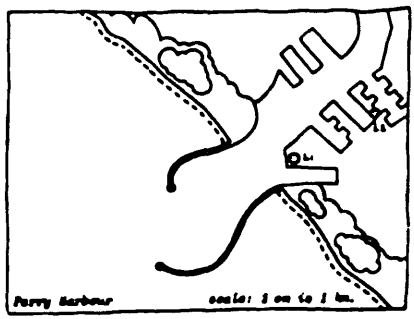
Na nieco wyższym poziomie (11-13 lat) nadają się następujące przykłady dotyczące linii prostych.
Bardzo proste zadanie: "Jak możesz umieścić trzy sześciany na linii prostej" ilustruje się następująco:



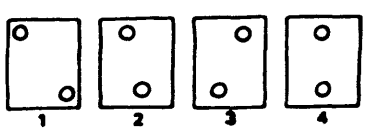
"Życiowe zastosowanie współliniowości".



Statek płynie rzeką wśród wielu płytkich mielizn. Dla ułatwienia nawigacji ustawiono na brzegu szereg znaków. Płynąć należy wzdłuż linii prostych wskazanych przez pary znaków. W momencie, gdy kolejna para znaków "staje się kolinearna" ze statkiem, następuje zmiana kursu. Ten sam pomysł wykorzystuje się przy wejściu do przystani.



Widzimy tu mapę przystani. L_1 i L_2 są latarniami. L_1 jest o wiele wyższa od L_2. Holownik Constance z holowaną przez niego barką dobijają do przystani w Perry. Kapitan holownika ustala, że w przeciągu około kwadransa wejdą do portu. Starannie obserwuje latarnie przystani, szczególnie L_1 i L_2. W ciągu ostatnich minut widzi je, jak na rysunkach poniżej,



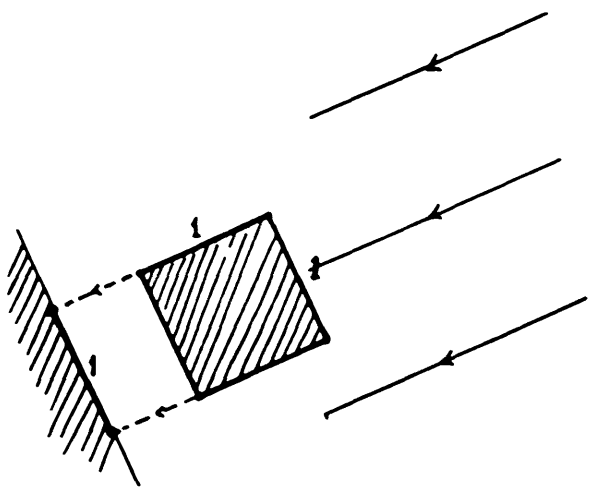
Zadanie: "Narysować trasę ostatnich kilku mil na arkuszu papieru". W dyskusji okazuje się, że dzieci potrafią zrozumieć zasadę. Kilkoro z nich potrafi się ustawić w odpowiedniej pozycji na morzu i mogą przetłumaczyć informację horyzontalną (prosta L_1L_2) na wertykalną oraz wyciągnąć poprawne wnioski.

Fakt, że światło słoneczne rozchodzi się prostoliniowo

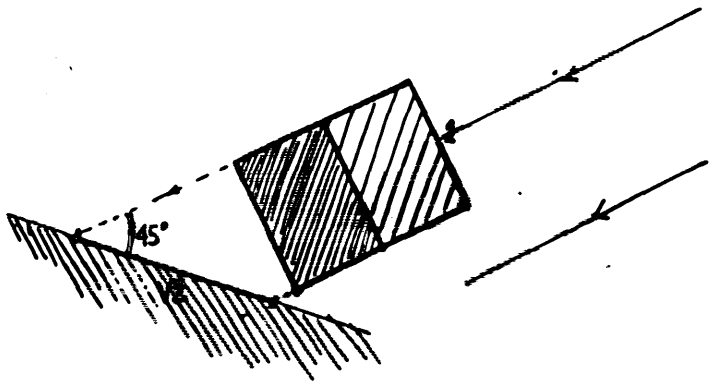
jest dla wielu uczniów zaskakujący. Proste doświadczenie otwiera im w tym względzie oczy. Przyklejamy mały kawałek papieru na oknie. Staramy się ustawić jego cień gdzieś między oknem a podłogą i obserwujemy cień podczas przesuwania się w dół do podłogi. W ogóle nie jest to takie łatwe.

Inne, nie tak proste, zadanie jest następujące: mam sześcian; czy można otrzymać jako jego cień kwadrat albo pięciokąt, albo sześciokąt?

Na podstawie doświadczeń po uwzględnieniu symetrii stało się jasne dla dzieci, że nie można utworzyć pięciokąta jako cienia sześcianu. Sześciokąt i kwadrat nie stanowią problemu, jednakże pojawiło się pewne zaskoczenie: pokazujący doświadczenie oczekiwał, że kwadrat jako rozwiązanie pojawi się w takiej sytuacji:

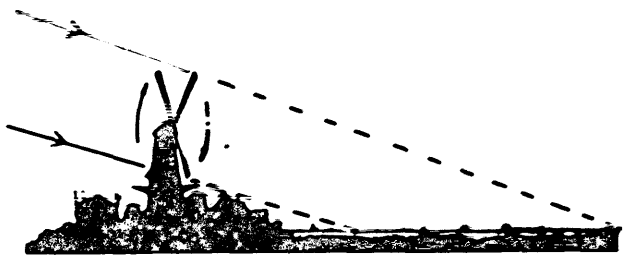


że sześcian o wymiarach $1 \times 1 \times 1$ da cień w postaci kwadratu, o wymiarach 1×1. Ale dzieci doszły do większego kwadratowego cienia:



otrzymały kwadrat o boku $\sqrt{2}$!

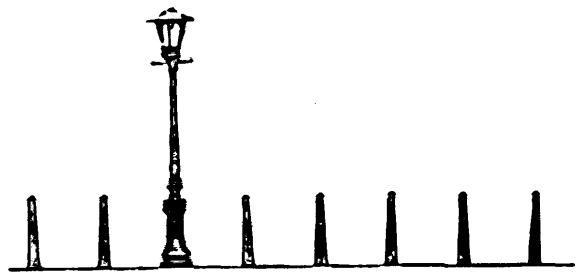
Cienie stwarzają oczywiście dużo więcej możliwości. Rozważymy teraz jeszcze dwie:

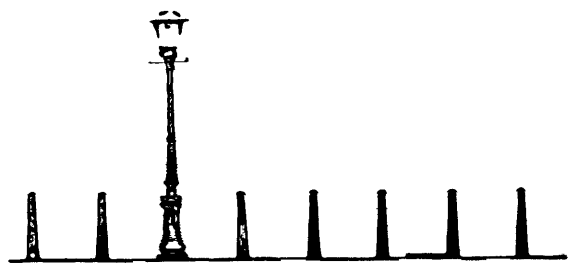


Obracający się wiatrak należy do duńskiego krajobrazu. Końce skrzydeł opisują okrąg? A jaki jest cień okręgu? A jak można skonstruować cienie skrzydeł w tej elipsie?

Ostatni przykład z cieniem:

Dane są dwa obrazki:



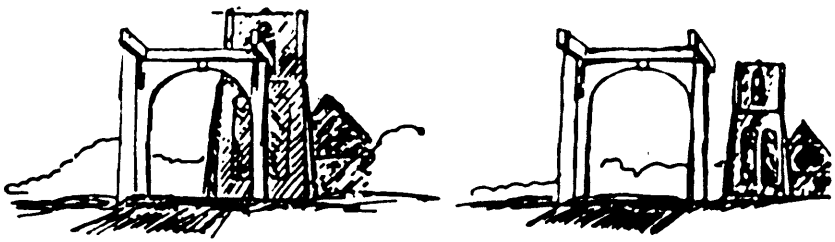


Zadanie: "Narysować cienie, gdy świeci słońce".

"Jak widzisz przedmioty i dlaczego" - oto pole aktywności

geometrycznych, stwarzające szeroki wachlarz możliwości.

Dla przykładu mamy dwa obrazki:



Zadanie: "Czy wieża jest wyższa niż most czy nie? Uzasadnij swoją odpowiedź!".

Bez właściwego przygotowania jest to problem bardzo trudny. Każdy zna to zjawisko, ale bardzo niewielu ludzi uświadamia sobie, co je naprawdę powoduje. Pokazujący rysunek spodziewał się, że widok boczny powinien pojawić się mniej lub bardziej spontanicznie,

gdy tymczasem nie miało to miejsca.

Z chwilą gdy widok z boku został zasugerowany, uczniowie byli w stanie wypowiedzieć wiele sensownych myśli. Jednakże te problemy prezentowane dzieciom 12-13 letnim nadal stwarzają wiele trudności. Jest to piękny przykład codziennego zjawiska, którego, jak się wydaje, nikt nie jest w stanie wyjaśnić.

Wszystkie poprzednie przykłady mają charakter "dynamiczny". Ale oczywiście są i przykłady bardziej "statyczne". Jeden z najbardziej owocnych wkracza w świat form i kształtów, gdy dzieci dysponują elastycznymi materiałami, takimi jak pudełka, puszki itd. Pytanie pojawiające się mniej lub bardziej naturalnie brzmi: "jak poklasyfikować ten materiał"?

Jest oczywiście wiele możliwości:

- można zwrócić uwagę na zawartość,
- można zwrócić uwagę na objętość (czym jest objętość?),
- można zwrócić uwagę na to, "czy są krawędzie czy ich nie ma",
- można zwrócić uwagę na rodzaj materiału (papier, metal, tworzywa sztuczne),
- można zwrócić uwagę na kształt.

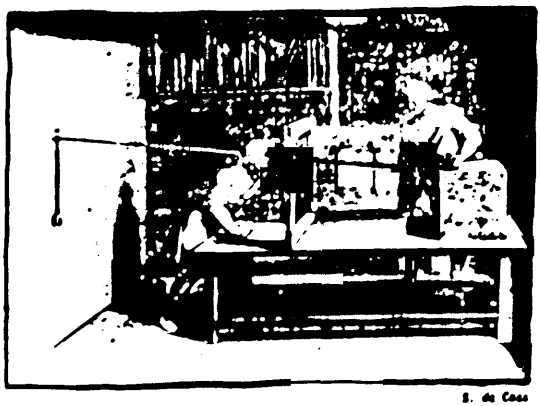
W dyskusji ostatnią możliwość można rozwinąć na podstawie form: sześciany, walce, ostrosłupy, graniastosłupy.

Są tu możliwe i inne aktywności, jak np.:

- jak skonstruować pudełko?
- jak narysować pudełko, walec, ostrosłup możliwie realnie?

Ostatnie pytanie stwarza okazję wejścia w dziedzinę rysowania w perspektywie. Można to zrobić we wczesnym etapie (około 13, 14 lat), jeśli obierze się taką drogę jak S. de Caes kilka stuleci temu (odkrycie A. Dürera).

Spójrzmy na obrazek



S. de Caes

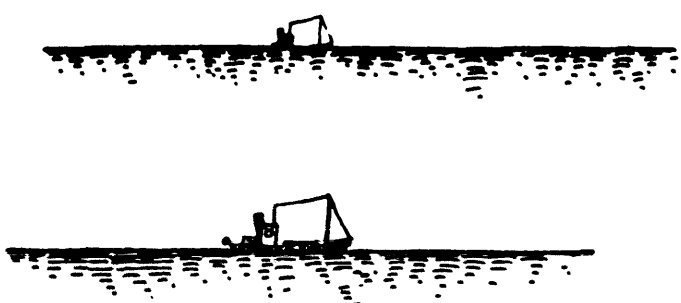
Dwaj mężczyźni próbują wykonać rysunek sześcianu. Rysunek jest na "drzwiach". Mężczyzna po prawej stronie trzyma sznurek w punkcie A sześcianu, natomiast mężczyzna z lewej strony pokazuje, gdzie punkt A powinien być na rysunku. Zrobiono to - z olbrzymim powodzeniem - w klasie.

Dotychczas zajmowaliśmy się wstępnymi aktywnościami geometrycznymi. Żeby nie było nieporozumień: nie jest to propozycja programu. W takim programie geometrii dla wszystkich powinno oczywiście znaleźć się więcej miejsca dla geometrii "klasycznej". Ale przykłady te ukazują wiele sposobności dla

takiego postępowania. Na tym etapie nie powinno być formalizacji. Jeśli dzieci opuszczają szkołę w wieku 15 lat (a tak jest w wielu krajach), to nie ma żadnej potrzeby formalizacji na tym poziomie. Należy zadowolić się tym, że uczniowie mają pewną "intuicję geometryczną", jaką okazały dzieci w następującym problemie.

Pytanie: "Skąd wiecie, że ziemia jest kulą?"

Odpowiedź: Bo gdy jesteś na plaży i okręt zbliża się do zatoki, to najpierw widzisz jego górną część, a dopiero później cały okręt".



Odpowiedź ta może nie jest w pełni poprawna, ale następna jest całkowicie "unaukowiona".

"Gdy patrzysz na zdjęcie ziemi z satelity, to widzisz koło".

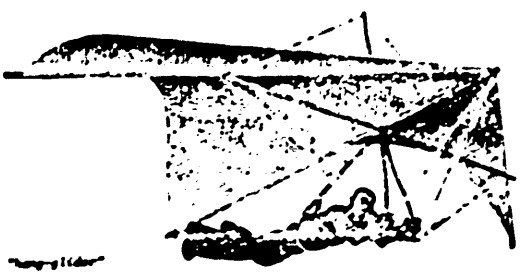
Nauczyciel: "Ale ona może być płaskim plackiem?"

"Nie, ponieważ podczas lotu satelity zdjęcie ziemi jest

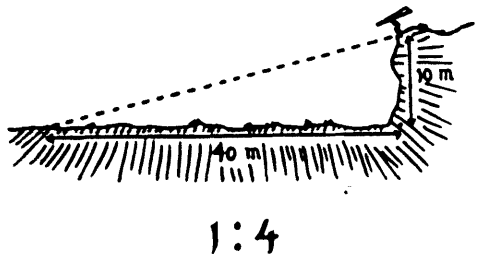
zawsze kołem".

Jeśli chcemy kontynuować tę geometrię dla wszystkich na nieco wyższym poziomie, to muszą pojawić się pewne problemy w dochodzeniu do poziomu bardziej formalnego. Będzie to łatwe, jeśli startować będziemy znowu od świata rzeczywistego. Jest to prawie zawsze możliwe. Stosunkowo owocnym przykładem takiego postępowania jest wprowadzenie trygonometrii i wektorów, tak jak w książce "Latanie".

Autor zaczyna w niej od nowego coraz bardziej popularnego sportu - lotniarstwa:



Wartość takiej lotni jest mierzona za pomocą "stosunku ślizgu" i "kąta ślizgu".

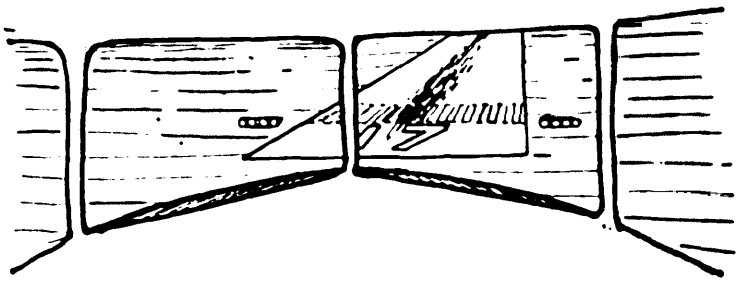


Widać łatwo, jak to bardzo konkretne zastosowanie prowadzi do tangensa, a następnie do cosinusa i sinusa.

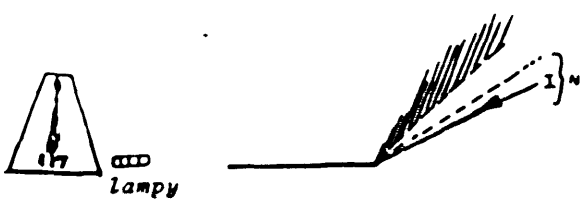
Lotnictwo w ogóle stwarza masę życiowych zastosowań. Nie jest to oczywiście matematyka życia codziennego. Ale z naszego doświadczenia i naszych eksperymentów odnosimy wrażenie, że problemy bardziej lub mniej związane z życiem codziennym winny występować we wczesnym etapie nauczania (do 14 roku), natomiast w programie dalszego nauczania powinny pojawiać się zastosowania związane w ogóle z rzeczywistym życiem.

Bardziej złożonym, ale stymulującym problemem (dla około 16-letniej młodzieży) jest następujący:

Patrząc z kokpitu pilot widzi lotnisko jak na obrazku



Po obu stronach pasa startowego są cztery lampy. Mają one wskazać pilotowi, czy jego kąt - zbliżenia (I) jest poprawny ($2^{\circ}45' - 3^{\circ}15'$). Jeśli jest za wysoko ($\gtrsim 3^{\circ}15'$), to widzi on cztery białe lampy.



Jeśli jest akurat na drodze lądowania, to widzi dwie lampy białe i dwie czerwone.

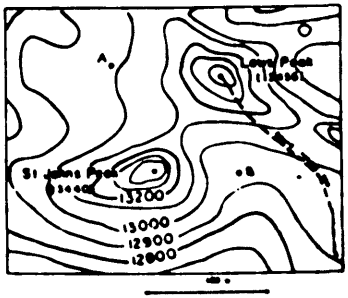
Wreszcie, gdy jest za nisko ($\leqslant 2^{\circ}15'$), widzi tylko lampy czerwone.

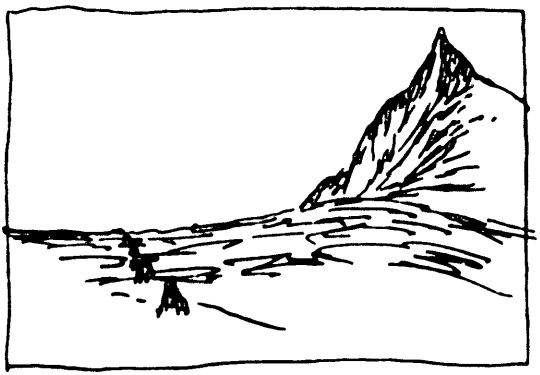
Stawiać teraz można pytania wszelkiego rodzaju.

Dla przykładu: Pilot jest w odległości 1 km od punktu lądowania i widzi tylko czerwone światła. Na jakiej wysokości leci?

Jeśli kontynuuje lot horyzontalnie, to jak długo będzie leciał nim osiągnie poprawną drogę lądowania? (szybkość: 250 km/h).

Zupełnie inny rodzaj geometrii - stwarzający olbrzymie możliwości odnośnie do geometrii dla wszystkich - stanowią poziomice i funkcje dwu zmiennych. Zacząć można od mapy pewnego obszaru (najlepiej prawdziwej mapy prawdziwego obszaru) i pokazać fotografię czegoś z tego obszaru.





Gunung Kinabalu, Sabah, Nrth Borneo.

Można stawiać rozmaite pytania:

- Szlak zaznaczony na fotografii prowadzi na szczyt Lowa. Skąd wykonano zdjęcie?

- Jak przebiega możliwie najbardziej stromy szlak na ten szczyt?

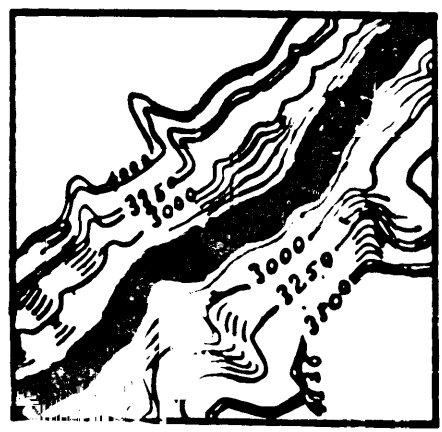
- Narysuj przekrój od A do B.

- Czy na tym obszarze jest jakiś punkt siodłowy?

- Jak wskazać mniej stromy szlak na szczyt?

Te pytania nie wymagają wiele ponad odrobinę wyobraźni, ale mogą stanowić punkt wyjścia dla interesującej gruntownej geometrii. Można by również zapytać tak: czy potrafisz narysować trójwymiarowy szkic (rysunek) terenu, dla którego dysponujesz porządną mapą z poziomicami.

Klasycznym niemal przykładem w Holandii jest "Wielki Kanion". Klasycznym w tym sensie, że do 1978 roku był w programie szkolnym i tysiące, tysiące uczniów (ok. 16-letnich) zajmowało się nim. Książka zaczyna się od fotografii Wielkiego Kanionu. Następnie umieszczona jest mapa obszaru przedstawionego na fotografii. Początkowe pytania są mniej więcej takie, jak odnośnie do rejonu Kinabalu. Ale książka kontynuuje zagadnienie: pierwsza część mapy zostaje powiększona:



Następują pytania:

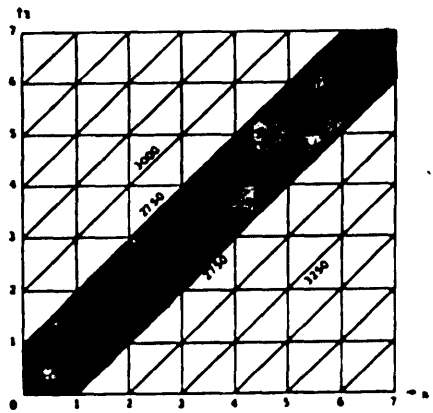
- W jakiej skali jest ta mapa w porównaniu do oryginalnej?

- Który punkt na mapie jest najwyższy?

- Co wnioskujesz z faktu, że poziomice 3500 i 4000 są tak blisko obok siebie?

Następny krok może wydać się chaotyczny: wykonujemy mate-

matyczny model mapy. Oczywiście pewne informacje gubimy po drodze. Kanion zostaje jakby "ostrugany" - pochyłość jest wszędzie taka sama.

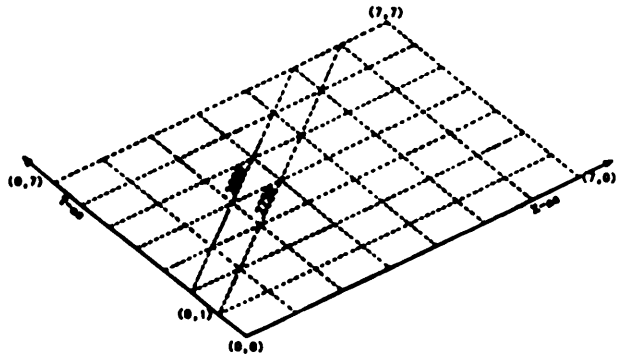


Kolejne pytania:

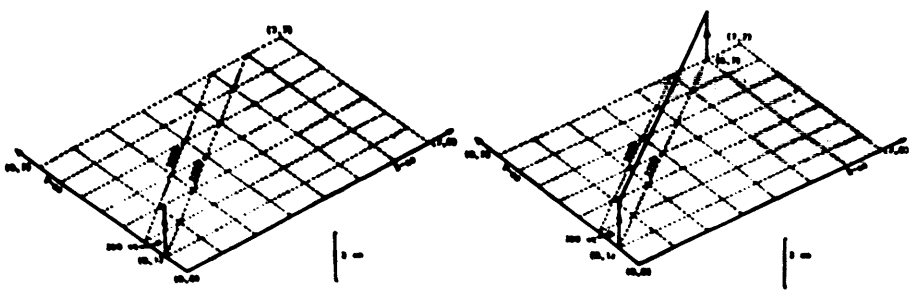
- Co się stało z poziomicami?
- Jakie zalety, a jakie wady ma taki model?
- Podpisz właściwą wysokość przy każdej z poziomic.
- Oszacuj głębokość rzeki.
- Który punkt jest najwyższy?
- Ile wynosi wysokość punktu p (4,2)?
- Co można stwierdzić o punktach h (a,b) oraz h (b,a)?

Następnie przy użyciu tej mapy konstruujemy rysunek trójwymiarowy w następujący sposób:

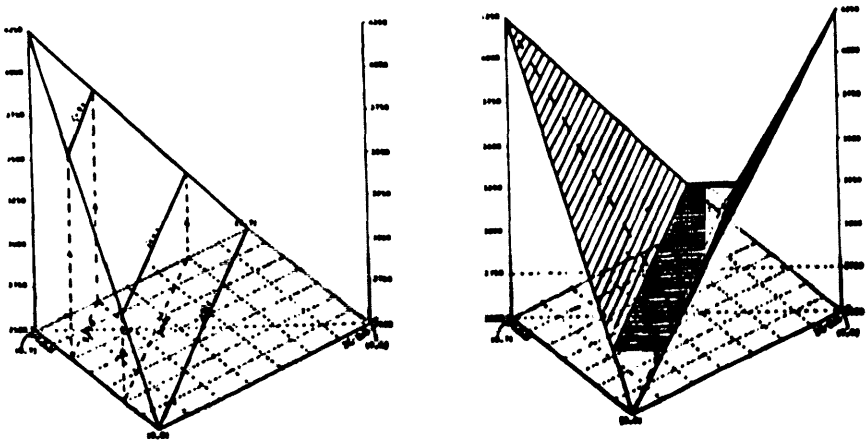
Najpierw mapę rysujemy trójwymiarowo



Następnie "podnosimy" poziomice

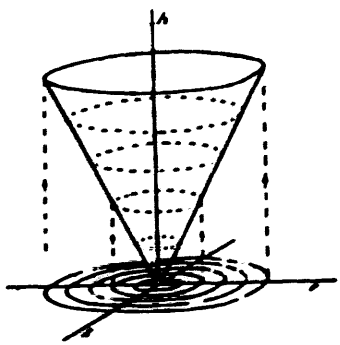


Wreszcie otrzymujemy rysunek modelu



Porównujemy go następnie z oryginalną fotografią. Aktywności występujące podczas wykonywanej konstrukcji są raczej złożone. Ale ten wysiłek wydaje się cenny, bo daje uczniom ważne narzędzie budowy 3-wymiarowych ilustracji z mapy z poziomicami.

Poniższy stożek nie stanowił dla uczniów problemu



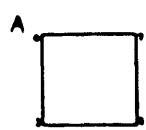
Nie ma potrzeby wyjaśniać, że poziomice stwarzają wiele dalszych możliwości ich wykorzystania; mapy pogody są też obfitym źródłem pięknych zagadnień.

Pytanie: Wyjaśnij dlaczego w punkcie siodłowym pogoda jest zawsze bardzo spokojna?

Poziomice, i ogólniej, funkcje dwóch zmiennych prowadzić mogą do aktywności typu algebraicznego i analitycznego. Doświadczenia holenderskie wydają się wskazywać, że nawet (odpowiednio dobrane) trójwymiarowe grafy (w programowaniu liniowym) mogą być dobrze opanowane przez mniej matematycznie zaawansowanych uczniów.

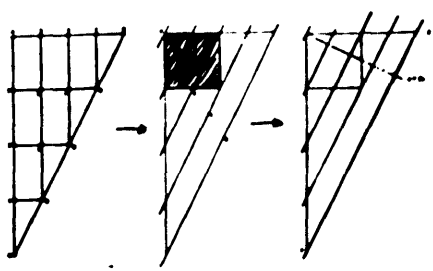
Podam inny problem, który może być rozwiązany przez "wszystkich".

Dane są cztery punkty płaszczyzny przez ich rzuty prostokątne. Dla trzech z nich znamy wysokości. Kładziemy kulkę w punkcie A o wysokości h(A) = 4. Jak kulka toczyć się będzie po płaszczyźnie?

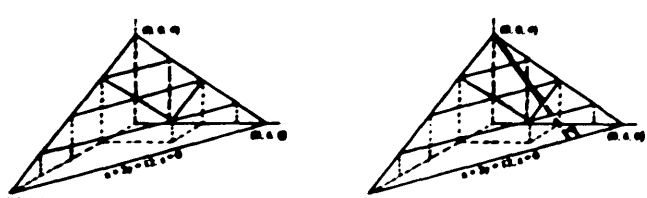


Łatwo można skonstruować mapę z poziomicami w następujący sposób:

Kulka toczyć się będzie po płaszczyźnie prostopadle do poziomic (uczniowie winni wyjaśnić, dlaczego). Otrzymujemy więc

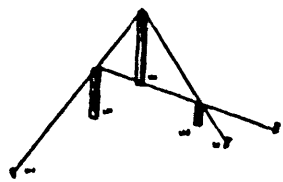


albo w trójwymiarowym wydaniu



Na tym etapie można użyć więcej formalnej algebry, jeśli ktoś uzna to za stosowne. Jeśli jednak myślimy o geometrii dla "wszystkich", można to uznać za mniej więcej szczytowy poziom (17-18 letni uczniowie).

Oczywiście możliwe są i inne problemy. Jednym z najprostszych wydaje się następujący:



Pytania:

- Dlaczego trzy kołki znajdują się na jednej prostej?

Jeśli wszystkie tyczki zostaną skrócone o jeden cal, to gdzie znajdą się kołki?

Zamierzam zakończyć na tym listę przykładów. Można je wszystkie znaleźć w publikacjach IOWO oraz Grupy Badawczej OW i OC. Większość z nich była wypróbowana w małej skali, niekiedy w skali dużej i to z zachęcającymi rezultatami. Można je traktować jako słupy milowe na drodze wypracowania programu geometrii dla wszystkich. Te słupy milowe niekoniecznie wyznaczają drogę prostoliniową. Między tymi słupami powinno pojawić się nieco więcej geometrii w bardziej konwencjonal-

nym rozumieniu. Ale wątpię, czy podejście radzieckie (Pogoriełow)[x] do geometrii dla wszystkich, które jest w istocie ściśle aksjomatyczne, stanowi odpowiedź na nasz problem. Wiem jednak, że radzieckie oficjalne czynniki oświatowe poparły ten nowy kurs i, że drukuje się tam 3 miliony podręczników. Myślę, że jest nawet możliwe narzucenie takiego rodzaju matematyki uczniom w wieku 12-13 lat. Ale według mej opinii nie jest to odpowiednie podejście. Geometria dla wszystkich musi mieć poważną komponentę trójwymiarową i to poczynając od szkoły podstawowej, kontynuowaną do końca szkoły średniej.

Jeśli matematyka jest nieodzowna dla każdego - a myślę, że będzie to wbrew pewnym trendom - to geometria powinna mieć w niej swoje miejsce.

Ostatnie przykłady, to ćwiczenia raczej zaawansowane, które można z powodzeniem rozwiązywać z uczniami słabszymi w matematyce.

Są ludzie, którzy nie akceptują tego rodzaju geometrii. "To nie jest w ogóle geometria" - oto reakcja, jaką się niekiedy spotyka. Tym samym według ich definicji geometria dla wszystkich nie jest w ogóle geometrią.

Inna reakcja sprowadza się do stwierdzenia: "powinniśmy

---

[x] Zob. A.W. Pogoriełow: O nauczaniu geometrii, Matematyka nr 1. 1984 r. (przyp. tłumacza).

być bardzo ostrożni; by nie wykonać za dużego wahnięcia w drugą stronę".

Z tym sformułowaniem wszyscy się godzimy. Ale ci, którzy tak mówią, powinni być świadomi, że uprawiają bardzo ubogą matematyzację, porównując kształcenie geometryczne z wahadłem.

Jestem przekonany, że powinna istnieć matematyka dla wszystkich (doświadczenia holenderskie wydają się wskazywać, że istnieje możliwość skonstruowania takiego programu).

Taka matematyka dla wszystkich jest oczywiście czymś znacznie odmiennym od "całej matematyki, której wam trzeba".

I nie ma matematyki dla wszystkich bez poważnej, nieizolowanej komponenty geometrycznej.

W tym odczycie chciałem ukazać Państwu ideę aktywności geometrycznych, które koniecznie winny być uwzględnione w takim programie.

LITERATURA

FREUDENTHAL, H., Geometry between the Devil and the Deep-Sea. Educational Studies in Mathematics, Volume 3, Nr 3/4, czerwiec 1971.

DIENES, Z.P., An example of the passage from the concrete to the manipulation of formal systems, ibidem.

ENGEL, C.A., Geometrical activities for the upper elementary school, ibidem.

I.O.W.O. - team, Five years IOWO, Educational Studies in Mathematics, Volume 7, Nr 3, sierpień 1976.

FREUDENTHAL, H., Geometrie in der Grundschule, Fragen des Geometrieunterrichts, IDM - Band 1, Aulis Verlag Deubner, Koln 1981.

SCHOEMAKER, G.A. Goddijn, J. de Lange, M. Kindt, Neuer Geometrie - Unterricht auf der Sekundarstufe, ibidem.

BISHOP, A.. Towards relevance in the teaching of geometry, International Colloquium on Geometry Teaching, Université de l' Etat à Mons 1982.

LANGE, J. de, Renewed interest in geometry in the Netherlands, ibidem.

GODDIJN, A., Shadow and Depth, IOWO/OW & OC, Utrecht 1983,

SCHOEMAKER, G., Zie je wel, IOWO/OW & OC, Utrecht 1979.

SWEERS, W., Verpakkingen, IOWO/OW & OC, Utrecht 1978.

LANGE, J. de, Vlieg er eens in, IOWO/OW & OC, Utrecht 1979

LANGE, J. de, Functies van 2 variabelen, IOWO/OW & OC, Utrecht 1978/1983.

KINDT, M.J. de LANGE, Lessen in ruimetemeetkunde, OW & OC, Utrecht 1982/83.

(Z języka angielskiego tłumaczył S. Serafin)

GEOMETRY FOR ALL OR NO GEOMETRY AT ALL?

Summary

Mathematics for all is certainly not all the mathematics you may need. But there is no mathematics for all without a strong component of geometry. It should be taught in the order in which it can be invented by the student, which means starting it with experimentation, not with axioms and deduction.

Several activities in 3-dimensional geometry proposed to children of different ages are presented in the article.