ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 3 (1984)

Anna Olecka
Warszawa

Pewna koncepcja strukturalizacji nauczania początków rachunku prawdopodobieństwa

WSTĘP

Celem tego artykułu jest przedstawienie pewnego sposobu konstruowania programów nauczania rachunku prawdopodobieństwa.

Za szkielet budowanego systemu posłużyła mi koncepcja Zoltana Dienesa (1971) kształtowania struktur matematycznych w sześciu kolejnych etapach. Opierając się na tej koncepcji pragnę pokazać, jak można organizować proces dydaktyczny tak, by poszczególne pojęcia probabilistyczne kształtować przechodząc stopniowo na coraz wyższy szczebel abstrakcji. Zamierzeniem moim jest, by sformalizowana teoria dedukcyjna pojawiła się jako ukoronowanie procesu nauczania, nie zaś jako jego początek.

Ustalając psychologiczne podstawy tej pracy opierałam się głównie na książce E. Fischbeina (1975), w której przytoczone zostały najważniejsze badania i eksperymenty wielu psychologów (m. in. Piageta i Fischbeina), dotyczące problemów rozwoju myślenia probabilistycznego u dzieci. W szczególności uwzględniłam te wyniki badań, które wskazują na istnienie pierwotnych intuicji pojęcia prawdopodobieństwa (u dzieci nigdy nie uczonych probabilistyki) oraz na istnienie "intuicyjnej przepaści" w momencie przejścia od wyznaczania prawdopodobieństw prostych zdarzeń do prawdopodobieństw zdarzeń złożonych (np. sumy).

Powyższe ustalenia oraz krytyczna analiza znanych mi koncepcji nauczania rachunku prawdopodobieństwa posłużyły za punkt wyjścia do opracowania koncepcji dydaktycznej, która następnie została poddana wstępnym badaniom szkolnym. Próby nauczania według tej koncepcji prowadzone były w klasach III i IV liceum oraz w klasach IV-VII szkoły podstawowej.

Badania szkolne nie miały na celu globalnej weryfikacji przyjętej koncepcji (wymagałoby to eksperymentów na dużo większą skalę). Celem ich było tylko wstępne sprawdzenie ich realności. Jednocześnie zaś analiza wyników pracy z dziećmi pozwoliła wprowadzić pewne modyfikacje w pierwotnej wersji.

Jeśli uzwględnić różnicę wieku i związane z tym różnice w możliwościach uczniów, to wszystkie próby szkolne dostarczyły podobnych obserwacji, potwierdzających hipotezę, że koncepcja ta jest wykonalna, a nauczanie na niej oparte jest skuteczne i bardzo efektywne. (Uczniowie klasy VII, po rocznym kursie rozwiązywali z powodzeniem zadania maturalne).

§ 1. KONCEPCJA DIENESA SZEŚCIU ETAPÓW PRZEJŚCIA OD OPERACJI KONKRETNYCH DO POJĘĆ MATEMATYCZNYCH

Wybitny dydaktyk matematyki Zoltan Dienes (1971), przedstawił swoją koncepcję procesu kształtowania się abstrakcyjnych pojęć i stopniowej ich matematyzacji w umyśle ucznia. Opisywany przez Dienesa proces charakteryzuje się sześcioma etapami, które można opisać następująco:

I. Ćwiczenia wprowadzające (swobodna zabawa danym materiałem ukierunkowana na spontaniczne obserwacje dokonywane przez dziecko).

II. Odkrywanie regularności w danych sytuacjach oraz zabawy z wykorzystaniem tych regularności i narzuconych ograniczeń

III. Szukanie **izomorfizmów** (porównywanie różnych sytuacji w celu stwierdzenia, które z nich są izomorficzne z punktu widzenia wybranych prawidłowości, ukierunkowanych na późniejsze wyabstrahowanie pojęć będących celem nauczania).

IV. Ustalenie wspólnej reprezentacji (najczęściej graficznej) sytuacji izomorficznych.

V. Badanie wspólnej reprezentacji (opisywanie jej własności, będących zarazem własnościami wszystkich reprezentowanych sytuacji izomorficznych). Etap ten może być zwany "etapem symbolizacji", gdyż własności reprezentacji opisywame są na ogół za pomocą wprowadzonych w tym celu symboli.

VI. Etap formalizacji. Wyodrębnienie układu aksjomatów i dowodzenie pozostałych własności.

Dienes pokazał swoją koncepcję na kilku przykładach (np. grupa izometrii trójkąta, rachunek zdań), można jednak oczekiwać, że jest to droga skuteczna dla bardzo wielu pojęć matematycznych.

G. Brousseau stwierdził, że ze względu na specyfikę rachunku prawdopodobieństwa, opisane przez Dienesa etapy nie dadzą się zastosować w nauczaniu tego przedmiotu, gdyż nie opisują w sposób adekwatny tego procesu, (Brousseau i Brand, 1977). Jeżeli próbować zamknąć w dienesowskie etapy szkolny rachunek prawdopodobieństwa jako pewną całość - to istotnie musimy zgodzić się z Brousseau: zbyt wiele tu nachodzących na siebie pojęć. Jedne zazębiają się, inne są niezależne; niektóre są już mocno zaawansowane, gdy inne dopiero się pojawiają. Poszczególne fazy rozwoju tego samego pojęcia mogą być bardzo odległe w czasie. Proces nauczania rachunku prawdopodobieństwa jest zbyt skomplikowany, by jakiś jego uproszczony model dał się uporządkować liniowo w sześć czy więcej etapów.

Sądzę jednak, i uzasadnię to poniżej, że opisywany przez Dienesa proces dydaktyczny odnosi się do poszczególnych pojęć, nie zaś do całych działów matematyki. Jest to studium kształtowania poszczególnych pojęć, wyodrębnionych dla jasności opisu ze swoich związków z innymi pojęciami.

Aby opisać proces nauczania jakiejś dziedziny matematyki, nie wystarczy - rzecz jasna - ograniczyć się do pojedynczych, izolowanych pojęć. Jednak taki opis procesu kształtowania najważniejszych pojęć może być dobrym punktem wyjścia konstrukcji dydaktycznego modelu całej dziedziny.

W § 2-7 przedstawię propozycję kształtowania kilku podstawowych pojęć rachunku prawdopodobieństwa tak, aby proces dydaktyczny był oparty na 6 etapach Dienesa.

W każdym przypadku podaję opis rozwoju poszczególnych etapów kształtowania danego pojęcia aż do etapu V włącznie. Etap VI - formalizacja - polega na budowie elementarnej teorii prawdopodobieństwa w ujęciu aksjomatycznym (dla przestrzeni skończonych, przeliczanych lub dowolnych). Etap ten mógłby być ukoronowaniem etapów I-V dla każdego z omawianych tu pojęć z osobna, bardziej celowe wydaje się jednak stopniowe doprowadzenie w kolejnych klasach (szkoły podstawowej i średniej ogólnokształcącej) jedynie do etapu V, a następnie na studiach wyższych (lub np. w klasie maturalnej) przerobienie kursu rachunku prawdopodobieństwa jeszcze raz, tym razem jako etapu VI wspólnego dla wszystkich pojęć.

Opis etapów I-V w tej pracy jest z konieczności uproszczony, niekiedy nawet szkicowy, nie jest to bowiem jeszcze dokładny przepis postępowania dla nauczyciela, lecz próba uchwycenia kolejnych przejść na coraz wyższy poziom abstrakcji.

Kolejno omawiane będą pojęcia: przestrzeni probabilistycznej, doświadczeń wielostopniowych, wartości oczekiwanej, błądzeń losowych oraz prawdopodobieństwa warunkowego i niezależności.

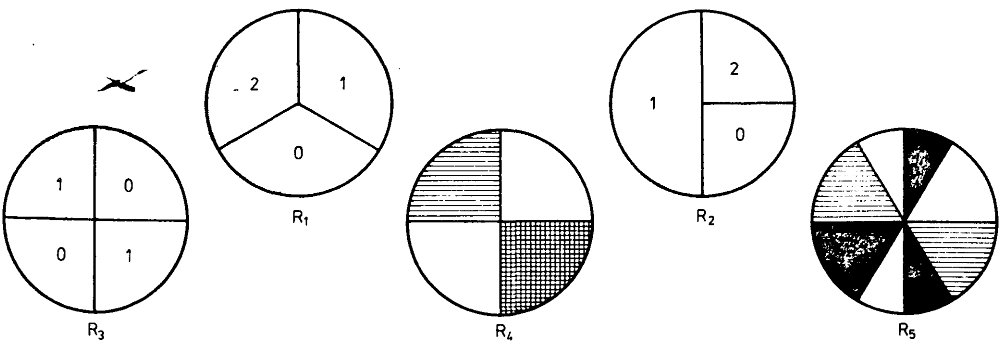
W § 7 przedstawiona zostanie próba konstrukcji całego systemu nauczania rachunku prawdopodobieństwa opartego na omówionych wcześniej szkieletach pojęć podstawowych. System ten może być podstawą tworzenia różnych programów nauczania.

§ 2. POJĘCIE PRZESTRZENI PROBABILISTYCZNEJ SKOŃCZONEJ

Etap I. Ćwiczenia wprowadzające

Ćwiczenia te obejmują różne doświadczenia losowe z użyciem wielu przyrządów do losowania. Przykłady przyrządów:

- Kostka $K[1,2,3,4,5,6] = K_1$, kostka $K[1,1,0,0,2,2] = K_2$, kostka $K[0,0,0,1,1,2] = K_3$ (symbol $K[s_1,s_2,\ldots,s_6]$ oznacza kostkę sześcienną, której ścianki oznaczone są liczbami $s_1,s_2,\ldots,s_6$);
- ruletki (rys. 2.1);



Rys. 2.1

- dwie monety;
- pudełko zapałek;
- kulki w butelce.

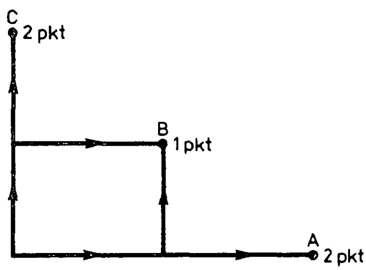
Dla zwiększenia motywacji ucznia można wykonywane doświadczenia przekazać w formie gier. Gry powinny jednak mieć bardzo proste zasady i strukturę ukierunkowaną na możliwość bezpośredniego wyabstrahowania danej przestrzeni probabilistycznej.

Przykłady gier:

a) Gra "Wyścig I". Trzej gracze A, B i C ustawiają każdy po jednym pionku na planszy "Chińczyka". O tym, kto wykonuje ruch w danej kolejce, decyduje rzut kostką, na której ścianach zaznaczono tylko cyfry 0,1,2 (np. K_2 lub K_3), według następujących zasad: 0 - ruch A, 1 - ruch B, 2 - ruch C. Wygrywa ten, kto pierwszy osiągnie metę.

b) Gra "Wyścig II". Każdy z grających rzuca kostką K_3 dla siebie, ale przed wykonaniem rzutu "obstawia" wynik. Jeżeli wypadł wynik obstawiony - gracz przesuwa swój pionek.

c) "Labirynt". Błądzenie losowe po labiryncie (rys. 2.2). Losowanie odbywa się np. przez rzut monetą: orzeł - ruch w prawo $\longrightarrow$, reszka - ruch w górę $\uparrow$.



Rys. 2.2

Gdy pionek dojdzie do punktu A, gracz A dostaje 2 punkty; gdy dojdzie do punktu B, gracz B dostaje 1 punkt itd.

Omawiając grę zastanawiamy się, czy wszyscy gracze mają taką samą szansę wygranej. Rozważamy warianty z użyciem różnych przyrządów do losowania: które z nich są sprawiedliwe, a które nie ?

Etap II. Odkrywanie regularności

Zasadniczym celem tego etapu będzie obserwowanie zgodności między częstościami wyników w długich seriach doświadczeń a rozkładem szans ich zajścia wyznaczonym a priori i zastosowanie tej obserwacji do wyboru optymalnej strategii w grach.

Konieczne tu będą dwa rodzaje aktywności dzieci: z jednej strony wykonywanie doświadczeń, opracowywanie otrzymanych wyników (tabelki, diagramy statystyczne) i obliczanie względnych częstości wyników. Z drugiej strony - analizowanie teoretycznych rozkładów szans ocenianych intuicyjnie na podstawie symetrii sytuacji.

Jak wynika z badań Fischbeina (1975), w prostych przypadkach, gdzie symetrie lub proporcje wszystkich możliwych wyników są łatwo widoczne (np. urna z kulkami), dzieci - po zapoznaniu się z wzorcowymi przykładami - potrafią opisać szanse wyników za pomocą ułamków, opierając się na intuicji.

W przypadkach bardziej skomplikowanych (np. dwie ruletki) trzeba będzie ukryte proporcje odszukać (np. za pomocą tabelki). Pomocnym środkiem poglądowym będzie tu także diagram kwadratowy.

Na poniższych rysunkach przedstawiono przykłady podziału kwadratu jednostkowego dla następujących doświadczeń losowych.

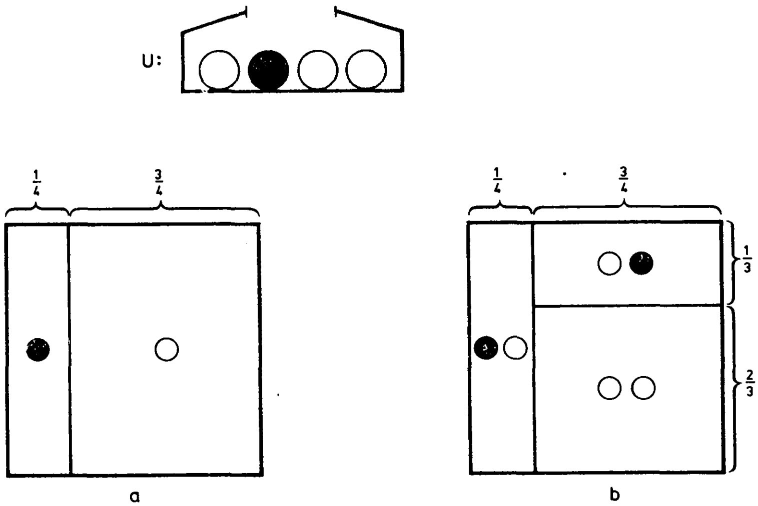
a) Losowanie jednej kuli z urny U i obserwacja jej koloru.

b) Dwukrotne losowanie kuli z urny U (bez zwracania) i obserwacje ich kolorów (rys. 2.3).

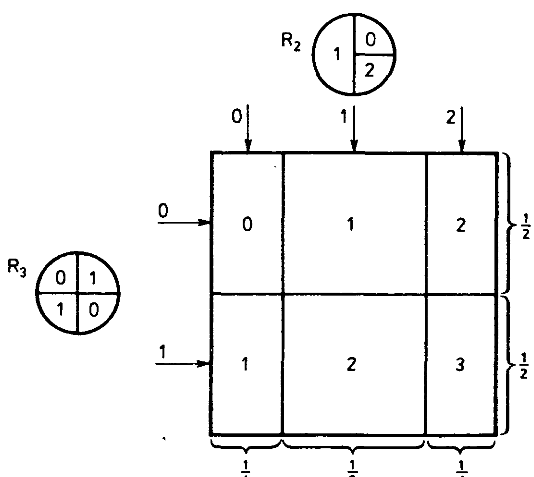
c) Zakręcenie kolejne ruletek R_2 i R_3 i obserwacja sumy punktów na obu ruletkach (rys. 2.4)

Uczniowie będą sporządzać diagramy teoretyczne dla badanych doświadczeń i porównywać je z diagramami statystycznymi otrzymanymi z wielu doświadczeń (np. zsumowane wyniki całej klasy).

Przykładem tego typu podejścia może być analiza wariantu gry "Wyścig I", (str. 90) ze zmianą sposobu losowania na dwu-



Rys. 2.3



Rys. 2.4

krotny rzut monetą: dwa razy orzeł - ruch dla A; dwa razy reszka - ruch dla C; orzeł, reszka - ruch dla B. Dziesięć trójek rozegrało grę dwukrotnie i za każdym razem wygrywał B. Uczniowie zgadzają się, że B ma większe szanse wygranej niż A i C. Natomiast większość z nich nie jest pewna, czy A i C mają równe szanse. Aby to zbadać, wykonują następujące doświadczenie:
Na osi narysowanej u dołu kartonu zaznaczają trzy możliwe wyniki: 0, 1 i 2. Po każdym rzucie przyklejają cegiełkę (pasek kolorowego papieru) nad odpowiednim wynikiem. Następnie liczą względne częstości wyników. Na tablicy sumuje się wyniki wszystkich zespołów i sporządza diagram procentowy. Diagram teoretyczny sporządza się korzystając z tabelki

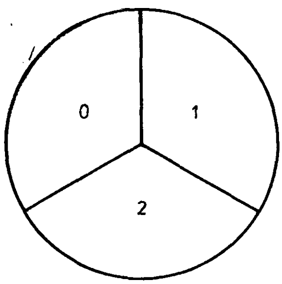
2 \ 1	0	R
0	2	1
R	1	0

Uczniowie mogą też sporządzać diagramy statystyczne na podstawie dostarczonych im danych. Na przykład, przedstawiamy wyniki 600 rzutów kostką i sporządzamy diagram statystyczny. Następnie możemy te same wyniki interpretować jako 300-krotne wykonanie doświadczenia polegającego na dwukrotnym rzucie kostką; obserwujemy sumy oczek i sporządzamy nowy diagram statystyczny. Jeżeli z danych sześciuset wyników każdemu zespołowi przydzielimy np. 100, to ćwiczenie nie będzie czasochłonne. Dla doświadczeń takich jak rzut pudełkiem zapałek (pudełko może upaść na 3 sposoby) teoretycznych zależności znaleźć się nie da (na poziomie elementarnym) i trzeba zadowolić się szacowaniem szans poszczególnych wyników na podstawie danych statystycznych.
Warto dostarczyć więcej przykładów tego typu doświadczeń, np.: obserwacja w ciągu kolejnych dni częstości występowania wybranych marek samochodów wśród wszystkich samochodów przejeżdżających daną ulicą o ustalonej porze, obserwacja długości kolejki w kiosku Ruchu o godz. 15 w ciągu kolejnych dni, itp.

Etap III. Szukanie izomorfizmów

W związku z doświadczeniami losowymi można rozważać dwa poziomy izomorfizmów:

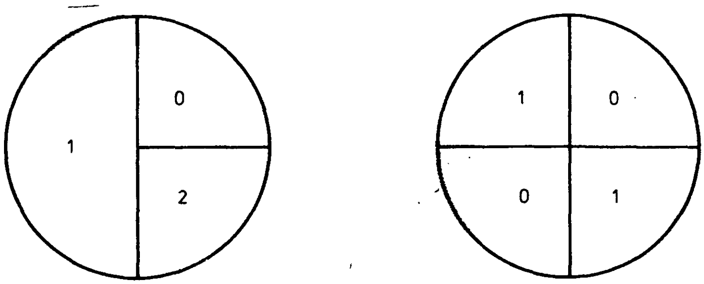
1° Izomorfizm sposobów losowania (tzn. izomorfizm przyrządów z ustalonym, podstawowym sposobem losowania), np. rzut kostką K[1,1,0,0,2,2] jest w tym sensie izomorficzny z zakręceniem ruletki z rysunku 2.5.



Rys. 2.5

2° Izomorfizm przestrzeni probabilistycznych danych doświadczeń: np. doświadczenie polegające na dwukrotnym zakręceniu ruletki R_3 i obserwacji sumy uzyskanych punktów jest izomorficzne z doświadczeniem polegającym na jednokrotnym zakręceniu ruletki R_2 (rys. 2.6).

Oczywiście, doświadczenia izomorficzne w sensie 1° są też izomorficzne w sensie 2°.



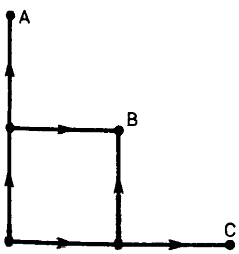
Rys. 2.6

Izomorfizmy pierwszego rodzaju są łatwiejsze do zaobserwowania (choć nie zawsze są one oczywiste). W procesie abstrahowania pojęcia przestrzeni probabilistycznej istotne będą jednak izomorfizmy drugiego rodzaju. W dalszych rozważaniach przez izomorfizm doświadczeń rozumieć będziemy izomorfizm w sensie 2°.

Aby uświadomić uczniom izomorfizm dwóch doświadczeń (oczywiście bez używania terminu), stosować będziemy dwie metody: W jednych sytuacjach będziemy równocześnie wykonywać dwa doświadczenia i porównywać możliwości ich przebiegu, w innych - kryterium izomorficzności otrzymamy przez porównywanie diagramów teoretycznych.

Przykłady ćwiczeń:

a) Pionek przesuwa się po labiryncie L (rys. 2.7) w zależności od wyników rzutu monetą:



0: →

R: ↑

Rys. 2.7

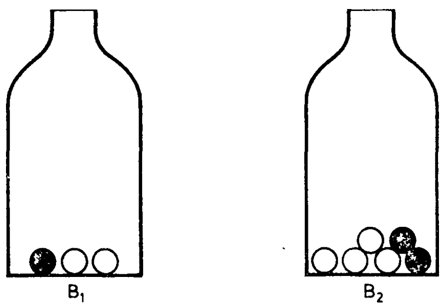
Można rzucać dwukrotnie, wykonując ruch po każdym kroku, można też rzucić dwie monety jednocześnie i od razu odczytać, do którego z punktów A, B, C dojdzie pionek. Jeżeli nie interesuje nas, którą drogą posuwał się pionek, a tylko w którym punkcie znalazł się po wykonaniu doświadczenia, to oba powyższe doświadczenia są izomorficzne.

Z kolei dwukrotne zakręcenie ruletki (0|1) możemy traktować jako sposób wylosowania drogi w labiryncie L(1 →, 0 ↑) izomorficzny z dwukrotnym rzutem monetą.

Można losować jeszcze inaczej: Jeden raz zakręcamy ruletkę 

. Wylosowana liczba wskazuje, ile z dwóch kroków należy wykonać w prawo (pozostałe muszą więc być w górę).

b) Sprawdź, czy doświadczenie polegające na wylosowaniu jednej kuli z butelki B_1 jest izomorficzne z losowaniem jednej kuli z butelki B_2 (rys. 2.8).



Rys. 2.8

Diagramy teoretyczne tych doświadczeń są identyczne, zatem doświadczenia są izomorficzne.

c) Ćwiczenie odwrotne: jak dobrać skład kulek w butelce, aby losowanie jednej kuli z tej butelki było izomorficzne z rzutem dwiema monetami.

d) Wśród ruletek R_1, R_2, R_4, R_5 z rys. 2.1 wskazać dwie pary izomorficzne.

Uczniowie mogą najpierw wykonywać doświadczenia (np. zebrać po 200 wyników dla każdej z ruletek) i sporządzać diagramy procentowe. Na ogół obserwacja diagramów statystycznych daje podstawy do wysunięcia przypuszczenia, które ruletki są izomorficzne; jednak ostatecznym kryterium będzie porównanie diagramów teoretycznych.

e) Czy wylosowanie kostki domina (usuwamy z kompletu kamienie z pustym polem) i obserwowanie sumy punktów na obu połówkach jest izomorficzne z rzutem dwiema kostkami?

W tym przykładzie przestrzenie pozornie izomorficzne (suma oczek w obu przypadkach może być: 2,3,...,12) okazują się nieizomorficzne. Jako kryterium nieizomorficzności wystarcza niezgodność diagramów teoretycznych; jednocześnie jednak kryterium wystarczającym do stwierdzenia braku izomorfizmu może być duża rozbieżność diagramów statystycznych (procentowych) otrzymanych z długich serii doświadczeń.

f) Sporządzić ruletkę, którą można by naśladować obserwacje marek samochodów przejeżdżających daną ulicą o ustalonej porze. Ćwiczenie to można oprzeć na obserwacjach dokonywanych przez uczniów (np. w ciągu miesiąca). Można też dostarczyć uczniom gotowych danych statystycznych.

Uwaga: W ćwiczeniach z uczniami nie musimy używać terminu "izomorfizm". Można mówić np. o możliwościach naśladowania jednego doświadczenia innym.

Etap IV. Wspólna reprezentacja dla doświadczeń izomorficznych

Aby opisać przestrzeń probabilistyczną doświadczenia losowego, trzeba będzie przede wszystkim opisać zbiór wszystkich możliwych wyników, a następnie przyporządkować każdemu wynikowi jego prawdopodobieństwo. Na etapie szukania wspólnej reprezentacji abstrahujemy od różnych szczegółów poszczególnych doświadczeń i rozpatrujemy tylko te ich cechy, które są istotne ze względu na kształtowane pojęcie, czyli - w tym przypadku - przestrzeń probabilistyczną. Dlatego też wygodną reprezentacją doświadczenia będzie tabelka

wynik	w_1	w_2	...	w_n
prawdopodobieństwo	p_1	p_2	...	p_n

Można przy tym dodatkowo zażądać np., by $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$, nie jest to jednak konieczne.

Przykłady:

1) Kostka K[1,1,1,2,2,3]

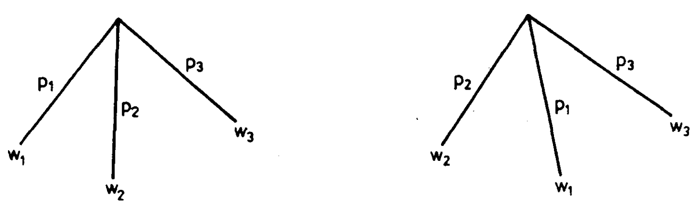
wynik	1	2	3
prawdopodobieństwo	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

2) Kostka K[1,1,2,2,2,3]

wynik	2	1	3
prawdopodobieństwo	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Inną reprezentacją może być diagram kołowy (teoretyczny). Zaletą diagramu kołowego jest fakt, że sumowanie się prawdopodobieństw wszystkich wyników do jedności wynika z samej natury tego diagramu (dzielimy całość na części).

W pewnych zagadnieniach wygodną reprezentacją będą "rozgałęzienia" (rys. 2.9).



Rys. 2.9

Dwa rozgałęzienia uważamy za izomorficzne, jeżeli mają po tyle samo gałęzi i istnieje wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie gałęzi jednego rozgałęzienia gałęziom drugiego rozgałęzienia zachowujące prawdopodobieństwa. Na przykład, rys. 2.9 przedstawia dwa rozgałęzienia izomorficzne.

Jest to przygotowanie do bardziej rozbudowanych drzew przy doświadczeniach wielostopniowych.

Etap V. Badanie własności prawdopodobieństw

Podstawową własnością, którą należy zidentyfikować, jest reguła obliczania prawdopodobieństw zdarzeń losowych. Czasem można je wyznaczyć opisując inaczej zbiór wyników doświadczenia, tak by interesujące nas zdarzenie stało się - w nowej interpretacji - wynikiem (czyli zdarzeniem elementarnym). Na przykład, przy rzucie kostką, jeżeli interesuje nas zdarzenie "wypadła liczba parzysta", można zamiast tabelką

wynik	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

posłużyć się tabelką

wynik	parzysta	nieparzysta
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

W przykładzie tym opisując na nowo przestrzeń - w gruncie rzeczy sumujemy prawdopodobieństwa wyników sprzyjających. Otrzymujemy w ten sposób regułę wyznaczania prawdopodobieństw $p(A)$ zdarzenia losowego A :

Jeżeli zajściu zdarzenia A sprzyjają wyniki $w_1, w_2, \ldots, w_n$ (i tylko te wyniki) o prawdopodobieństwach równych odpowiednio $p_1, p_2, \ldots, p_n$, to

$$p(A) = p_1 + p_2 + \ldots + p_n.$$

W rezultacie etapów IV i V otrzymamy więc regułę wyznaczania prawdopodobieństw w dwóch krokach:

- najpierw należy opisać zbiór wszystkich możliwych wyników i przyporządkować im prawdopodobieństwa,
- następnie znaleźć wszystkie wyniki sprzyjające zajściu zdarzenia A, a ich prawdopodobieństwa zsumować.

Schemat klasyczny (gdy wszystkim wynikom przypisuje się jednakowe prawdopodobieństwa) pojawi się na etapie V jako przypadek szczególny przestrzeni probabilistycznej.

W ramach badania własności prawdopodobieństwa uczniowie będą badać i odkrywać np. własności związane ze zdarzeniem przeciwnym, sumą i iloczynem zdarzeń itp. Wszystkie własności dadzą się w prosty sposób wyprowadzić z reguły wyznaczania prawdopodobieństw zdarzeń losowych. Dla pogłębienia zrozumienia tych własności ważna będzie obserwacja, że zachodzą one także dla względnych częstości.

Z etapem V może też być związanych wiele ćwiczeń, w których stosuje się poznane wiadomości. Oto dwa przykłady:

a) Doświadczenie polega na rzucie dwiema kostkami; zdarzenie A - na kostce I wypadła liczba parzysta. Opisać zdarzenie A', wyznaczyć $p(A)$ i $p(A')$.

b) Aby oszacować liczebność pewnej populacji (np. zwierząt w lesie), można odłowić próbkę, oznakować wszystkie osobniki z tej próbki, wypuścić je z powrotem i odczekawszy, aż osobniki oznakowane wymieszają się z innymi - obserwować częstość pojawiania się osobników oznakowanych wśród innych. Uczniowie mogą to postępowanie naśladować, np. szacując w ten sposób liczbę kulek w worku.

Sądzę, że w wyniku opisanych wyżej pięciu etapów można wstępnie ukształtować ogólnie pojęcie skończonej przestrzeni probabilistycznej oraz dostarczyć środków rachunkowych dających się stosować w prostych przypadkach. W toku dalszego nauczania, pojęcie przestrzeni probabilistycznej będzie pojawiało się wielokrotnie w różnych kontekstach (doświadczenia wielostopniowe, błądzenie losowe), co da okazję do pogłębienia rozumienia tego pojęcia.

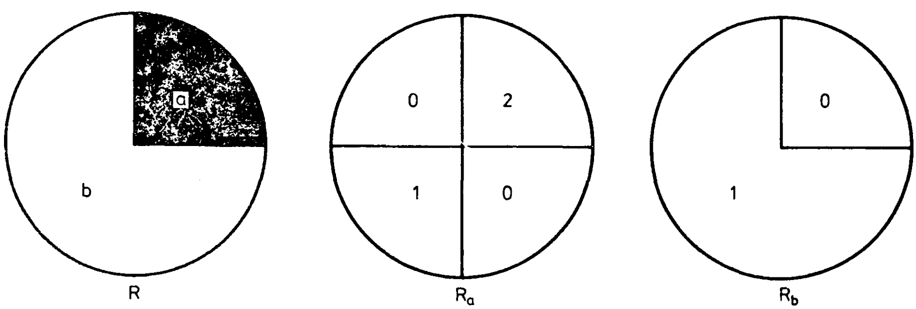
§ 3. DOŚWIADCZENIA WIELOSTOPNIOWE

Etap I. Ćwiczenia wprowadzające

Etap ten polegać będzie na wykonywaniu rozmaitych doświadczeń wielostopniowych, obserwowaniu ich przebiegu i wyników.

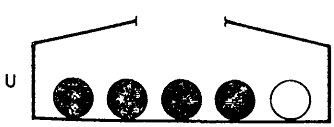
Przykłady doświadczeń

Ćw. 1. Zakręcić najpierw ruletkę R, a następnie ruletkę R_a lub R_b w zależności od wskazania ruletki R (rys. 3.1)



Rys. 3.1

Ćw. 2. Trzykrotne losowanie kuli z urny U (rys. 3.2) bez zwracania (obserwowanie, jakie wypadają kolory).



Rys. 3.2

Ćw. 3. Trzykrotne losowanie kuli z urny U ze zwracaniem (obserwowanie kolorów).

Ćw. 4. Losowanie bez zwracania po jednej kuli z urny U (rys. 3.2), aż do wyciągnięcia białej.

Ćw. 5. Dane: 5 zapałek, w tym jedna złamana. Losowanie kolejno wszystkich i obserwowanie, za którym razem wyciągniemy złamaną.

Ćw. 6. Zapytaj 5 przypadkowych osób o daty urodzenia i stwierdź w kalendarzu stuletnim, jaki to był dzień tygodnia. Czy prawdopodobieństwo zdarzenia, że każda z tych osób urodziła się w innym dniu tygodnia, jest duże?

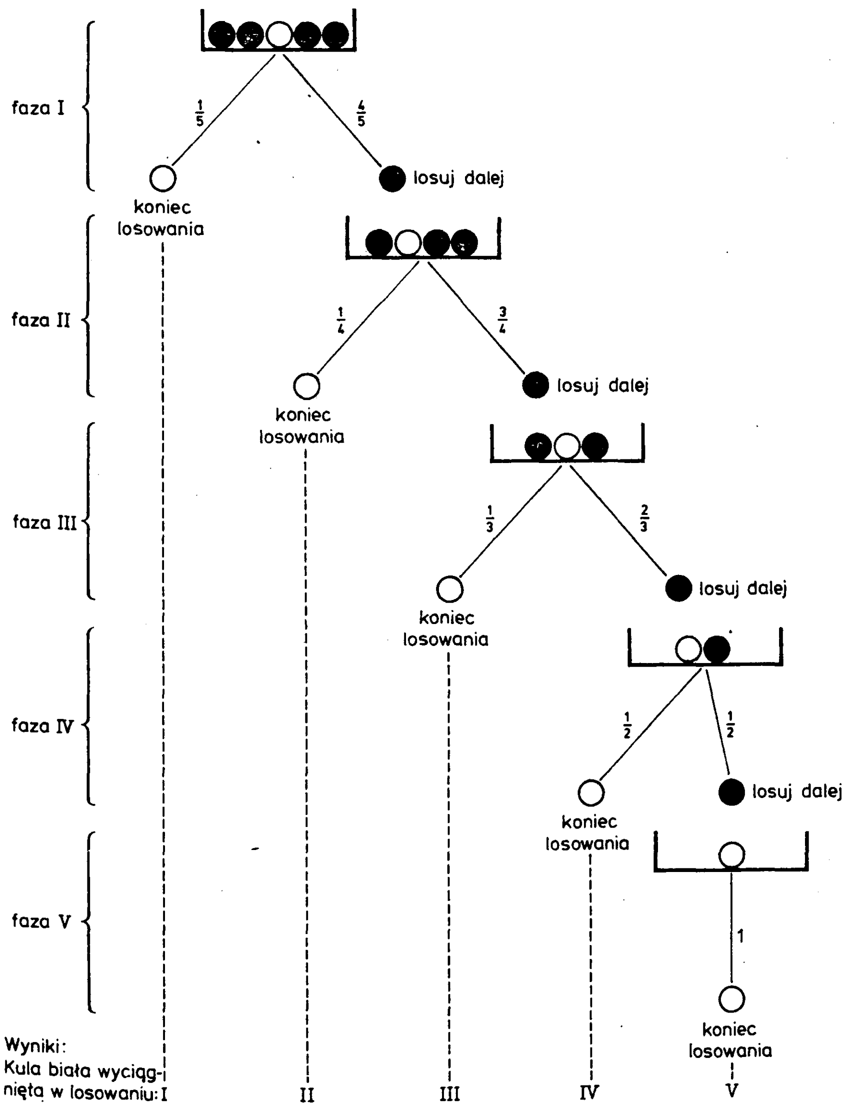
Niektóre z powyższych doświadczeń mogą być przedstawione w formie gier czysto losowych. Na przykład, losując jak w ćw. 1 przyznajemy w każdej kolejce graczowi tyle punktów, ile wskazała druga ruletka (R_a lub R_b). Losując jak w ćw. 2, przyznajemy 1 punkt za każdą wylosowaną kulę czarną, a 2 punkty za białą.

Inne gry mogą mieć charakter strategiczno-losowy. Możemy np. przyznawać punkty, gdy wynik doświadczenia okaże się zgodny z przewidywaniem gracza. Można też przy z góry ustalonym sposobie punktowania dać graczowi możliwość wyboru sposobu losowania. Ustalamy na przykład, że gracz dostaje tyle punktów, ile czarnych kul wylosował. Gracz może wybrać doświadczenie losowe z ćwiczenia 2, 3 lub 4.

Etap II. Odkrywanie regularności

Podstawowymi umiejętnościami kształconymi na tym etapie będą: "rozkładanie" doświadczeń wielostopniowych na poszczególne fazy, opisywanie każdej z nich jako prostej przestrzeni probabilistycznej, opisywanie możliwego przebiegu kolejnych faz, w zależności od wyników faz poprzednich. (Zakładamy tu, że pojęcie przestrzeni probabilistycznej zostało wcześniej zaawansowane co najmniej do etapu wspólnej reprezentacji).

W przypadku doświadczeń dwustopniowych wygodnym sposobem opisywania wszystkich możliwości przebiegu doświadczenia będzie


faza I
$\frac{1}{5}$
$\frac{4}{5}$
losuj dalej
koniec losowania
faza II
$\frac{1}{4}$
$\frac{3}{4}$
losuj dalej
koniec losowania
faza III
$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$
losuj dalej
koniec losowania
faza IV
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
losuj dalej
koniec losowania
faza V
1
koniec losowania
Wyniki:
Kula biała wyciąg-nięta w losowaniu: I
II
III
IV
V

Rys. 3.3

sporządzany w dwóch krokach diagram kwadratowy (patrz rys. 2.4).

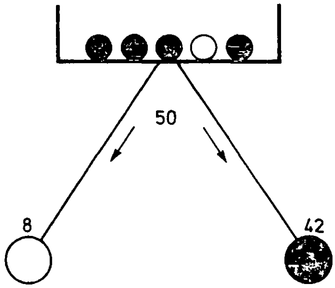
Innym sposobem opisywania wszystkich możliwości przebiegu doświadczenia jest konstruowanie drzewa. Jest to sposób bardzo wygodny także, dla doświadczeń o trzech lub więcej stopniach. Na rys. 3.3 przedstawiono drzewo będące "schematem ideowym" doświadczenia 4. Obserwujemy , za którym razem pojawi się kula biała przy losowaniu bez zwracania z urny U.

Oprócz opisywania doświadczeń uczniowie będą też szacować prawdopodobieństwa pojawienia się poszczególnych wyników - wykonując wielokrotnie doświadczenia i obserwując częstości wyników. Na przykład, aby wielokrotnie oszacować prawdopodobieństwo zdarzenia, że każda z 5 osób urodziła się w innym dniu tygodnia, uczniowie będą sprawdzać dni urodzin coraz nowych pięciu osób. Aby móc ocenić, czy w ćw. 4 prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej w ciągnieniach I, II, III, IV i V są równe, uczniowie będą wykonywać takie losowanie wielokrotnie i obserwować, za którym razem pojawi się biała kula.

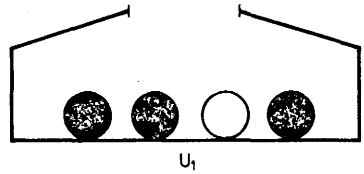
Przy organizowaniu takich badań mogą być pomocne drzewa. Na przykład stawiamy pionek na początku drzewa i wykonując kolejne losowania przesuwamy go wzdłuż gałęzi odpowiadającej otrzymanemu wynikowi, aż dotrze do końca gałęzi. Powtarzając tę procedurę dla kilkudziesięciu pionków, obserwujemy, ile pionków znajdzie się na końcach poszczególnych gałęzi.

Następnym krokiem będzie nieco inna, bardziej efektywna metoda. Na wierzchołku drzewa ustawiamy od razu kilkadziesiąt pionków. Dla każdego z nich wykonujemy losowanie zgodne z pierwszą fazą doświadczenia, przesuwając odpowiednio pionek.

Jeśli, na przykład, losując 50 razy kulę z urny U, otrzymaliśmy 8 razy kulę białą, to przy białym kółku znajdzie się 8 pionków, a przy czarnym kółku 42 (rys. 3.4).
Teraz 42 razy losujemy kulę z urny U_1 (rys. 3.5), rozdzielając pionki zgodnie z wynikami poszczególnych losowań, itd.



Rys. 3.4



Rys. 3.5

Etap III. Szukanie izomorfizmów

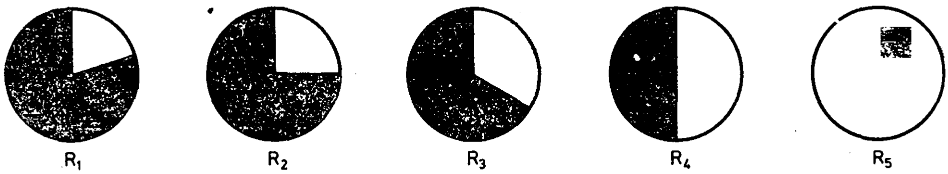
Zdarza się, że interesujące nas doświadczenie jest trudne bądź niemożliwe do wykonania w danych warunkach. Wówczas staramy się zastąpić je innym. Można np. pracochłonne losowanie kulek z urny zastąpić ruletką dbając, by podział ruletki był zgodny z rozkładem kolorów kul w urnie.

Zakładamy tu, że uczniowie proste doświadczenia umieją już zastępować izomorficznymi (etap III kształtowania pojęcia przestrzeni probabilistycznej).

Jeżeli poszczególne fazy pewnego doświadczenia wielostopniowego zastąpimy doświadczeniami izomorficznymi, to otrzymamy nowe doświadczenie wielostopniowe, izomorficzne z wyjściowym. Na przykład, doświadczenie opisane w ćwiczeniu 4 na str. 102 może być zastąpione przez kolejne kręcenie ruletek R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 (rys. 3.6) aż do wylosowania obszaru białego.

A oto dalsze przykłady:

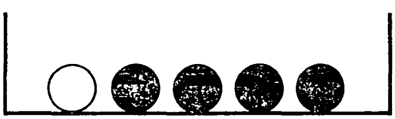
a) Zamiast pytać pięć osób o ich dzień urodzin - można przygotować 7 losów z nazwami dni tygodnia i pięciokrotnie wyciągać po 1 losie (zwracając). Można też pięciokrotnie zakręcić ruletkę podzieloną na 7 równych części.



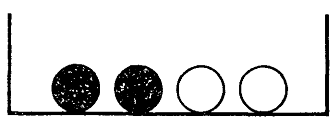
Rys. 3.6

b) Pewna firma organizuje kursy maszynopisania w siedmiu różnych grupach. Przypadkiem zdarzyło się, że na te kursy zapisało się 5 pań Kowalskich (nie znających się wcześniej). Każda z pań wybrała sobie grupę losową (jedną z siedmiu). Czy duże są szanse, że w żadnej grupie nie spotkają się dwie z nich? Próby zastąpienia tego doświadczenia innym z użyciem przyrządów do losowania doprowadzą do zrozumienia izomorfizmu tego doświadczenia ze sprawdzeniem dnia urodzin 5 przypadkowych osób, bo obydwa doświadczenia można symulować np. pięciokrotnym zakręceniem ruletki podzielonej na 7 równych sektorów.

c) Losowanie kul z urny z rys. 3.7, aż do wyciągnięcia białej i ciągnięcie po 1 z pięciu zapałek, aż do wyciągnięcia złamanej są izomorficzne.



Rys. 3.7

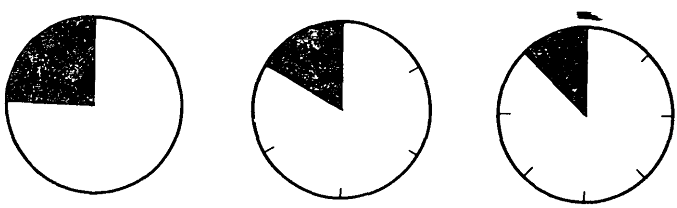


Rys. 3.8

d) Losowania 3 kul z urny z rys. 3.8 ze zwracaniem i bez zwracania (obserwacja ilości czarnych) nie są izomorficzne, bo np. wynik 3 czarne nie jest możliwy przy losowaniu bez zwracania, a jest możliwy przy losowaniu ze zwracaniem.

Na omawianym etapie można wprowadzić wiele ćwiczeń polegających na opracowywaniu przez uczniów konkretnych doświadczeń naśladujących pewne zjawiska losowe. Oto kilka przykładów ćwiczeń tego typu.

a) Maszyna składa się z trzech niezależnych mechanizmów. Mechanizmy te mogą w czasie produkowania jednego wyrobu rozregulować się z prawdopodobieństwami $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$. Jeśli choć jeden mechanizm się rozreguluje - produkt będzie wybrakowany. Jaką część produkcji tej maszyny stanowią braki, jeśli założyć, że przed przystąpieniem do produkcji każdego wyrobu maszynę regulujemy. Produkcję jednego wyrobu możemy naśladować np. za pomocą trzech ruletek (rys. 3.9).



Rys. 3.9

Jeśli choć jedna z ruletek zatrzyma się na polu czarnym, wyrób będzie wybrakowany.

b) Trzech korektorów sprawdza niezależnie dany tekst. Pierwszy przepuszcza błąd z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$, drugi z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$, trzeci - z prawdopodobieństwem $\frac{1}{8}$. Jaka część błędów nie zostanie wykryta?

Uczniowie mogą to doświadczenie - podobnie jak poprzednie - symulować za pomocą trzech ruletek. Jeśli choć jedna z nich zatrzyma się na polu białym, błąd zostanie wykryty.

c) Urządzenie może się zepsuć każdego dnia z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{8}$. Oszacować prawdopodobieństwo zdarzenia A, że w ciągu tygodnia maszyna nie zepsuje się ani razu.

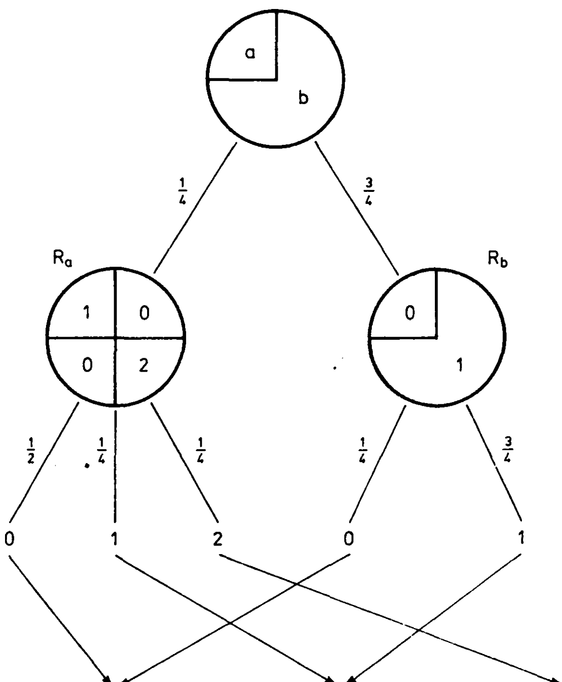
Obserwację maszyny w ciągu jednego dnia można symulować na przykład rzutem trzema monetami. Jeśli wypadną 3 orły - maszyna się zepsuła. W przeciwnym razie nie zepsuła się. Siedmiokrotnym rzutem trzema monetami można więc symulować obserwację maszyny w ciągu tygodnia.

d) Zaobserwowano, że dla pewnego gatunku rośliny prawdopodobieństwo niewykiełkowania nasienia wynosi $\frac{1}{3}$. Oszacować prawdopodobieństwo, że z trzech zasadzonych nasion wyrośnie choć jedna roślina.

Nie umiejąc jeszcze wyznaczać prawdopodobieństw w doświadczeniach wielostopniowych, uczniowie będą mogli szacować te prawdopodobieństwa wykonując wielokrotnie doświadczenia, które uznają za izomorficzne z badanym zjawiskiem.

Dwa doświadczenia izomorficzne można opisać tym samym drzewem (z dokładnością do permutacji gałęzi, por. etap IV w § 2). Drzewa będą więc dobrą reprezentacją dla doświadczeń wielostopniowych. Chcielibyśmy jeszcze umieć wyznaczać prawdopodobieństwa wyników tych doświadczeń. Zakładamy, że uczniowie nauczyli się już wcześniej opisywać doświadczenia za pomocą drzew i szacować prawdopodobieństwa poszczególnych wyników, wykonując dużą liczbę doświadczeń lub wielokrotnie symulując doświadczenie. Pokazaliśmy już wcześniej, w jaki sposób można symulowanie doświadczeń uprościć przesuwając po drzewie pionki zgodnie z otrzymanymi wynikami. Stosunek liczby pionków, które dotarły do końca gałęzi odpowiadającej pewnemu wynikowi doświadczenia, do liczby wszystkich pionków odpowiada względnej częstości tego wyniku. Następnie, w dążeniu do uzyskania prawdopodobieństwa, czyli "wyidealizowanej częstości", będziemy - bez wykonywania doświadczenia - rozdzielać pionki na każdym rozgałęzieniu zgodnie z teoretycznymi prawdopodobieństwami na poszczególnych gałęziach rozgałęzienia. Wykonamy w ten sposób wyidealizowaną symulację doświadczenia. Stosunek liczby pionków, które dotarły do końca gałęzi odpowiadającej dawnemu wynikowi doświadczenia, do liczby wszystkich pionków jest wyidealizowaną częstością, czyli prawdopodobieństwem tego wyniku (doświadczenia wielostopniowego).

Ta wyidealizowana symulacja na drzewie jest szczególnym przypadkiem abaku probabilistycznego Engla. Engel (1975) stosował abak do badania łańcuchów Markowa. Zastosowanie abaku w przypadku tak prostych grafów jak drzewa wydawać by się mogło jego trywializacją. Sądzę jednak, że jest to środek nadający się znakomicie do wykorzystania jako krok pośredni pomiędzy szacowaniem prawdopodobieństw przez wielokrotne symulowanie doświadczeń a obliczeniem prawdopodobieństw za pomocą reguł mnożenia i dodawania.



wynik	0	1	2
prawdopodobieństwo	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$

Rys. 3.10

Prawdopodobieństwa wyznaczone za pomocą abaku można będzie zapisać np. w tabelce. Przykład drzewa i tabelki dla ćwiczenia 1 ze str. 101 podajemy na rys. 3.10.

Etap V. Badanie własności reprezentacji

Obserwując poruszanie się pionków po drzewie przy wyidealizowanej symulacji zauważymy, że znając prawdopodobieństwo wyników w poszczególnych fazach doświadczenia możemy obliczyć, ile pionków dotrze do końca każdej gałęzi.

Załóżmy, że prawdopodobieństwa w poszczególnych fazach są liczbami wymiernymi. Przeprowadzamy symulację wyidealizowaną z N pionkami na starcie (gdzie N jest wielokrotnością iloczynu wszystkich mianowników). Jeżeli pewnej gałęzi odpowiadają prawdopodobieństwa $p_1, p_2, \ldots, p_k$ (i tylko te), to na koniec tej gałęzi dotrze $p_k \cdot p_{k-1} \cdot \ldots \cdot p_1 \cdot N$ pionków. Stąd prawdopodobieństwo wyniku odpowiadającego tej gałęzi wynosi

$$\frac{p_k \cdot \ldots \cdot p_1 \cdot N}{N} = p_k \cdot p_{k-1} \cdot \ldots \cdot p_1.$$

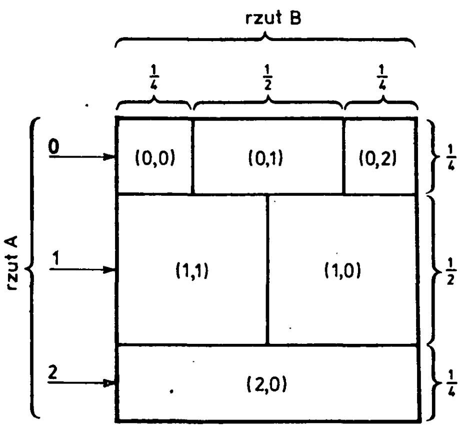
Otrzymaliśmy w ten sposób regułę mnożenia wzdłuż gałęzi.

Zauważmy jeszcze, że jeżeli zdarzeniu A sprzyjało kilka wyników, to prawdopodobieństwo zdarzenia A liczyliśmy sumując liczby pionków, które dotarły do końca wszystkich gałęzi sprzyjających A i dzieląc tę sumę przez liczbę wszystkich pionków. Wobec rozłączności wyników odpowiadających poszczególnym gałęziom drzewa, jest to równoznaczne z obliczeniem prawdopodobieństw wszystkich wyników sprzyjających i zsumowaniem ich. Otrzymamy w ten sposób regułę dodawania prawdopodobieństw wyników sprzyjających.

(W pracy z uczniami wprowadzamy powyższe reguły na konkretnych przykładach).

Badając własności doświadczeń dwustopniowych zwrócimy też uwagę, że reguły mnożenia i dodawania mają zastosowanie przy opisywaniu doświadczenia dwustopniowego przez podział kwadratu jednostkowego (diagram kwadratowy).

Rozpatrzmy na przykład doświadczenie następujące: gracz A rzuca dwie złotówki i zbiera wszystkie, na których wypadł orzeł. Gracz B rzuca wszystkie pozostałe i zbiera orły (rys. 3.11).



Rys. 3.11

Prawdopodobieństwa poszczególnych wyników można tu obliczyć jako pola prostokątów zawartych w kwadracie jednostkowym.

Na przykład,

$P(0,0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$ (żaden gracz nie weźmie żadnej monety),

$P(0,2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}$ (obie weźmie B),

$P(2,0) = \frac{1}{4} \cdot 1$ (obie weźmie A).

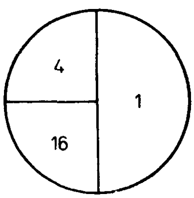
§ 4. WARTOŚĆ OCZEKIWANA

Etap I. Ćwiczenia wprowadzające

Na tym etapie uczniowie będą zapoznawać się wstępnie z częstościowym aspektem pojęcia wartości oczekiwanej, obserwując w wykonywanych doświadczeniach średnią wygraną, średni czas trwania gry itp. Przykłady ćwiczeń:

1) Gra "Inny Chińczyk". W każdej kolejce gracz A posuwa swój pionek do przodu o tyle pól, ile wskaże kostka, a gracz B - stale o 4 pola. Czy obaj gracze mają równe szanse wygranej?

2) Gra "Ruletka" (rys. 4.1)



Rys. 4.1

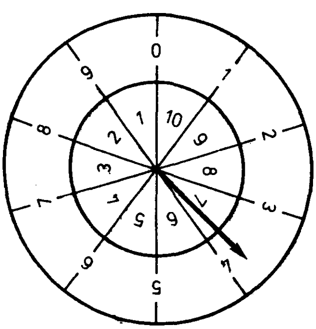
Jeden z grających jest bankierem, a drugi graczem. Za możliwość zakręcenia ruletki gracz wpłaca bankierowi 5 żetonów. Po zakręceniu ruletki bankier wypłaca graczowi wygraną - tyle żetonów, ile wskaże ruletka.

3) Gra "Ile czerwonych". W urnie są 4 kule czerwone i 1 zielona. Gracz ciągnie kolejno po 1 kuli bez zwracania, aż do wyciągnięcia zielonej. W wyniku tego doświadczenia otrzymuje tyle punktów, ile wyciągnął czerwonych kul przed wyciągnięciem zielonej. Wygrywa ten, kto w 20 kolejkach zgromadził najwięcej punktów.

4) "Wybrakowany towar" - symulacja. Stawiamy przed uczniami

konkretny problem: Wiadomo, że w partii 50 sztuk jest 5 wyrobów wybrakowanych. Potrzebujemy 10 sztuk dobrych. Ciągniemy po jednej, złe sztuki wyrzucając, aż do wyciągnięcia 10 sztuk dobrych. Jaka liczba ciągnień będzie potrzebna? Uczniowie próbują oszacować potrzebną liczbę ciągnień symulując wielokrotnie opisane doświadczenie (np. ciągnąc losy, kulki z urny czy zapałki).

5) "Czekanie na autobus" - symulacja. Autobus odchodzi z przystanku regularnie co 10 minut. Chwilę odejścia autobusu oznaczamy przez 0. Czas czekania na autobus zaokrąglamy w górę do pełnych minut. Zakładając losowy wybór chwili przyjścia na przystanek, czas oczekiwania na autobus można symulować ruletką T. Na tarczy ruletki narysowane jest koło podzielone na sektory. Po zakręceniu ruletki odczytujemy na obwodzie koła, w której chwili po odejściu autobusu zjawiamy się na przystanku; liczby na tarczy ruletki oznaczają odpowiadający danej chwili przyjścia czas oczekiwania na autobus (rys. 4.2).



Rys. 4.2

Jeżeli np. strzałka ruletki zatrzyma się tak jak na rys. 4.2, to odczytamy, że przyszliśmy w czwartej minucie po odjeździe autobusu i będziemy czekać 7 minut (zaokrąglając czas w górę do pełnych minut).

Etap II. Odkrywanie regularności

Załóżmy np., że wyniki rzutów kostką w grze "Inny Chińczyk" układały się tak, jak w poniższej tabelce:

wynik	1	2	3	4	5	6
ile razy	10	3	8	9	9	9

Analizując przebieg gry, uczniowie obliczają, że w 48 ruchach gracz A przesunął swój pionek o 175 pola, czyli średnio w każdym ruchu przesuwał się o 3,6 pola, czyli mniej niż gracz B. Uczniowie mogą grać dalej, aby przekonać się, czy w większej liczbie prób tendencja ta będzie się utrzymywać.

W podobny sposób analizuje się rozkład wyników innych gier i wyznacza średni uzyskany wynik (tzn. średnią wygraną w ruletce, średnią liczbę czerwonych kul wyciągniętych przed zieloną, średni czas czekania na autobus itd.).

Nauczyciel powinien zorganizować dyskusję (dla każdego doświadczenia osobno), w trakcie której uczniowie, korzystając z uzyskanych wyników, stwierdzą, że:

- średni uzyskany wynik nie musi należeć do zbioru wszystkich możliwych wyników doświadczenia,
- że jeśli średni wynik należy do zbioru wszystkich możliwych wyników doświadczenia, to nie musi być wynikiem najbardziej prawdopodobnym,
- że przy wydłużaniu serii doświadczeń (np. podsumowując wyniki gier całej klasy) średnie wyniki w serii stabilizują się wokół pewnej liczby.

Aby dostrzec pewne dalsze prawidłowości związane z wyznaczonym doświadczalnie średnim wynikiem, omawiać będziemy z uczniami nowe warianty poznanych wcześniej gier. Oto ich przykłady.

1) "Inny Chińczyk W_1". Jeśli na kostce wypadnie wynik w, to gracz A posuwa swój pionek o 2w pól, a gracz B - stale o 8 pól (bądź też uczniowie ustalają, o ile gracz B powinien się posuwać). Uczniowie powinni obliczyć średnią liczbę pól, o którą posuwałby się A według nowej reguły przy wynikach rzutu kostką otrzymanych poprzednio. Zauważą wtedy, że zamiast wykonywać obliczenia na nowo można było pomnożyć przez 2 poprzednio obliczony średni wynik.

"Inny Chińczyk W_2". Przy wyniku w na kostce, gracz A posuwa swój pionek o 2w + 3. Analiza jak poprzednio.

"Inny Chińczyk W_3". Gracze rzucają kostką i monetą. Przyjmując orła za 0 punktów, a reszkę za 1 punkt, gracz A przesuwa swój pionek o sumę punktów otrzymanych na kostce i monecie. Analiza jak poprzednio.

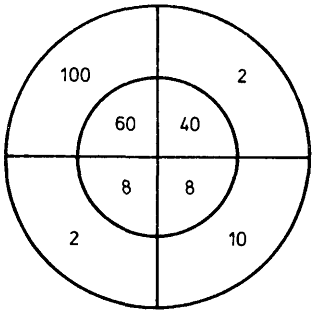
"Inny Chińczyk W_4". Gracze rzucają kostką i monetą. Gracz A przesuwa swój pionek o iloczyn oczek na kostce i monecie.

2) "Ruletka W_1". Gracz może opłacić wielokrotną stawkę zamiast 5 np. 10, 15, 20 żetonami. Bankier wypłaca wówczas odpowiednio zwielokrotnioną wygraną.

"Ruletka W_2". Przy stawce np. 13 pkt $(2 \cdot 5 + 3 = 13)$ wygrana 2w + 3.

"Ruletka podwójna W_3". Tarcza ruletki podzielona jest na 8 sektorów jak na rysunku 4.3. Można obstawiać liczbę wewnętrzną lub zewnętrzną, można też obstawiać ich sumę. Stawka za pojedynczy numer (wewnętrzny lub zewnętrzny) wynosi 30 pkt. Stawka za sumę - wynosi 60 pkt.

"Ruletka podwójna W_4". Bankier zezwolił w podwójnej ruletce na obstawianie iloczynów i ustalił stawkę 900 punktów (zakładamy, że gracze i bankier mają duży zapas punktów do dyspozycji). W tej grze okazuje się, że bankier szybko się rujnuje. Dlaczego?



Rys. 4.3

Etap III. Szukanie izomorfizmów

Celem tego etapu będzie dokonanie następujących spostrzeżeń:

a) We wszystkich wyżej opisanych ćwiczeniach mieliśmy do czynienia z doświadczeniami, których wynikami są liczby.

b) Niezależnie od tego, czy chodziło o średnią wygraną, średni czas czy średnią liczbę wylosowanych kulek - zawsze stosowaliśmy tę samą procedurę obliczeniową.

(x) $f_1w_1 + f_2w_2 + \ldots + f_nw_n$,

gdzie f_i oznacza uzyskane częstości wyniku w_i.

c) W przypadku wariantów W_1, W_2, W_3 omawianych gier działania (mnożenie przez stałą, dodawanie stałej, sumowanie wyników dwóch doświadczeń) wykonane na wynikach przed obliczeniem nowej wartości średniej można wykonać na starej średniej i w ten sposób obliczyć nową średnią. W przypadku wariantu W_4 nie zawsze otrzymamy nową wartość średnią mnożąc stare średnie.

Wszystkie powyższe wnioski dotyczą średnich wyników otrzymanych w doświadczeniach.

Etap IV. Wspólna reprezentacja

Uczniowie wiedząc już, że jeśli wyniki doświadczenia są liczbami, to średni wynik w długiej serii prób jest wielkością w pewien sposób charakteryzującą doświadczenie losowe. Stawiamy teraz problem następujący:

- Czy można przed wykonaniem doświadczeń przewidzieć, jaki będzie średni wynik w długiej serii prób? Jest to ważne np. dla sprawiedliwego ustalenia stawek w grze.

Ponieważ pojęcie prawdopodobieństwa kształtowaliśmy opierając się m. in. na stabilizowaniu się względnych częstości, więc zastępując teraz we wzorze (*) względne częstości wyników ich częstościami wyidealizowanymi, czyli prawdopodobieństwami, otrzymamy wzór na przewidywaną wartość średnią wyników.

Jeżeli np. przestrzeń doświadczenia X dana jest tabelką

wynik	w_1	w_2	...	w_k
prawdopodobieństwo	p_1	p_2	...	p_n

gdzie $w_1, w_2, \dots, w_n \in R$, to

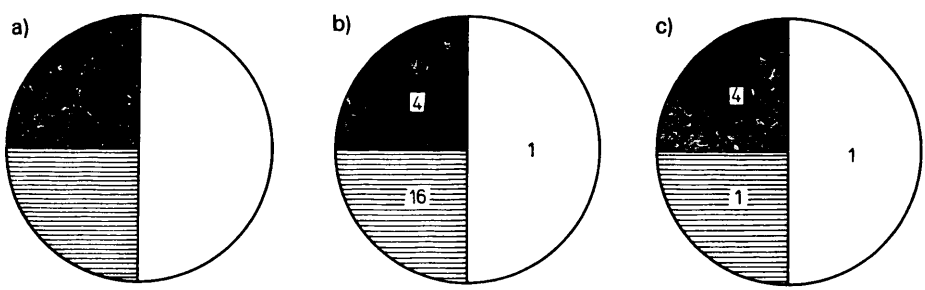
$$E_x = w_1 p_1 + \dots + w_n p_n.$$

Uwaga: W przedstawionej tu propozycji wprowadzania wartości oczekiwanej celowo pominięto pojęcie zmiennej losowej. Mówi się tu o oczekiwanym średnim wyniku jedynie w przypadku, gdy wyniki doświadczenia są liczbami. Dzięki temu uniknęliśmy trudnego, mało intuicyjnego pojęcia zmiennej losowej, niewiele zmniejszając ogólność pojęcia. Można bowiem w ten sposób przedstawić wartość średnią dowolnej zmiennej losowej $\zeta: \Omega \longrightarrow R$, określonej na przestrzeni skończonej (Ω, P). Wystarczy mianowicie wprowadzić nową przestrzeń (Ω_ζ, P_ζ), której elementami są liczby $r_i = \zeta(w_i)$ dla $w_i \in \Omega$, a prawdopodobieństwem - miara przeciwobrazów

$$P_\zeta(r_i) = P(\zeta^{-1}(r_i)) \quad \text{dla} \quad r_i \in \Omega_\zeta .$$

Metoda ta zawodzi dopiero wówczas, gdy zachodzi konieczność rozpatrywania ciągów zmiennych losowych na tej samej przestrzeni, a więc dopiero przy bardziej zaawansowanych zagadnieniach (jak np. prawa wielkich liczb).

Różnicę między podejściem tradycyjnym a podejściem tu proponowanym można poglądowo przedstawić na następującym przykładzie. Na ruletce obserwujemy <u>kolor</u> pola, które wskaże strzałka (rys. 4.4a)



Rys. 4.4

Przestrzeń probabilistyczną Ω tego doświadczenia przedstawia tabelka

wynik	białe	czerwone	czarne
prawdopodobieństwo	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Opisując liczbami wygrane dla poszczególnych pól ruletki (np. tak, jak wskazuje rys. 4.4b) określamy zmienną losową $\xi : \Omega \longrightarrow R$, na przykład $\xi(\text{białe}) = 1$, $\xi(\text{czerwone}) = 16$. Gdy zmieniamy wygrane, zmieniamy zmienną losową określoną na przestrzeni Ω. W ujęciu proponowanym w tej pracy, opisując nowe wygrane określamy nową przestrzeń. Doświadczenie będzie teraz polegało na obserwowaniu wartości wygranej, a zatem wyniki doświadczenia będą liczbami. Przestrzeń probabilistyczną nowego doświadczenia przedstawia tabelka

wynik	1	4	16
prawdopodobieństwo	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Znaczy to, że gdy zmieniamy wartości wygranych, zmieniamy przestrzeń probabilistyczną. Jeśli wygrane powtarzają się na kilku polach, to nowa przestrzeń powstaje przez "sklejenie" elementów. Na przykład, dla wygranych określonych na rys. 4.4c przestrzeń Ω_2 przedstawia tabelka

wynik	1	4
prawdopodobieństwo	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Zaletą proponowanego podejścia jest to, że można rozpocząć kształtowanie pojęcia wartości oczekiwanej bardzo wcześnie, gdy tylko uczniowie nauczą się wyznaczać prawdopodobieństwa.

Ponadto, nawet u starszych uczniów, wprowadzenie pojęcia zmiennej losowej jedynie po to, by określać jej wartość oczekiwaną, zaciemnia intuicje związane z wartością oczekiwaną i sprawia, że pojęcie to wydaje się uczniom trudniejsze, niż jest istotnie.

W bardziej zaawansowanym kursie, przewidującym rozwijanie teorii zmiennych losowych, rozpatrywane tu sytuacje można będzie uznać za przypadek szczególny, gdy zmienna losowa jest identycznością. Nie trzeba więc modyfikować przyjętej tu definicji, lecz tylko rozszerzyć ją na szerszą klasę sytuacji.

Etap V. Badanie własności reprezentacji

Odkrywając regularności w poszczególnych grach (etap II), znaleźliśmy szereg własności średniego wyniku uzyskanego doświadczalnie. Celem tego etapu będzie sprawdzenie, czy własności te przysługują także przewidywanej wartości średniej. Poprzedzone to być powinno - rzecz jasna - wyznaczeniem wartości oczekiwanej w rozgrywanych poprzednio grach i ich kolejnych wariantach. Następnym krokiem będzie próba uzasadnienia tych własności. Poziom tego uzasadnienia będzie zależał od wieku i możliwości uczniów. Można to zrobić bez wprowadzania terminologii zmiennych losowych. Aby uniknąć zapisów typu $\sum_{i=1}^{n} p_i w_i$ lub $p_1 w_1 + \ldots + p_n w_n$, możemy ograniczyć się do prostych przestrzeni o ustalonej małej liczbie elementów.

Na przykład:

X:	wynik	w_1	w_2	w_3
	prawdopodobieństwo	p_1	p_2	p_3

Stąd $E_x = p_1 w_1 + p_2 w_2 + p_3 w_3$.

Określamy nowe przestrzenie Y i Z (dla $a \neq 0$)

Y:	wynik	$a\,w_1$	$a\,w_2$	$a\,w_3$
	prawdopodobieństwo	p_1	p_2	p_3

Stwierdzamy, że $E_y = aw_1p_1 + aw_2p_2 + aw_3 = a \cdot E_x$.

Z:	wynik	$w_1 + k$	$w_2 + k$	$w_3 + k$
	prawdopodobieństwo	p_1	p_2	p_3

Zatem

$$E_z = (w_1 + k)p_1 + (w_2 + k)p_2 + (w_3 + k)p_3 =$$

$$E_x + k(p_1 + p_2 + p_3) = E_x + k.$$

§ 5. PRAWDOPODOBIEŃSTWO WARUNKOWE I NIEZALEŻNOŚĆ ZDARZEŃ

Każde z tych pojęć można kształtować w kolejnych etapach. Ponieważ jednak pojęcia te są ze sobą związane i wzajemnie wzmacniają się psychologicznie, opisywanie ich osobno (a tym bardziej odizolowywanie ich w trakcie nauczania) nie byłoby celowe. W przedstawionej poniżej koncepcji wiodące jest pojęcie prawdopodobieństwa warunkowego, a pojęcie niezależności, choć ściśle z nim związane, jest nieco opóźnione w fazie.

Etap I, i częściowo etap II można w zasadzie uznać za wspólny z doświadczeniami wielostopniowymi. Opisując za pomocą drzew możliwy przebieg doświadczenia, uczniowie de facto wyznaczali już prawdopodobieństwa warunkowe, toteż ćwiczenia te możemy przyjąć za intuicyjne kształtowanie tego pojęcia.

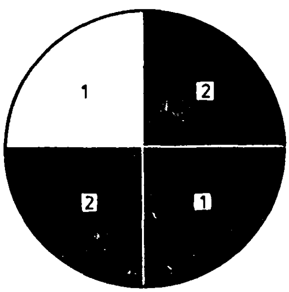
Jednym z ogólnych założeń przedstawionej w tej pracy koncepcji jest kształtowanie pojęcia prawdopodobieństwa jako syntezy ujęcia częstościowego i a priorycznego . Celowe więc będzie wprowadzenie dodatkowo w etapie II (odkrywanie regularności) ćwiczeń uwypuklających częstościowy aspekt pojęcia prawdopodobieństwa warunkowego. Wprowadzając zmodyfikowane pojęcie prawdopodobieństwa, chcemy pokazać zmodyfikowany sposób losowania, dla którego to nowe pojęcie stanowić będzie adekwatny model.

Wszelkie określanie prawdopodobieństw warunkowych za pomocą zwrotów w rodzaju "B pod warunkiem, że zaszło A" są trudne dla ucznia nie umiejącego rozumować formalnie.

W poniższych ćwiczeniach zasadniczym modelem prawdopodobieństwa warunkowego $p_A(B)$ będzie model losowania polegający na wykonywaniu pierwotnego doświadczenia i ignorowaniu wyników nie należących do A.

Przykłady ćwiczeń II etapu:

(a) Uczniowie wykonują doświadczenia z ruletką przedstawioną na rysunku 5.1.



Rys. 5.1

Notują wyniki uwzględniając zarówno kolor, jak i numer pola. Na przykład:

czarne	2211211222
nieczarne	1111

Po zanotowaniu np. 100 wyników, uczniowie pomijają dolną część tabelki i obliczają względną częstość pojawienia się jedynki przy zatrzymaniu się ruletki na polu czarnym.

(b) Gra "Wyścig z postojami".

Grają trzy osoby. Każdy z graczy posuwa swój pionek do przodu według innych zasad. Gracz I rzuca kostką jeden raz i posuwa pionek o 1 pole do przodu, jeśli wyrzuci kostką liczbę ze zbioru $B = \{1,3,4\}$, w przeciwnym razie traci kolejkę. Gracz II rzuca kostką aż do wyrzucenia liczby ze zbioru $A = \{1,3,5\}$ i dopiero wtedy sprawdza, czy należy ona także do zbioru B. Jeśli tak - wykonuje ruch, jeśli nie - traci ruch i przeczekuje kolejkę. Gracz III rzuca kostką, aż do wyrzucenia liczby ze zbioru $C = \{2,3,6\}$ i wtedy sprawdza, czy należy ona także do zbioru B. Jeśli tak - wykonuje ruch, jeśli nie - przeczekuje kolejkę.

(c) "Losowanie karty".

Zespół trzech uczniów dostaje komplet 20 kart zawierający wszystkie pary (5 wartości w 4 kolorach): $\{2,3,4,5,6\} \times \times \{A,B,C,D\}$. Grają oni w wyścig podobny do poprzedniego, z następującymi zasadami poruszania się:

Gracz I ciągnie jedną kartę i sprawdza numer. Jeżeli wylosował liczbę parzystą - wykonuje ruch, w przeciwnym wypadku - stoi. Po wylosowaniu zwraca się kartę i tasuje talię.

Gracz II ciągnie jedną kartę i sprawdza, czy jest ona koloru A, B lub C; jeśli nie jest - zwraca kartę, tasuje talię i losuje dalej w ten sam sposób, aż do wyciągnięcia karty koloru A, B lub C. Wówczas dopiero sprawdza, czy wylosowana liczba jest parzysta. Jeśli jest - wykonuje ruch; jeśli nie jest, stoi.

Gracz III ciągnie po jednej karcie (w ten sam sposób co II), aż do wylosowania karty koloru D. Dopiero wówczas sprawdza, czy wylosowana liczba jest parzysta. Jeśli jest - wykonuje ruch, jeśli nie jest - stoi.

(d) Doświadczenie polega na trzykrotnym rzucie monetą.

Zdarzenie A w tym doświadczeniu polega na wyrzuceniu nieparzystej liczby orłów. Uczniowie wykonują to doświadczenie wielokrotnie, zapisując wyniki w tabelce, w rozbiciu na zdarzenia A i A'.

A	(ORR), (RRO), (ORR), (ORR), (ROR), (OOO), (RRO),...
A′	(OOR), (ORO), (RRR), (OOR), (ROO),...

Niech B oznacza zdarzenie "wypadł 1 orzeł". Uczniowie obliczają: 1^o częstość wyników sprzyjających B wśród wszystkich otrzymanych wyników, 2^o częstość B w górnym wierszu tabelki, czyli przy zajściu zdarzenia A, 3^o częstość B w dolnym wierszu, czyli przy zajściu zdarzenia A′ (jest ona oczywiście równa 0).

W niektórych z powyżej opisanych gier ukryte było - jak łatwo zauważyć - pojęcie niezależności. Oprócz tego, dla przygotowania pojęcia niezależności ważne będą te wszystkie sytuacje, gdzie dokonuje się dwukrotnego losowania w sposób niezależny w potocznym sensie tego słowa, to znaczy tam, gdzie losowania bądź następują po sobie w czasie, bądź są równoczesne, lecz wyniki jednego w sposób oczywisty nie wpływają na wyniki drugiego (np. rzut dwiema kostkami).

Etap III. Szukanie izomorfizmów

Wracamy do omawianego wyżej ćwiczenia (d). Chcemy przejść od częstości zdarzeń do ich prawdopodobieństw. W tym celu rozpatrujemy wszystkie możliwe wyniki doświadczenia i rozbijamy je na wyniki sprzyjające A i sprzyjające A′.

A	(ORR)	(ROR)	(RRO)	(OOO)
A′	(OOR)	(ORO)	(ROO)	(RRR)

Ponieważ wszystkie te wyniki są równoprawdopodobne, prawdopodobieństwo zdarzenia B przy założeniu, że zachodzi A, obliczamy z klasycznego wzoru: $p(B) = \frac{3}{8}$, $p_A(B) = \frac{3}{4}$.

Poznawszy na tym przykładzie metodę obliczania prawdopodobieństwa warunkowego i zrozumiawszy, że warunek "zachodzi A" można w praktyce zrealizować pomijając wszystkie wyniki nie sprzyjające A, uczniowie wrócą do pozostałych przykładów, gdzie rozumując przez analogię wyznaczą liczbę wszystkich możliwych wyników sprzyjających zdarzeniu A i liczbę tych spośród nich, które sprzyjają B, po czym ze wzoru klasycznego wyznaczają $p_A(B)$.

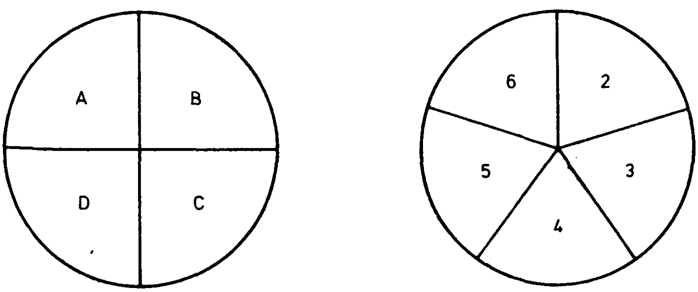
Okaże się wówczas, że w niektórych sytuacjach zajście zdarzenia A ma wpływ na prawdopodobieństwo zdarzenia B (zwiększa je lub zmniejsza), a w innych nie ma.

Wracając do przykładu (c) zauważmy jeszcze, wyciąganie 1 karty z kompletu można symulować doświadczeniem dwustopniowym:

I losowanie koloru: A, B, C lub D,

II losowanie wartośсu: 2, 3, 4, 5 lub 6.

Losowanie karty będzie więc doświadczeniem izomorficznym np. z zakręceniem dwóch ruletek (rys. 5.2).



Rys. 5.2

Szukać będziemy w innych doświadczeniach izomorfizmów tego rodzaju. Dzięki podobnym ćwiczeniom uczniowie z jednej strony pogłębią zrozumienie niezależności, z drugiej zaś nauczą się dostrzegać wielostopniową strukturę w sytuacjach, w których nie jest ona bezpośrednio widoczna.

Etap IV. Wspólna reprezentacja

Wszystkie omawiane wcześniej sytuacje dadzą się opisać klasycznym schematem. Przejdziemy teraz do ich uogólnienia. W tym celu rozpatrzymy wszystkie N równoprawdopodobnych wyników dowolnego doświadczenia, w rozbiciu na 4 podzbiory w zależności od tego, czy dany wynik sprzyja A czy A′ i B czy B′.
Sytuację tę przedstawia tabelka

(*)

	B	B′
A	k	l
A′	m	n

$$k + l + m + n = N,$$

gdzie zdarzeniom $A \cap B$, $A \cap B'$, $A' \cap B$, $A' \cap B'$ sprzyja odpowiednio k, l, m, n wyników. Powyższą procedurę wraz ze wzorem

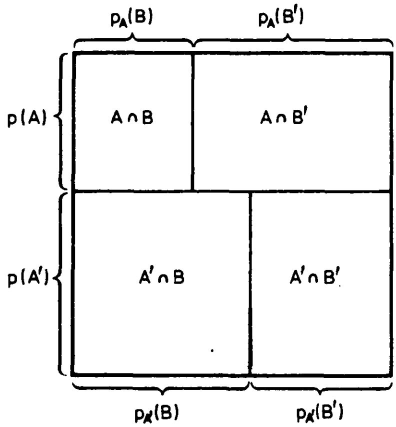
$$(**) \qquad p_A(B) = \frac{k}{k+l}$$

możemy na razie uznać za wspólną reprezentację pojęcia prawdopodobieństwa warunkowego, w przypadku jednakowo prawdopodobnych wyników doświadczenia.

Zamiast tabelki (*) możemy do opisu tego typu sytuacji wykorzystać diagram kwadratowy. Wówczas założenie o równym prawdopodobieństwie wyników nie będzie potrzebne (rys. 5.3).

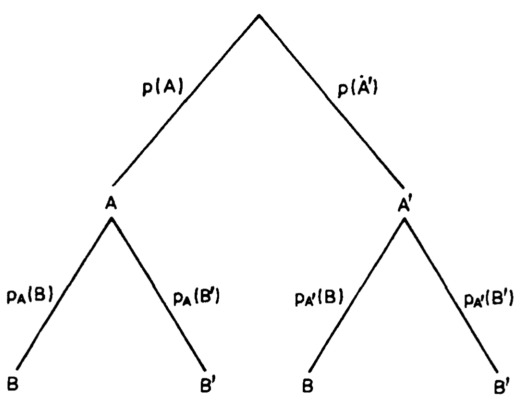
Jeżeli zajście bądź niezajście zdarzeń A i B dadzą się interpretować jako kolejne stopnie doświadczenia, to wygodną reprezentacją będzie drzewo (rys. 5.4).

(***)



Rys. 5.3

(****)



Rys. 5.4

Etap V. Badanie własności reprezentacji

Analizując podział diagramu kwadratowego na prostokąty o polach odpowiadających zdarzeniom $A \cap B$, $A \cap B'$, $A' \cap B$, $A' \cap B'$ zauważmy między innymi, że

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Daje to możliwość wyrażania prawdopodobieństwa warunkowego przez prawdopodobieństwa bezwarunkowe

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad \text{gdy} \quad P(A) \neq 0.$$

Pozostałych własności prawdopodobieństw warunkowych dowodzić będziemy odwołując się do tabelki (*) (str. 126) wraz ze wzorem (**), do diagramu kwadratowego (***) lub drzewka (****) (str. 127).

W dalszym ciągu badania własności reprezentacji uczniowie stwierdzają, że jeżeli zajście zdarzenia A nie ma wpływu na $P_A(B)$, to także zajście A' nie ma wpływu na $P_{A'}(B)$ oraz

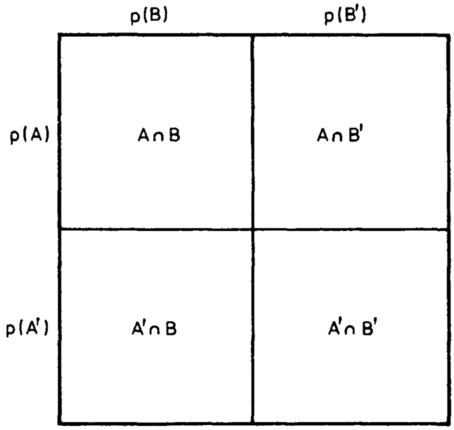
$$P_A(B) = P_{A'}(B) = P(B).$$

W takiej sytuacji otrzymamy podział diagramu kwadratowego przedstawiony na rysunku 5.5.

Zdarzenia A i B nazwiemy niezależnymi, jeżeli dadzą się reprezentować na kwadracie jednostkowym takim jak na rys. 5.5, odpowiadającym iloczynowi kartezjańskiemu zbiorów $\{A, A'\} \times \{B, B'\}$. Pokazujemy następnie, że warunkiem koniecznym i wystarczającym niezależności będzie równość

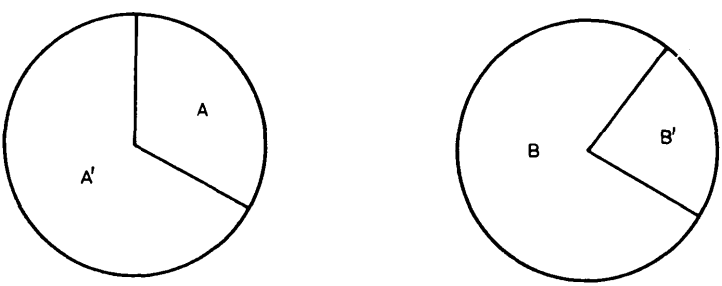
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Tu spotykamy się z drugim wątkiem tematycznym. Stwierdzimy, odwołując się do omawianych poprzednio przykładów, że jeżeli zdarzenia A i B pewnego doświadczenia dają się symulować



Rys. 5.5

za pomocą pary ruletek z rys. 5.6 w taki sposób, że zachowane są prawdopodobieństwa $P(A \cap B)$, $P(A \cap B')$, $P(A' \cap B)$, $P(A' \cap B')$, to zdarzenia A i B są niezależne. Zauważymy następnie, że wystarczy, by był spełniony jeden z tych warunków (Będzie to zarazem wyjściowy model do rozważania nieza-



Rys. 5.6

leżności doświadczeń).

Tego sposobu reprezentowania niezależności zdarzeń nie będzie jednak można uznać za model uniwersalny, gdyż niektóre zdarzenia niezależne nie dadzą się w naturalny sposób symulować za pomocą pary ruletek. Dotyczy to tych wszystkich sytuacji, w których niezależność nie wynika z ich ogólnej struktury, lecz zachodzi niekiedy w szczególnym przypadku.

Przykład. Doświadczenie polega na dwukrotnym rzucie kostką i obserwowaniu uporządkowanych par liczb. Niech A oznacza zdarzenie "za pierwszym razem wypadło sześć oczek", B_k zaś zdarzenie "suma oczek na obu kostkach jest równa k". Zdarzenia A i B_k są na ogół zależne, jednak dla $k = 7$ zdarzenia A i B_7 są niezależne. Nie da się dobrać naturalnego modelu dwóch ruletek dla tego doświadczenia.

Ten rodzaj niezależności jest dla uczniów najtrudniejszy do zrozumienia i nie powinien pojawić się przed etapem V.

§ 6. BŁĄDZENIA LOSOWE PROWADZĄCE DO ŁAŃCUCHÓW MARKOWA

A. Engel (1975) pokazał, że bardzo wcześnie można badać z uczniami skończone łańcuchy Markowa bez korzystania z aparatu teoretycznego. Przedstawiał on łańcuch Markowa od razu w formie grafu przepływu, a prawdopodobieństwa pochłonięcia i czas oczekiwania na pochłonięcie uczniowie wyznaczali stosując abak probabilistyczny.

Wydaje się jednak, że głębsze zrozumienie procesu Markowa osiągniemy dając uczniom możliwość prześledzenia rozwijania się tego procesu w czasie. Początkowo może to być badanie czysto empiryczne (śledzenie wykonywanych doświadczeń), a później rozważanie wszystkich możliwości przebiegu doświadczenia w kolejnych chwilach. Wówczas zastosowanie algorytmu wyznaczania prawdopodobieństw pochłonięcia i czasu oczekiwania staje się ukoronowaniem wielostronnego badania procesu Markowa.

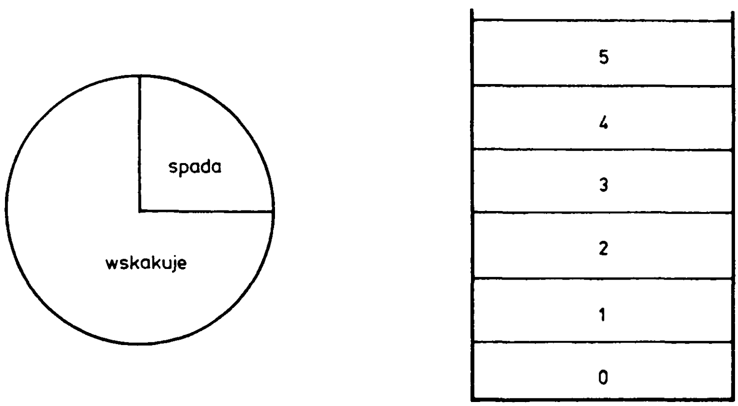
W paragrafie niniejszym pokażę, jak mogą przebiegać kolejne etapy poznawania tych zagadnień.

Etap I. Ćwiczenia wprowadzające

Etap ten polega na wykonywaniu doświadczeń. Część z nich przedstawione jest w formie gier. Przykłady:

a) "Mysz na drabinie". Mysz wchodzi po drabinie. Z każdego szczebelka usiłuje wskoczyć na następny. Udaje się to jej z prawdopodobieństwem $\frac{3}{4}$. Jeśli skok się nie uda - spada na ziemię i próbuje wskakiwać od nowa.

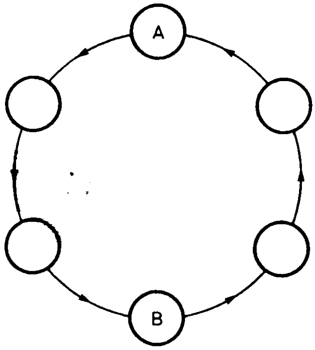
Te skoki myszy symuluje się w następującej grze (rys. 6.1).



Rys. 6.1

Na polu 0 stoi pionek - mysz. O kolejnych ruchach myszy decydować będzie wskazanie ruletki. Obserwuje się np. ile ruchów potrzebowała za każdym razem mysz, by dotrzeć na pole 5. Ile razy mysz spadała?

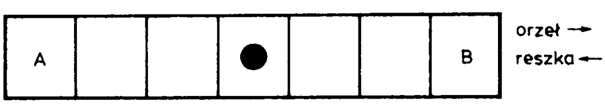
b) Gra "Berek" (rys. 6.2).



Rys. 6.2

Każdy z graczy ustawia swój pionek na planszy na polu oznaczonym jego literą. W każdej kolejce o tym, kto wykona ruch, decyduje wynik losowania sprawiedliwym przyrządem (np.: orzeł - posuwa się A, reszka - posuwa się B). Wygrywa ten, kto dogoni przeciwnika. Dodatkowo obserwujemy czas trwania każdej gry (tzn. ilość rzutów wykonanych od początku do końca gry).

c) "Mecz piłkarski" (dwaj gracze A i B, przyrząd do losowania jak w grze "Berek", rys. 6.3). Na środku planszy ustawiony jest pionek - piłka.



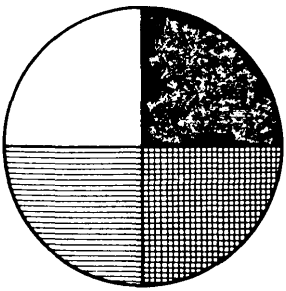
Rys. 6.3

Wynik losowania wskazuje, w którym kierunku przesuwa się piłka. Gra kończy się, gdy piłka wpadnie do bramki któregoś z graczy.

d) "Ruina gracza". Dwaj gracze A i B otrzymują odpowiednio a i b żetonów. Neutralny sędzia rzuca monetą.

Jeżeli wypadnie orzeł, to gracz B daje 1 żeton graczowi A, jeżeli reszka, to gracz A oddaje 1 żeton graczowi B. Gra toczy się do momentu, w którym jednemu z graczy zabraknie żetonów. Obserwujemy czas trwania gry.

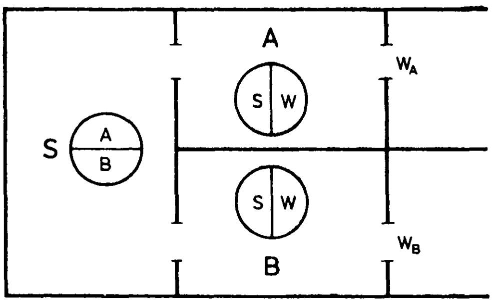
e) "Wędrujące kulki". Każdy z uczniów ma dwa pudełka: P - puste i K - z czterema kulkami w 4 różnych kolorach oraz ruletkę (rys. 6.4). W każdym ruchu jedna kulka o wylosowanym kolorze zmienia pudełko (tzn. niezależnie od tego, w którym pudełku aktualnie się znajduje, przechodzi do sąsiedniego).



Rys. 6.4

Gra kończy się, gdy wszystkie kulki znajdą się w pudełku P.

f) "Szczur w labiryncie" - symulacja.
Labirynt składa się z trzech sektorów: S, A i B (rys. 6.5). Do sektora S wpuszczamy szczura, który błądząc po labiryncie może trafić do sektora A lub B. Błądząc po sektorze A (lub B) trafi z powrotem do S lub do wyjścia W_A (lub W_B). Pionek-szczur krąży po labiryncie zgodnie ze wskazaniami ruletek umieszczonych w poszczególnych sektorach.



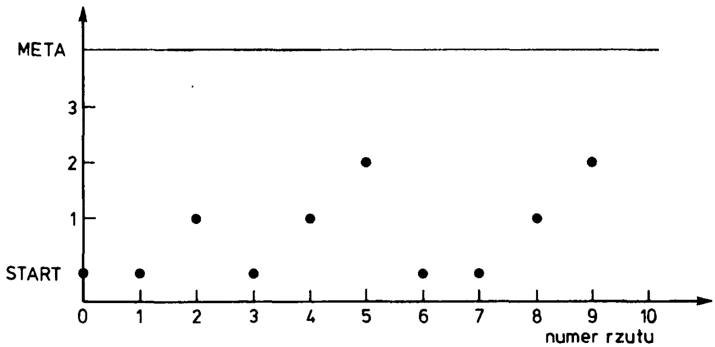
Rys. 6.5

Etap II. Badanie poszczególnych sytuacji i odkrywanie regularności

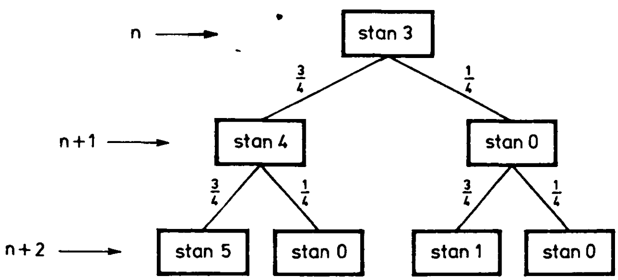
Punktem wyjścia do badania powyższych doświadczeń będzie zapisywanie przebiegu wykonanego doświadczenia w układzie współrzędnych, gdzie na jednej osi wskazuje się czas (dyskretny), a na drugiej - możliwe wyniki.

Rysunek 6.6 przedstawia przebieg pewnej wędrówki po drabinie myszy z przykładu a).

Możemy też badać "lokalnie" sytuację. Na przykład, znając położenie myszy w chwili n (czyli po n-tym rzucie), możemy obliczać prawdopodobieństwo zakończenia błądzenia w chwili $n + 1$, w chwili $n + 2$ itd. Można to np. obliczyć za pomocą drzewa (rys. 6.7).

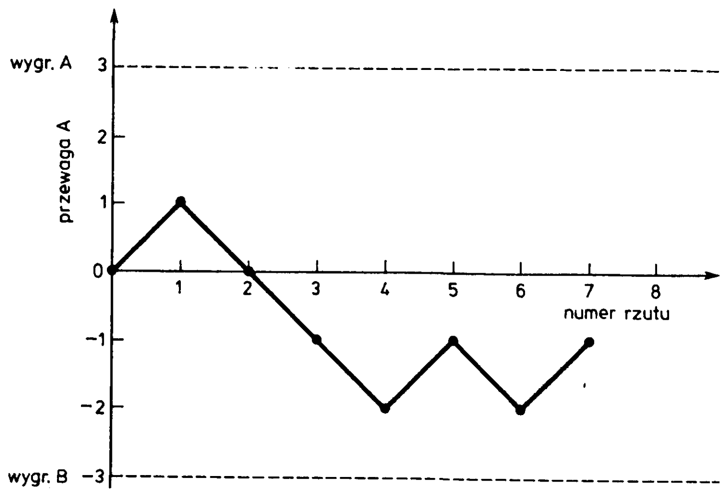


Rys. 6.6

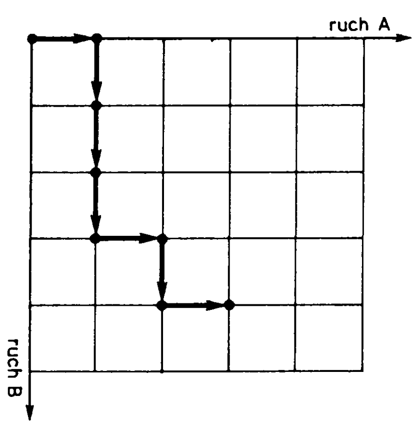


Rys. 6.7

Kolejny rysunek 6.8 przedstawia pewien fragment gry "Berek", gdy na jednej z osi wskazujemy czas, a na drugiej stan przewagi A nad B.


wygr. A
3
2
1
0
−1
−2
wygr. B
−3
przewaga A
1
2
3
4
5
6
7
8
numer rzutu

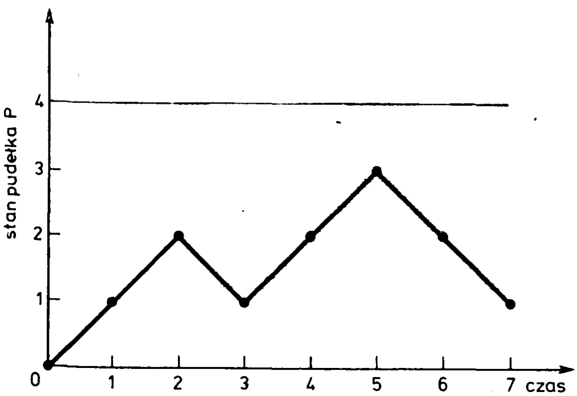
Rys. 6.8


ruch A
ruch B

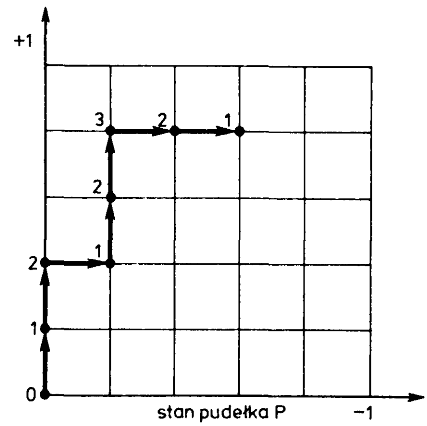
Rys. 6.9

Inny sposób opisu tej gry przedstawiony został na rys. 6.9. Na sieci kwadratowej krok w górę (↑) oznacza, że ruch wykonywał A, a krok w prawo (→) oznacza, że ruch wykonywał B.

Rysunki 6.10 i 6.11 przedstawiają obydwa sposoby opisu przebiegu doświadczenia dla gry "Wędrujące kulki": Na rysunku 6.11 zaznaczone są kolejne stany pudełka P, przy czym krok w górę oznacza, że przybyła 1 kulka, a krok w prawo - że jedna kulka ubyła.



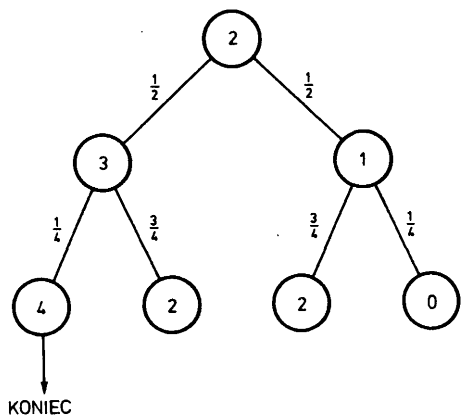
Rys. 6.10



Rys. 6.11

Badając tę grę "lokalnie", w zależności od jej chwilowego stanu, uczniowie powinni zauważyć, że - w odróżnieniu od gier poprzednich - prawdopodobieństwa na wyjściach z poszczególnych stanów są różne dla różnych stanów; powinni też wyznaczyć te prawdopodobieństwa. Rysunek 6.12 przedstawia drzewo służące do wyznaczania prawdopodobieństwa zakończenia gry w chwili $n + 2$, jeżeli w chwili n stan gry jest 2 (dwie kulki w pudełku P).

Oczekujemy, że wykonując ćwiczenia etapu II uczniowie nauczą się opisywać przebieg gry w postaci błądzenia losowego i wyznaczać zbiór wszystkich możliwych stanów (powinni przy każdej z gier zauważyć, że choć proces może ciągnąć się nieskończenie, to zbiór wszystkich możliwych stanów jest skończony); będą rozwiązywali "lokalne" problemy za pomocą drzew oraz



Rys. 6.12

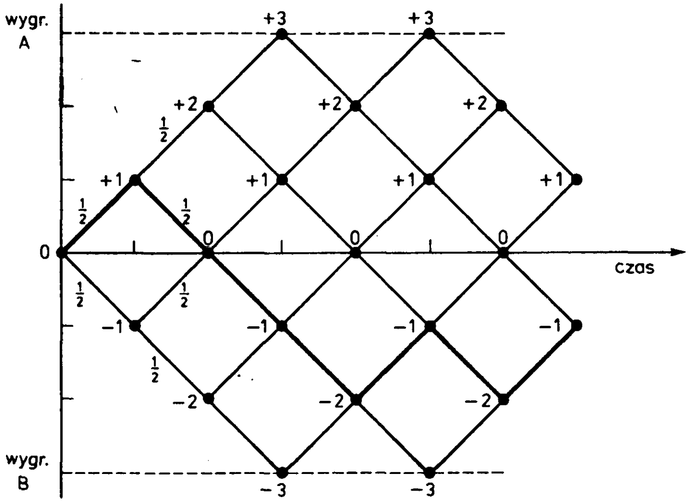
prowadzili obserwacje na temat czasu trwania gry, chwilowej przewagi, zmian w prowadzeniu i innych, tym podobnych problemów dotyczących błądzeń losowych.

Etap III

Kolejnym krokiem jest próba globalnego opisywania możliwości przebiegu doświadczeń. Drzewa nie są tu wygodnym narzędziem, gdyż rozrastają się zbyt szybko i przestają być ekonomiczne.

Jako jedną z regularności odkrytych na poprzednim etapie zauważono, że w każdej z omawianych sytuacji jest skończona liczba różnych stanów możliwych do osiągnięcia z danego stanu. Analizując kolejno wszystkie możliwe przejścia w kolejnych chwilach, otrzymamy w rezultacie rozwijający się w czasie graf, przedstawiający wszystkie możliwości przebiegu doświadczenia.

Rysunek 6.13 przedstawia taki graf dla gry "Berek".



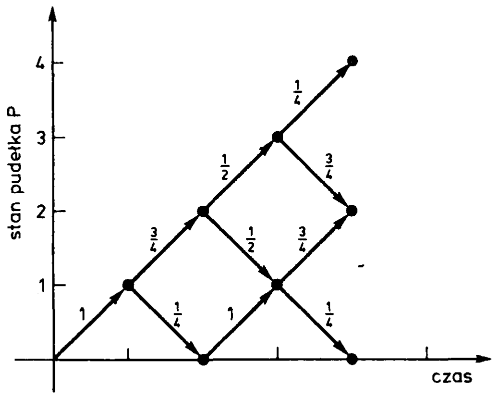
Rys. 6.13

Każdej rozgrywanej grze odpowiada tu jedna droga na grafie. Grubą linią zaznaczono drogę z rysunku 6.8.

Umiejętność opisania wszystkich możliwości przebiegu doświadczenia pozwoli odkryć doświadczenia izomorficzne, mianowicie takie, których grafy są izomorficzne (por. etap IV w § 3). Na przykład, gry "Berek" i "Mecz piłkarski" są izomorficzne, a "Mysz na drabinie" nie jest izomorficzna z żadną z pozostałych gier.

Graf "Wędrujących kulek" (rys. 6.14) wygląda podobnie jak graf "Berka", mimo to jednak gry te nie są izomorficzne, gdyż różnią się prawdopodobieństwami przejścia.

Niekiedy w doświadczeniach, które nie są izomorficzne, odnajdziemy tyle analogii, że po niewielkich zmianach danych staną się one izomorficzne. Oto przykład dotyczący zadania

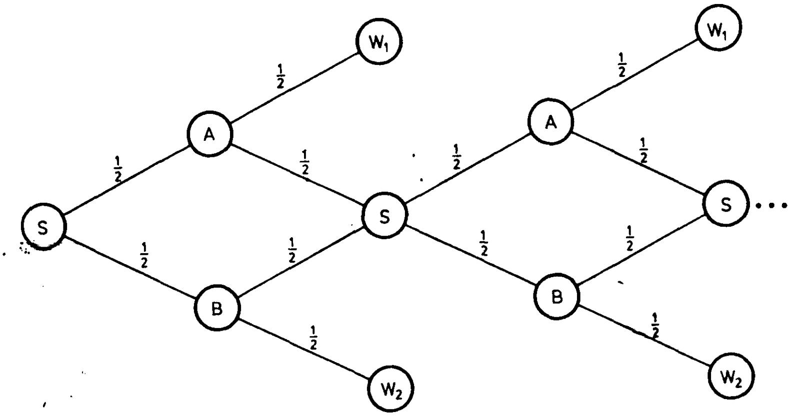


Rys. 6.14

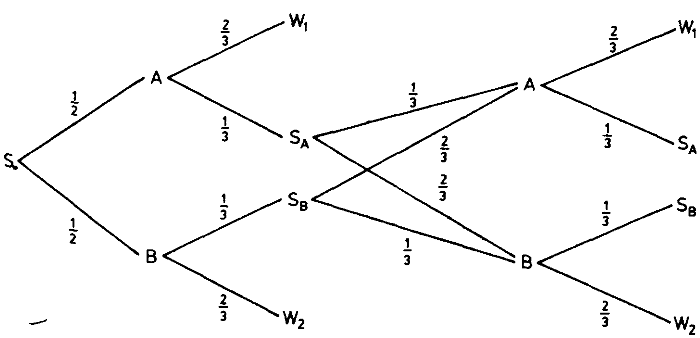
o ruinie gracza: "z jakim kapitałem mają rozpoczynać grę gracze A i B, by zadanie o ruinie gracza było izomorficzne z grą "Mecz piłkarski"?"

Czasem też na odwrót, korekta sprawia, że nowa sytuacja nie jest izomorficzna z poprzednią. Oto przykład takiej zmiany.

W grze "Szczur w labiryncie" zakładaliśmy, że szczur jest tak zagubiony w labiryntach A, B i S, że nie pamięta, którędy wszedł i każde wyjście może wybrać z tym samym prawdopodobieństwem. Prowadzi to do grafu na rysunku 6.15.
Zmieńmy teraz to założenie. Przyjmijmy, że prawdopodobieństwo wyboru drogi, którą przyszedł, jest mniejsze (np. stale równe $\frac{1}{3}$). Otrzymamy w ten sposób inne doświadczenie, nie będące procesem Markowa. Aby to naprawić, trzeba zamiast jednego stanu S rozpatrywać trzy różne stany: stan początkowy S, stan S_A kiedy szczur jest w S, a uprzednio był w A i stan S_B - kiedy szczur do S przyszedł z B. Teraz nasze doświadczenie



Rys. 6.15



Rys. 6.16

jest już łańcuchem Markowa, ale nie izomorficznym z wyjściowym (patrz rysunek 6.16).

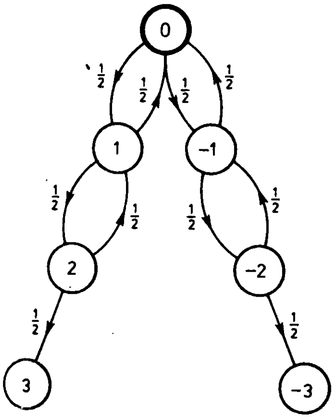
Podsumowując własności wszystkich omawianych doświadczeń zauważymy, że charakteryzują się one skończonym zbiorem stanów i stałymi prawdopodobieństwami przejścia pomiędzy stanami.

Etap IV. Wspólna reprezentacja

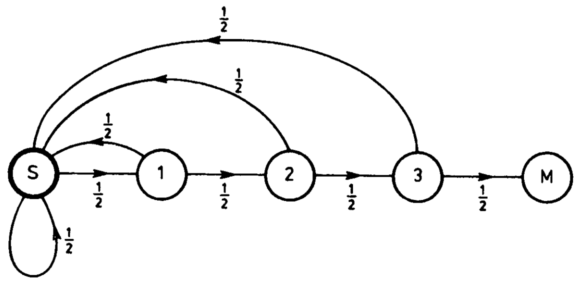
Za wspólną reprezentację można w zasadzie przyjąć opisane w poprzednim etapie grafy rozwijające się w czasie. Jednak ze względu na możliwość wyznaczania prawdopodobieństw pochłonięcia i średniego czasu oczekiwania na pochłonięcie za pomocą abaku Engla, celowe będzie wprowadzenie jeszcze jednej reprezentacji - grafu przepływu.

W tym celu zauważymy, że na grafach, które rozwijają się w czasie, drogi nieskończone rozwijają się cyklicznie (wynika to z faktu, że zbiór stanów jest skończony, a prawdopodobieństwa przejścia stałe). Jeżeli wyznaczymy wszystkie możliwe stany, wyróżnimy stan początkowy i dopuścimy możliwość powracania strzałek do stanów poprzednich, to drogi nieskończone "zwiną się" w cykle. Rysunki 6.17 - 6.19 przedstawiają grafy przepływu dla gier "Berek", "Mysz na drabinie" i "Wędrujące kulki"; grubą linią zaznaczono stan początkowy.

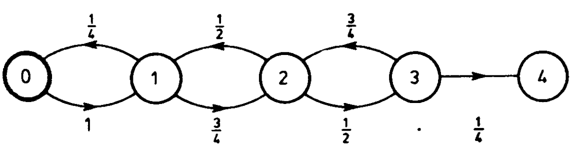
Uwaga: Wspólną reprezentacją może być macierz prawdopodobieństw przejścia łącznie z początkowym rozkładem prawdopodobieństw w momencie 0. Konieczne będzie wówczas wprowadzenie algebraicznych metod badania łańcuchów Markowa. Nie jest to jednak celowe ani możliwe w kształceniu ogólnym, lecz ewentualnie w klasach licealnych ukierunkowanych matematycznie.



Rys. 6.17



Rys. 6.18



Rys. 6.19

Etap V. Badanie własności reprezentacji

Za pomocą abaku Engla badać będziemy: prawdopodobieństwa przej-ścia w n krokach ze stanu początkowego do dowolnego ustalonego stanu, średni czas oczekiwania na osiągnięcie ustalonego stanu itp. Działalność tego rodzaju została opisana przez Engla (1975).

§ 7. KONSTRUKCJA CAŁOŚCIOWEGO SYSTEMU NAUCZANIA RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA W KSZTAŁCENIU OGÓLNYM

W pracy tej ograniczyłam się do przedstawienia koncepcji kształtowania kilku kluczowych pojęć rachunku prawdopodobieństwa. W podobny sposób proces kształtowania innych ważnych pojęć (np. prawdopodobieństwa geometrycznego) da się także opisać w sześciu etapach Dienesa.

Schemat Bernoulliego może być przedstawiony w języku błądzeń losowych; etapy jego kształtowania będą wówczas analogiczne do opisanych w § 6. Schemat Bernoulliego można kształtować niezależnie od łańcuchów Markowa, ale można też etapy I - III przerobić wspólnie i dopiero później oddzielić klasę doświadczeń prowadzących do schematu Bernoulli'ego. Jeżeli ograniczymy się do małych liczb, to dla obliczenia prawdopodobieństw w schemacie Bernoulliego wystarczy początkowo abak, który następnie możemy stopniowo zastąpić prostymi, bezpośrednimi rozumowaniami kombinatorycznymi.

W paragrafach 2 - 6 przedstawiłam propozycję takiego organizowania procesu dydaktycznego, aby każde z najważniejszych pojęć rachunku prawdopodobieństwa kształtowane było zgodnie z etapami Dienesa. Dla jasności opisu starałam się celowo wyizolować każde z tych pojęć od reszty, po to, by wyraźniej przedstawić proces kształtowania się go w umyśle ucznia. W rzeczywistości jednak pojęcia te należy kształtować uwzględniając ich rozliczne wzajemne związki.

Celem tego paragrafu jest powiązanie w jedną całość rozpatrywanych uprzednio procesów dydaktycznych.

Teoretycznie możliwe są różne sposoby uporządkowania materiału, zachowujące - dla każdego z poszczególnych pojęć - kolejność etapów I - V. Można by na przykład przerabiać kolejno, od początku do końca: przestrzeń probabilistyczną (zgodnie z § 2), doświadczenia wielostopniowe (zgodnie z § 3), prawdopodobieństwa warunkowe i niezależność, wartość oczekiwaną, schemat Bernoulliego i wreszcie łańcuchy Markowa.

Można by też zorganizować najpierw zajęcia etapu I i II dla wszystkich pojęć, następnie etapy III - V dla pojęcia przestrzeni probabilistycznej, dalej etap III dla wszystkich pojęć itd.

Pierwszy z tych sposobów uporządkowania wydaje się jednak trochę sztuczny, a drugi - mało efektywny. Próba wypośrodkowania pomiędzy tymi dwiema skrajnymi propozycjami sprowadza się do przyjęcia rozsądnego kompromisu pomiędzy następującymi dwoma postulatami:

1^o Najważniejsze pojęcia należy zaczynać kształtować możliwie wcześnie, aby był czas na gruntowne ich opanowanie.

2^o Etapy I - IV danego pojęcia nie powinny być zbyt odległe od siebie, gdyż jest to mało efektywne.

W swojej próbie wypośrodkowania przyjęłam zamiast 2^o postulat słabszy:

$2^{o\prime}$ Etapy I i II powinny następować bezpośrednio po sobie, etapy II, III, IV, V mogą być oddzielone od siebie, o ile ich rezultaty będą wykorzystywane na tyle, by nie uległy zapomnieniu.

Wiąże się to z ogólnym postulatem, aby wszelkie wprowadzane pojęcia czy metody były wykorzystywane w trakcie dalszej nauki.

W paragrafach 2 - 6 podane zostały tylko nieliczne przykłady ćwiczeń i zadań. Były one ukierunkowane głównie na wprowadzenie pojęć. Należałoby, być może, dla każdego pojęcia dodać nowy etap: zastosowania. Można by tam umieścić na przykład zadania dotyczące badania rzeczywistych sytuacji za pomocą poznanych pojęć czy metod. Wymagałoby to jednak dodania całego zbioru zadań, więc ograniczam się tylko do zasygnalizowania, że przykłady ćwiczeń i zadań zamieszczone w tej pracy są, z założenia, ukierunkowane głównie na wprowadzanie pojęć.

Dobrym przykładem możliwości realizacji postulatu 2^{o}' jest pojęcie wartości oczekiwanej. Nic nie stoi na przeszkodzie, by omawiając różne wykonane doświadczenia wyznaczać średni uzyskany wynik. Podobnie jest z prawdopodobieństwem warunkowym. W doświadczeniach wielostopniowych wyznacza się je wielokrotnie - niekoniecznie używając tego terminu. Wprowadzając później określenie tego pojęcia można się odwoływać do stosowanej wcześniej procedury.

Jedna z możliwych propozycji ustalenia kolejności etapów poszczególnych pojęć, została przedstawiona w tabeli I. Nie jest to - rzecz jasna - jedyna możliwość.

W zależności od wieku uczniów i innych czynników dydaktycznie istotnych można modyfikować tę propozycję.

Uwzględniając powyższy schemat oraz pewne tematy nie omawiane w § 2 - 7 otrzymamy podział materiału na bloki tematyczne przerabiane kolejno:

I. Odróżnianie zjawisk losowych od zdeterminowanych. Przykłady zjawisk losowych w życiu codziennym.

II. Jakościowe badanie zjawisk losowych
   A. Przez rozumowania logiczne, np.:
      - zdarzenie pewne, zdarzenie niemożliwe,
      - zdarzenia bardziej (mniej) prawdopodobne (w przypadku, gdy zajście zdarzenia A pociąga za sobą zajście zdarzenia B).
   B. Przez obserwację względnych częstości:
      - częściej (rzadziej), większe (mniejsze) szanse,
      - mało prawdopodobne, bardzo prawdopodobne,
      - diagramy statystyczne.
   C. Przez proste rozumowania kombinatoryczne:
      - zbiór wszystkich możliwych wyników doświadczenia,
      - diagramy teoretyczne.
   D. Symulowanie doświadczeń:
      - szukanie doświadczeń izomorficznych,
      - empiryczne szacowanie prawdopodobieństw oparte na

Tabela I

Pojęcia	Kolejność poszczególnych etapów w czasie																								
Przestrzeń probabilistyczna	I	II	III				IV		V																
Wartość oczekiwana				I	II											III	IV								V
Doświadczenia wielostopniowe						I		II		III		IV	V												
Prawdopodobieństwo warunkowe i niezależność						I		II			III			IV	V										
Schemat Bernoulliego																		I	II	III	IV	V			
Łańcuchy Markowa																		I	II	III			IV	V	

względnych częstościach (przy wielokrotnych próbach).

E. Wyznaczanie średniego wyniku uzyskanego przy wielu powtórzeniach doświadczenia.

F. Wykonywanie i obserwowanie doświadczeń wielostopniowych (etap I).

III. Badanie zjawisk losowych z wykorzystaniem prawdopodobieństwa jako miary liczbowej.

- Intuicyjny opis prawdopodobieństw wyników doświadczenia za pomocą ułamków.
- Przestrzeń probabilistyczna prostych doświadczeń.
- Przedstawianie doświadczeń wielostopniowych za pomocą drzew.
- Wyznaczanie prawdopodobieństw zdarzeń losowych (dodawanie prawdopodobieństw wyników sprzyjających).
- Częstościowy aspekt prawdopodobieństw warunkowych.
- Symulacje związane z doświadczeniami wielostopniowymi.
- Prawdopodobieństwa warunkowe i niezależność zdarzeń (etap III).
- Wyidealizowana symulacja na drzewie.
- Reguły mnożenia i dodawania prawdopodobieństw na drzewie.
- Zastosowanie w zagadnieniach praktycznych (np. do genetyki).
- Reguły mnożenia i dodawania prawdopodobieństw na diagramie kwadratowym (dla doświadczeń dwustopniowych).
- Prawdopodobieństwo warunkowe i niezależność zdarzeń (reprezentacja i własności).
- Doświadczenia niezależne.
- Zastosowanie w zagadnieniach praktycznych (np. działające niezależnie urządzenie).
- Wartość oczekiwana (izomorfizmy i reprezentacja).
- Zastosowanie wartości oczekiwanej w zagadnieniach praktycznych.

IV. Błądzenia losowe

- Przykłady błądzeń losowych i ich badanie (etapy I - III).
- Schemat Bernoulliego (etapy IV - V).

- Obliczanie wartości oczekiwanej liczby sukcesów w schemacie Bernoulliego.
- Błądzenia losowe prowadzące do łańcuchów Markowa (etapy IV i V).

V. Prawdopodobieństwo geometryczne.

VI. Zasada praktycznej pewności.
- Informacyjnie o prawie wielkich liczb Bernoulliego.
- Zastosowania: np. przykłady testowania hipotez.

Ewentualnie jeszcze:

VII. (dla klas ukierunkowanych np. starszych klas matematyczno-fizycznych liceum).
- Aksjomaty rachunku prawdopodobieństwa.
- Powrót do poznanych pojęć w ramach teorii aksjomatycznej (z rozszerzeniem materiału np. o wzory ogólne związane ze schematem Bernoulliego, dowód prawa wielkich liczb itp.) .

Bloki IV, V, VI są od siebie niezależne i mogą być ustawione w dowolnym porządku.

Powyższy program powinien być realizowany od początku, lecz niekoniecznie do końca. Realizacja jego może być przerwana, a mimo to przerobiony fragment będzie kształcący.

PODSUMOWANIE

Na podstawie opisanych powyżej analiz teoretycznych oraz przebiegu wstępnych badań prowadzonych z uczniami formułuję następujące wnioski i postulaty:

1. Istnieje możliwość dość wczesnego (orientacyjnie biorąc: już od klasy V lub nawet IV) wprowadzania rachunku prawdopodobieństwa do nauczania masowego. Wymaga to jednak spełnienia m. in. następujących warunków:

a) rezygnacja z teorio-miarowego ujęcia oraz z dominującej roli kombinatoryki,

b) rezygnacja ze zbyt precyzyjnego języka i wprowadzenie na to miejsce terminologii nieformalnej, zbliżonej do naturalnego języka dzieci,

c) kształtowanie pojęć przed ich definiowaniem ("najpierw zrozumienie, potem definicja"),

d) przeznaczenie dużej ilości czasu na wykonywanie przez dzieci liczby doświadczeń losowych,

e) należyte przygotowanie nauczycieli.

2. Opisany w pracy system może stanowić podstawę prac zmierzających do ułożenia programu nauczania rachunku prawdopodobieństwa w szkole ogólnokształcącej. Program taki wymagałby dalszej weryfikacji eksperymentalnej.

3. Z punktu widzenia ogólnego rozwoju uczniów i kształtowania ich intuicji probabilistycznych, już realizacja stosunkowo małego fragmentu opisanego tu programu miałaby istotne walory kształcące. Ważniejsze wydaje się spokojne, bez pośpiechu przerobienie mniejszego fragmentu materiału niż dążenie do realizacji obszerniejszego programu w zbyt krótkim czasie, co z konieczności zwiększyłoby werbalizację nauczania.

Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa powinny - przynajmniej w początkowej fazie - kształtować się na gruncie samodzielnych eksperymentów ucznia. Z dotychczasowych doświadczeń szkolnych wynika, że przeciętny uczeń nie rozumie własności pojęć probabilistycznych nie odkrytych samodzielnie (przez siebie lub kolegów) i nie potrafi zrozumieć ich na podstawie objaśnień nauczyciela.

4. Etapy kształtowania pojęć matematycznych proponowane przez Dienesa stanowią dobry drogowskaz, pozwalający tak zorganizować proces nauczania rachunku prawdopodobieństwa, by był on zgodny z psychologicznymi prawidłowościami kształtowania pojęć.

5. Kształtując pojęcia prawdopodobieństwa należy dbać o to, by uczeń rozumiał różne jego aspekty. W szczególności, aby nie dopuścić do wytworzenia się fałszywych intuicji dotyczących prawa wielkich liczb, należy przez cały czas dbać o to, by -

obok wielokrotnego operowania prawdopodobieństwami obliczonymi za pomocą wzorów - mieli również okazję wracać do obserwowania rozrzutu wyników w konkretnych doświadczeniach.

LITERATURA WYKORZYSTANA

1. BŁASZCZYŃSKA, G., WOJCIECHOWSKA, G.: Gry probabilistyczne i symulowanie doświadczeń losowych w klasach IV i V, praca magisterska w Zakładzie Dydaktyki Matematyki Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW, 1980.
2. BOGNAR, J., NEMETZ, T.: Valòszinuségi jatèkok, Budapeszt 1975 (materiały dla kółek matematycznych).
3. BOREL, E.: Prawdopodobieństwo i pewność, PWN, Warszawa 1966.
4. BOROWKOW, A.: Rachunek prawdopodobieństwa, PWN, Warszawa, 1975.
5. BRENY, H.: Pros and cons of probabilistic flow-graphs, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 8 (1977).
6. BROUSEAU, G., BRAND, J.: O nauczaniu probabilistyki na poziomie elementarnym, Matematyka 2 (1977).
7. BRUNER, J.: W poszukiwaniu teorii nauczania, PIW, Warszawa, 1974.
8. BRUNER, J.: Poza dostarczone informacje, PWN, Warszawa 1978.
9. DIENES, Z. P.: An Example of the Passage from Concrete to the Manipulation of Formal Systems, Educational Studies in Math. 3(1971).
10. ENGEL, A.: Mathematical Research and Instruction in Probability Theory, The Mathematics Teacher, (1966).
11. ENGEL, A.: Teaching Probability in Intermediate Grades, w: The Teaching of Probability and Statistics, pod redakcją L. RÅDEGO, Sztokholm 1970.
12. ENGEL, A. i inni: An Introduction to Probability, CSMP, Carbondale 1973.
13. ENGEL, A. i inni: Topics in Probability and Statistics, CSMP, Carbondale 1973.

14. ENGEL, A.: The Probabilistic Abacus, Educational Studies in Math. 6(1975); tłumaczenie polskie - Matematyka 3(1976).
15. ENGEL. A.: Why does the Probabilistic Abacus Work, Seminar für Didaktik der Mathematik, Universität Frankfurt (1977).
16. ENGEL, A., VARGA, T., WALSER, W.: Strategia czy przypadek, WSiP, Warszawa 1979.
17. FELLER,W.: Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, cz. I, PWN, Warszawa 1966.
18. FISCHBEIN, E.: The Intuitive Sourses of Probabilistic Thinking in Children, Reidel Publ. Company, Dordrecht 1975.
19. FREUDENTHAL, H.: Mathematics as an Educational Task, Reidel, Dordrecht 1973.
20. FREUDENTHAL, H.: The Crux of Course Design in Probability, Educational Studies in Math. 5 (1974).
21. FREUDENTHAL, H.: The Aims of Teaching Probability, w: The Teaching of Probability and Statistics, pod redakcją L. RÅDEGO, Sztokholm 1970.
22. FREUDENTHAL, H.: Gdy obserwuję dzieci, Matematyka 2 (1976).
23. GLAYMAN, M., VARGA, T.: Les probabilités à l'école, CEDIC, Paryż 1973.
24. GLIWENKO, W.: Rachunek prawdopodobieństwa, PTM, Warszawa 1951.
25. GNIEDIENKO, B., CHINCZYN, A.: Elementarny wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, PWN, Warszawa 1965.
26. GRZEŚKIEWICZ, A.: Grafy Engla w klasie I liceum; praca magisterska w Zakładzie Dydaktyki Matematyki Wydz. Mat., Inf. i Mech. UW, 1980.
27. Guidelines for the CSMP K-6 Curriculum in Probability, Statistics and Combinatorics, Carbondale, (Illinois) 1973.
28. KACZMARSKA, A., SOBIERAJ, G.: Porównanie metodyki drzewek z metodą grafów Engla w aspekcie kształtowania intuicyjnych podstaw rachunku prawdopodobieństwa u uczniów starszych klas szkoły podstawowej; praca magisterska, Zakł. Dydaktyki Mat., Wydz. Mat. Inf. i Mech. UW, 1980.
29. KRYGOWSKA, Z.: Zarys dydaktyki matematyki, tomy 1-3, WSiP, Warszawa 1977.

30. IOWO (praca zbiorowa), Look on Luck, Utrecht, 1974.
31. NEYMAN, J.: Elementary Teaching of Probability and Statistics with Indeterminism in Science as a Background, w: Teaching of Probability and Statistics, pod red. L. RÅDEGO, Sztokholm 1970.
32. NOWICKI, P., ZAWADOWSKI, W.: Matematyka VI - podręcznik dla kl. VI (maszynopis złożony w WSiP).
33. PŁOCKI, A.: Probabilistyka dla nauczyciela, WSP, Kraków 1976.
34. PŁOCKI, A.: Rachunek prawdopodobieństwa w szkole, WSiP, 1977.
35. PŁOCKI, A.: Symulacje probabilistyczne, Matematyka 6(1977).
36. PŁOCKI, A.: Gry losowe w nauczaniu probabilistyki, Matematyka 3(1978).
37. PŁOCKI, A.: Cele nauczania rachunku prawdopodobieństwa w szkole, Matematyka 5(1979).
38. PŁOCKI, A.: Jaka probabilistyka dla szkoły? Jaka dla nauczyciela?; Wiadom. Mat. 21 (1979), 149 - 162.
39. SMSP(praca zbiorowa): Probability for Primary Grades, School Mathematics Study Group, Stanford University, 1965.
40. Program nauczania liceum ogólnokształcącego, Matematyka, PZWS, 1966.
41. Program dziesięcioletniej szkoły średniej, WSiP, 1976.
42. RÅDE, L., i inni: Finite Probability Spaces, CSMP, Carbondale 1973.
43. RENYI, A.: Remarks on the Teaching of Probability, w: The Teaching of Probability and Statistics, pod red. L. RÅDEGO, Sztokholm 1970.
44. SEMADENI, Z.: Sympozjum nauczania matematyki w Budapeszcie, Życie Szkoły 7/8, 1972.
45. Symposium on combinatories and probability in primary schools, Instytut Matematyczny PAN, Warszawa 1975 (materiały powielone).
46. SZLENK, W.: Rachunek prawdopodobieństwa dla klasy IV liceum ogólnokształcącego i technikum, PZWS, Warszawa 1971.

47. VARGA, T., DUMONT, M.: Combinatoire, statistiques et probabilités de 6 à 14 ans; O.C.D.L., Paryż 1973.
48. VARGA, T.: Mathematik 1, Akadémiai Kiado, Budapest 1976.
49. VARGA, T.: Logic and Probability in lower grades, Educational Studies in Math. 4 (1972).

AN APPROACH TO STRUCTURING THE ELEMENTARY PROBABILITY TEACHING

Summary

The authoress proposes a certain approach to a global organization od probability teaching in school. It is based of the six stages of passing from the concrete to abstract mathematical concepts (Z.P. Dienes, 1970). Each of the basic probabilistic notions (e.g., sample space, probability, expectation, conditional probability with independence) is to develop from free play through play with certain rules, observation of regularities, search for isomorphisms, looking for common representations of isomorphic situations, and exploring properties of representations. The sixth stage (deductive theory) is not considered here. Examples are given for each stage of each of the notions listed above.