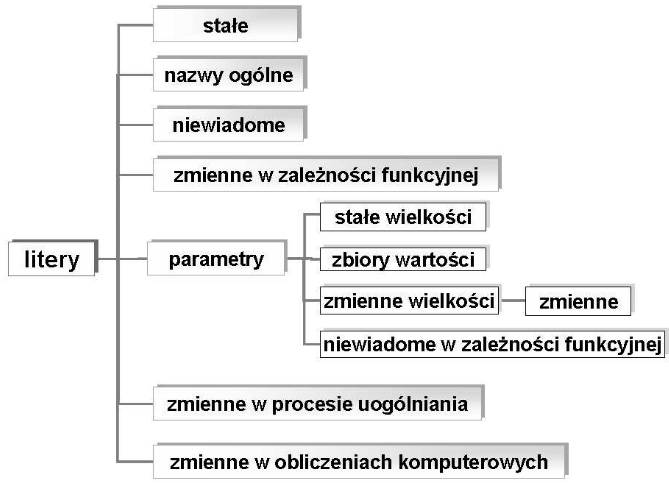
ANNALES OF THE POLISH MATHEMATICAL SOCIETY
5TH SERIES: DIDACTICA MATHEMATICAE 30 (2007)

Katarzyna Wadoń-Kasprzak
Kolegium Nauczycielskie, Bielsko-Biała

Różne sposoby rozumienia pojęcia parametru przez uczniów gimnazjum w toku badań długoterminowych w trakcie zintegrowanej nauki matematyki i informatyki

1 Wprowadzenie

„Przedmiotem zainteresowania tradycyjnego nauczania matematyki są przede wszystkim pojęciowe treści matematyczne: trójkąty, liczby, wektory itp. oraz ich własności. Absorbują one niemal bez reszty uwagę nauczyciela, uczniów i autora podręcznika. Te pojęcia oraz własności kształtuje się i opracowuje, natomiast liter (zmiennych) po prostu się używa" (Konior, 2002). Litery traktowane są jakby były już w posiadaniu uczniów i stanowiły część znanego im wcześniej alfabetu. Jednak nie jest łatwym zadaniem dla ucznia zrozumienie i odpowiednia ich interpretacja. Mówi o tym S. Turnau (1990): „Bez zrozumienia znaczenia poszczególnych liter w zadaniu nie można jasno rozumieć celu wykonywanych operacji, nie można więc tych operacji racjonalnie planować, nie można też skutecznie kontrolować wyników". Na podstawie literatury wyróżniłam następujące znaczenia liter, które przedstawiam na rysunku poniżej (rys. 1):



Rysunek 1.

W tej części artykułu podam przykłady wymienionych powyżej znaczeń liter ze szczególnym podkreśleniem zależności tych znaczeń od (kontekstu) sytuacji:

a) Litery w znaczeniu stałych

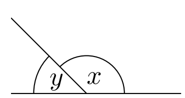
Stała to (wg J. Koniora) na przykład: e, g, π. Aby przedstawić znaczenie litery jako stałej (wg S. Turnaua), posłużę się przykładem w postaci zadania (jako stałe traktowane są litery a oraz m):

Narysuj w układzie współrzędnych wektory $u = [a, 2a-1]$, $w = [2m, 3m+1]$ dla $a = 3$, $m = 1$. Ile jest takich wektorów u, w spełniających warunki zdania?

b) Litery w znaczeniu nazw ogólnych (jako nazwy ogólne traktowane są litery x oraz y):

Przykład. Korzystając z rysunku uzupełnij zapis (rys.2):

$$x + y = \ldots$$



Rysunek 2.

c) Litery w znaczeniu niewiadomych (jako niewiadoma traktowana jest litera P):

Przykład. Oblicz pole P prostokąta, mając dane długości jego boków $a = 12\,\mathrm{cm}$ oraz $b = 7$ cm.

d) Litery w znaczeniu zmiennych w zależności funkcyjnej

Przykład 1. (jako zmienne traktowane są litery a oraz b): Rozstrzygnij, czy wielkości a oraz b, spełniające zależność $P = a \cdot b$, gdzie P jest wielkością stałą, są wprost, czy odwrotnie proporcjonalne?

Przykład 2. Jako zmienne traktowane są litery x i y, gdzie zmienna x występuje jako argument funkcji f zadanej wzorem $y = f(x)$.

e) Litery w znaczeniu parametrów (jako parametr traktowana jest litera a):

W tej sytuacji rozróżniam pięć przypadków:

— *parametr w znaczeniu stałej wielkości*

Przykład. Dana jest funkcja wzorem $y = ax + 1$. Narysuj wykres tej funkcji dla $a = 2$.

— *parametr w znaczeniu zbioru wartości*

Przykład. Dana jest funkcja wzorem $y = ax + 1$. Narysuj wykres tej funkcji dla kilku różnych wartości parametru a.

— *parametr w znaczeniu zmiennej wielkości*

Przykład. Dana jest funkcja wzorem$y = ax + 1$. Jak zmieni się wykres funkcji dla różnych wartości parametru a, gdy $-1 < a < 3$?

— *parametr jako zmienna*

Przykład. Funkcję f daną wzorem $f(a, x) = ax + 1$ można rozumieć jako funkcję dwóch zmiennych.

— *parametr w znaczeniu niewiadomej w zależności funkcyjnej*

Przykład. Dana jest funkcja wzorem $y = ax + 1$. Dla jakich wartości parametru a prosta, będąca wykresem tej funkcji przechodzi przez punkt $(-1, -3)$?

Dokładniej: jeżeli parametr pokazuje pewną klasę sytuacji, to uzyskuje on znaczenie niewiadomej w zależności funkcyjnej poprzez wybranie podzbioru tych sytuacji, które spełniają pewien zadany warunek.

f) Litery w znaczeniu zmiennych w procesie uogólniania

Przykład. Dane są zbiory prostych równoległych. Sąsiednie proste są odległe od siebie o 1 cm. W każdym przypadku znajdź odległość pierwszej prostej od ostatniej, gdy:

— dane są 3 proste,

— danych jest 7 prostych,

— danych jest n prostych. Odpowiedź uzasadnij.

g) Litery w znaczeniu zmiennych w obliczeniach komputerowych

W programie komputerowym możemy mówić o nazwie zmiennej jako o adresie pewnego wpisu do pamięci, natomiast o wartości zmiennej jako o zawartości tego wpisu do pamięci.

Trzeba również zwrócić uwagę na fakt, że „o znaczeniu litery w tekście algebraicznym decyduje kontekst, faza rozumowania, subiektywna interpretacja, ale także zwyczaje odnoszące się do rodzaju użytych liter" (Turnau, 1990). L. Bills pokazała w swoim artykule przykłady na to, jak znaczenie symboli literowych może się zmieniać podczas rozwiązywania danego matematycznego problemu (2001). L. Kusion natomiast przedstawiła propozycję dydaktyczną opracowania symbolu literowego w czterech aspektach: nazwy ogólnej, wielkości zmiennej, niewiadomej i stałej (1996). Opiera się ona na koncepcji czynnościowego nauczania matematyki.

2 Problem badawczy

Semadeni (2002a) pisze o idei głębokiej jakiegoś pojęcia lub innego tworu matematycznego, określając ją jako „**ideę** tego tworu, jego (szeroko interpretowany) **sens** – taki, jaki przypisują mu osoby, u których ten twór jest wystarczająco ukształtowany (to znaczy nie jest chwiejny ani uzależniony od kontekstu) – oraz **cel**, dla którego ów twór się rozważa".

Z. Semadeni stwierdza w swoim artykule, że podstawowym kryterium „czy jakieś **pojęcie matematyczne ukształtowało się już u danej osoby jako idea głęboka**, jest to, czy do prawidłowego rozumowania potrzebuje ona odwoływać się do definicji tego pojęcia. Jeśli osoba **rozumie je tak dobrze**, że potrafi je sensownie wykorzystać w rozmaitych sytuacjach, nie korzystając z definicji, lecz z szerokokontekstowego znaczenia, możemy uznać, że odpowiednia idea głęboka jest już ukształtowana" (2002a).

Autor, na którego się powołuję, wyróżnia trzy kategorie idei głębokich. „Do pierwszej należą idee tych pojęć, które kształtują się zazwyczaj najpierw, a ich definicje poznaje się później. (...) Do drugiej kategorii należą idee głębokie tych pojęć, które zazwyczaj poznaje się najpierw poprzez definicję, wysłowioną za pomocą form powierzchniowych. (...) Trzecia kategoria obejmuje idee głębokie tych pojęć, których **definicji nie ma w powszechnie dostępnych książkach**, bowiem z jednej strony można się doskonale obejść bez definicji (wystarczy praktyka w stosowaniu tych pojęć i ich intuicyjne rozumienie), a z drugiej strony – sformułowanie adekwatnej definicji jest trudne lub efekty takiego definiowania są na tyle zawiłe i oderwane od konkretnych zastosowań, że zaciemniają dane pojęcie zamiast je wyjaśniać. Przykładami są tu pojęcia: „zmienna” i „**parametr**” oraz czynności „podstawianie do wzoru” i „wykonywanie obliczeń” (Semadeni, 2002a). Szczególną uwagę zdecydowałam się poświęcić literze oznaczającej parametr, starając się odnaleźć w literaturze dotyczącej nauczania matematyki definicję tego pojęcia. Znalazłam jedynie jego określenia, np. „Parametr to litera występująca w wyrażeniu algebraicznym, którą można zastąpić dowolną konkretną liczbą” (Paczesna, Mostowski, 2003). Przyjmuję więc, że „definicje niektórych podstawowych pojęć algebry szkolnej nie są właściwie ścisłymi definicjami matematycznymi, ale mniej lub bardziej poglądowymi opisami” (Krygowska, 2000). Wynikać z nich mogą pewne nieporozumienia. „Takie trudności powstają na przykład, gdy w wyrażeniach algebraicznych występują parametry” (Krygowska, 2000). W toku części rozumowania uczeń ma pojmować parametr jako stałą, w dalszej – jako zmienną. Dlatego interpretacja przez ucznia litery oznaczającej parametr często nie odbywa się na drodze przeprowadzania pewnego rozumowania. Zna on, co prawda, takie pojęcie jak parametr, jednak nie zawsze posługuje się nim do końca świadomie, nie jest ono całkowicie przez niego rozumiane.

Według *Słownika współczesnego języka polskiego* pod red. Anny Sikorskiej-Michalak i Olgi Wojniłko czasownik **rozumieć** oznacza **przypisywać czemuś jakiś sens, wnioskować o czymś na podstawie czegoś** (2000). Natomiast wegług *Encyklopedii powszechnej PWN* rozumienie to „forma myślenia polegająca na uchwyceniu sensu zjawisk, dzięki poznaniu zasad ich funkcjonowania oraz i przyswojeniu znaczeń językowych” (1987).

Z. Semadeni uznaje, że „najwłaściwszym podejściem do ujmowania znaczenia pojęcia matematycznego jest: **kiedy, po co, do czego i w jaki sposób się je stosuje**, w matematyce i poza nią. W nauczaniu szkolnym większość pojęć (zwłaszcza arytmetyki i algebry) jest kształtowana właśnie przez ich **wykorzystywanie** (w rozmaitych zadaniach, rachunkach itp.), a nie przez definiowanie. Znaczenie poznaje się w trakcie aktywności matematycznych (...). Wittgengenstein stwierdził, iż znaczenie danego znaku lub wyrażenia **jest**

określone przez sposób posługiwania się nim (...). Rozumienie jakiegoś pojęcia lub nazwy w matematyce wymaga świadomości celu, dla którego jest wprowadzane (...) Thurston użył (w kontekście przykładowego pojęcia pochodnej) kilku określeń: rozumienie, pomyślane jako myślenie o, pojmowanie. Można przyjąć, że rozumienie jakiegoś pojęcia to rozumienie jego znaczenia" (2002b). Natomiast Z. Krygowska rozróżnia trzy rodzaje rozumienia, jednym z nich jest **rozumienie operatywne**. Rozumienie to oznacza umieć coś zrobić zachowując pewien ład, umieć wykonać pewien przepis z dobrym skutkiem, umieć wykonać pewien algorytm bez przywoływania jego definicji (1980).

Z. Semadeni (2002b) opisuje osiem interpretacji słowa „znaczenie". Zdecydowałam się skupić na jednym z nich – „**znaczeniu proceduralnym** nazwy, symbolu lub wyrażenia (w przypadku moich badań pojęcia parametru). Znaczenie proceduralne jest to ciąg określonych **czynności** (lub zbiór wielu możliwych ciągów czynności), które należy **wykonać** zgodnie z tym, co przekazuje nam ta nazwa lub znak". Analizę rozwiązań zadań prowadziłam w kierunku ustalenia rodzajów **działań podejmowanych przez uczniów w celu rozwiązania zadania z parametrem**. W oparciu o te działania formułowałam wnioski na temat **stanu** (Z. Semadeni, 2004) **rozumienia pojęcia parametru** przez ucznia w różnych znaczeniach:

a) Jeżeli dominującym działaniem w rozwiązaniu zadania było ustalenie przez ucznia dowolnej liczby w miejsce parametru i rozwiązanie zadania jedynie dla tej wartości parametru, to przyjmowałam, że **uczeń jest w stanie rozumienia pojęcia parametru w znaczeniu stałej wielkości**.

b) Jeżeli dominującym działaniem w rozwiązaniu zadania było ustalenie przez ucznia dowolnej liczby w miejsce parametru i rozwiązanie zadania dla tej wartości parametru oraz dodatkowo zmiana bieżącej wartości parametru na:

   – kilka innych wartości i przeanalizowanie rozwiązania dla każdej z nich,

   – wiele innych wartości (praktycznie do wykonania jedynie za pomocą technologii informacyjnej), gdzie ich przyjmowanie następowało w wyraźnych odstępach, a następnie przeanalizowanie rozwiązania dla tych wartości,

   to oznaczało, że**uczeń jest w stanie rozumienia pojęcia parametru w znaczeniu zbioru wartości**.

c) Jeżeli dominującym działaniem w rozwiązaniu zadania była zmiana bieżącej wartości parametru na wiele innych przy bardzo małym kroku przyjmowania kolejnych wartości tak, że obraz zmieniał się dla oka w sposób ciągły, co sugerowało, że wartości parametru również zmieniają się w sposób ciągły, (praktycznie do wykonania jedynie za pomocą technologii informacyjnej), a następnie przeanalizowanie rozwiązania dla tych wartości, to oznaczało, że **uczeń jest w stanie rozumienia pojęcia parametru w znaczeniu zmiennej wielkości.** Jeżeli uczeń nie przyjmował żadnej wartości w miejsce parametru, a jedynie rozwiązał zadanie w przypadku ogólnym, traktując parametr jako dowolną wielkość, to także oznaczało, że uczeń jest w stanie rozumienia pojęcia parametru w znaczeniu zmiennej wielkości.

d) Jeżeli dominującym działaniem w rozwiązaniu zadania było spostrzeżenie, że parametr może przyjmować wiele wartości, lecz by spełnione były warunki zadania uczeń wybiera jedynie te, które te warunki spełniają, to oznaczało, że **uczeń jest w stanie rozumienia pojęcia parametru w znaczeniu niewiadomej.**

W ramach prowadzonego w Instytucie Matematyki Akademii Pedagogicznej (obecnie Uniwersytetu Pedagogicznego) w Krakowie Seminarium z Technologii Informacyjnej w Nauczaniu Matematyki, podjęte zostały przeze mnie badania nad kształtowaniem pojęcia parametru wśród uczniów gimnazjum i nad zrozumieniem przez nich tego pojęcia. W trakcie badań zdecydowałam się wykorzystać nowoczesne środki dydaktyczne, takie jak programy komputerowe. Obrałam następujący problem badawczy:

Czy i w jakim stopniu programy komputerowe mogą być przydatne w procesie kształtowania pojęcia parametru?

W swoich badaniach zdecydowałam posłużyć się technologią informacyjną. Uzasadnieniem tego wyboru mógłby być jeden z wniosków końcowych badań przeprowadzonych przez T. Ratusińskiego: „komputer może pomóc w zrozumieniu pojęć matematycznych występujących w rozwiązywanym zadaniu, ilustrując na przykład obrazy tych pojęć" (Kąkol, Ratusiński, 2004). Takie spostrzeżenie zostało w tych badaniach odniesione także do pojęcia parametru.

Zaznajomiłam się z pracami badawczymi, poruszającymi problem rozumienia pojęcia parametru. W Polsce, jak dotąd, nie prowadzono badań na ten temat. Natomiast przeprowadzono je za granicą z wykorzystaniem technologii informacyjnej. Jednym z badaczy był C. van de Giessen (2001), który opisuje doświadczenia uczniów 16-17-letnich, związane z wizualizacją różnych znaczeń pojęcia parametru w trakcie rozwiązywania zadań dotyczących funkcji z użyciem programu Graphic Calculus. Znaczenia te wraz z opisem przybliżę posługując się poniższą tabelą:

Znaczenia parametru	Aspekt algebraiczny parametru	Aspekt graficzny parametru
stała wielkość (placeholder)	stała, konkretna wartość, jedna w określonym czasie	– jeden wykres funkcji w określonym czasie – parametr ma charakter statyczny
zbiór wartości (generalizer) „rodzina” rozwiązań („family” parameter)	parametr ma przypisany pewien zbiór wartości	wiązka wykresów funkcji
zmienna wielkość (changing quantity) „przesuwny” parametr („sliding” parameter)	zmieniająca się w sposób ciągły wartość	– wykres funkcji zmienia się w sposób ciągły wraz ze zmianą parametru – parametr ma charakter dynamiczny

Tabela 1.

Ponadto w Holandii, na Uniwersytecie w Utrechcie, w 2003 r. powstała praca autorstwa P. Drijvers, opisująca badania nad zrozumieniem przez uczniów pojęcia parametru. Uczniowie rozwiązywali zadania z zastosowaniem technologii informacyjnej. Badania P. Drijvers ujawniły cztery znaczenia pojęcia parametru: stałą wielkość, zbiór wartości, zmienną wielkość oraz niewiadomą, gdzie ostatnie wymienione znaczenie opisuje on następująco w kontekście zadań dotyczących funkcji:

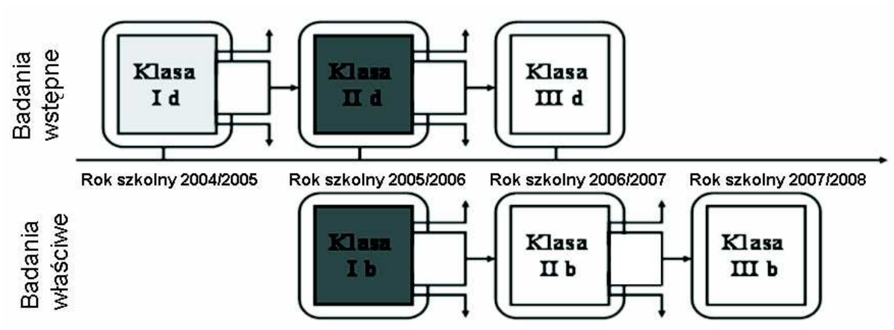
Znaczenia parametru	Aspekt algebraiczny parametru	Aspekt graficzny parametru
niewiadoma w zależności funkcyjnej (unknown – to-be-found)	pewien podzbiór wartości	pewien podzbiór wykresów funkcji w wiązce

Tabela 2.

Badania wspomnianych wyżej badaczy różnią się od moich, nie miały one bowiem charakteru ciągłego i nie zostały zaplanowane na kilka lat, podczas gdy moje obserwacje prowadzone są w toku trzyletniej pracy uczniów w gimnazjum. Realizuję przy tym koncepcję dydaktyczną wspomaganą technologią informacyjną, dotyczącą kształtowania pojęcia parametru, dokonując również jej weryfikacji w warunkach szkolnych. Ponieważ są to badania ciągłe, opanowanie podstawowych zasad działania programu komputerowego miało wpływ na rozwiązanie zadań z jego wykorzystaniem tylko w początkowym okresie moich badań. Ponadto, holenderska grupa przeprowadzająca badania nie składała się z nauczycieli badanej grupy młodzieży. W odróżnieniu od nich, ja uczę moją grupę uczniów matematyki oraz informatyki. W grupie tej znajdują się również uczniowie młodsi od tych z grupy badanej zza granicy. W trakcie realizacji mojej koncepcji uczniowie, w porównaniu do tych z Holandii, rozwiązują dużo więcej zadań związanych z pojęciem parametru, pochodzących z różnych działów matematyki, dlatego po pewnym czasie trwania badań, zadania z parametrem nie są postrzegane przez nich jako zadania „nowego typu".

3 Organizacja i metodologia badań

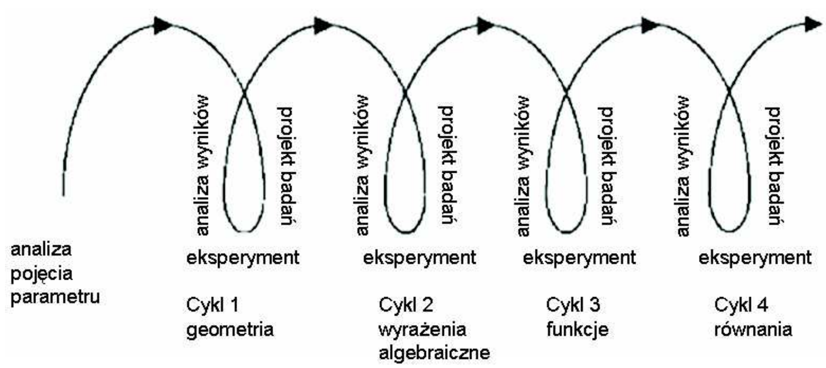
Badania moje mają charakter ciągły i zostały zaprojektowane na okres trzech lat. Grupy, w których prowadzone są badania stanowią uczniowie dwóch klas Gimnazjum nr 2 im. Jana Pawła II w Kętach, w których realizowany jest *Program nauczania matematyki z elementami informatyki w gimnazjum* (Kąkol, 1999). W jednej starszej klasie „d" przeprowadziłam trzyletnie badania wstępne, natomiast w młodszej klasie „b" jestem w trakcie przeprowadzania badań właściwych, którym również poświęcam trzy lata. Tę sytuację przedstawia rysunek poniżej (rys. 3).



Rysunek 3.

Praca uczniów tych klas, szczególnie nie wyselekcjonowanych pod kątem tych badań podlega monitorowaniu przeze mnie, nauczyciela-badacza. Jestem nauczycielem matematyki i informatyki w obu tych klasach. Lekcje matematyki prowadzę w sposób tak tradycyjny, jak i z użyciem programu komputerowego. Uczniowie na tych lekcjach przyzwyczajeni są do rozwiązywania różnorodnych zadań matematycznych z wykorzystaniem programów komputerowych.

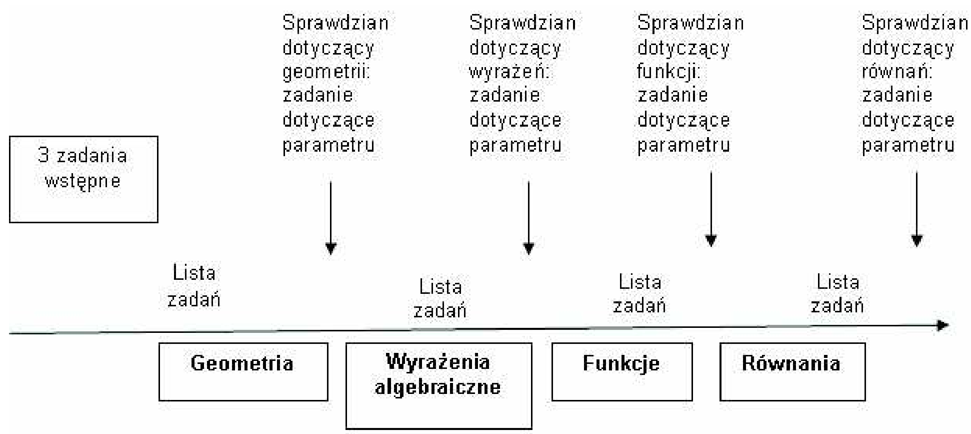
Prowadzone przeze mnie badania są zgodne z ideą eksperymentu naturalnego. W trakcie badań stosuję również metodę *design research*, wspieraną obserwacją oraz analizą dokumentów. Metoda badawcza *design research* została zastosowana również w badaniach nad zrozumieniem pojęcia parametru „Design research on the understanding of the concept of parameter" przeprowadzonych przez P. Drijvers w 2003 r. Metoda ta ma cykliczny charakter. Rozróżniamy dla tej metody makrocykle i mikrocykle. Przebieg badań przedstawiam za pomocą właśnie takich makrocykli i mikrocykli. Jeden makrocykl to badanie roczne w jednej klasie obejmujące fazy: planowanie działania, przeprowadzenie eksperymentu, analiza rezultatów badania obejmująca porównanie ze stanem początkowym. Natomiast mikrocykl dotyczy mniejszego badania przeprowadzonego w ramach jednego działu matematyki. Każdy mikrocykl składa się z takich samych faz jak wymienione powyżej dla makrocykli. Na planowanie działania w ramach jednego mikrocyklu składa się przygotowanie projektu badania, czyli listy zawierającej zadania do rozwiązania dla ucznia, związanego z jednym działem matematyki. Mikrocykle dla klasy I przedstawiam na rysunku poniżej (rys. 4):



Rysunek 4.

Charakterystyczną cechą metody design research jest to, iż ukierunkowana jest ona na śledzenie postępu w rozumieniu przez uczniów danego pojęcia. Powtarzalność wyżej wymienionych cykli umożliwia refleksję nad zrozumieniem pojęcia, dokonywaną po każdym cyklu oraz dostosowanie działań w ramach kolejnego cyklu do uzyskanego wcześniej poziomu rozumienia pojęcia przez uczniów.

W trakcie badań wstępnych w klasie I „d" utworzyłam cztery projekty badań (listy zadań ukierunkowanych na poznanie różnych znaczeń pojęcia parametru). Zadania z tych list pochodziły z podręcznika i zbioru zadań *Matematyka z elementami informatyki w gimnazjum* (red. H. Kąkol, 2000) dla klasy 1, jak również zostały one przeze mnie sformułowane na potrzeby prowadzonych badań. Podczas badań wstępnych weryfikowałam listy zadań z parametrem, które następnie zostały przeznaczone do badań właściwych w klasie I „b”. Każda lista zadań związana była z innym działem matematyki, który zaplanowany jest na realizację w tej klasie i zawierała również zadanie z parametrem, które uczniowie rozwiązywali w trakcie sprawdzianu, kończącego dany dział. Przykładowa lista zadań związana z działem *funkcje* stanowi załącznik 1. W trakcie całego roku szkolnego analizowałam rozwiązania zadań (z utworzonych przeze mnie list) z lekcji i sprawdzianu, w trakcie którego uczniowie również mogli posłużyć się programem komputerowym. Plan rocznej pracy w klasie pierwszej przedstawiam na poniższym schemacie (rys. 5):



Rysunek 5.

Na lekcjach informatyki uczniowie zaznajamiani byli z obsługą różnych programów komputerowych m. in. **TI InterActive!**. Walory dydaktyczne i techniczne tego programu opisałam w artykule w czasopiśmie MiK (Wadoń, 2004). Umiejętności obsługi przez uczniów tego programu odgrywały rolę przy rozwiązywaniu matematycznych zadań jedynie w początkowej fazie eksperymentu. Do rozwiązania zadań przy pomocy tego programu uczniowie nie używali wcale kartek papieru, dlatego iż program ten po uruchomieniu wygląda jak edytor tekstu – można w nim wpisywać tekst oraz wstawiać obiekty, przykładowo SliderContol (suwak), Graph (obiekt służący m. in. do sporządzania wykresu funkcji), MathBox (obiekt służący m. in. do obliczeń symbolicznych). Uczniowie, rozpoczynając pracę z tym programem, nie mieli do dyspozycji utworzonego przez nauczyciela dla nich pliku z umieszczonymi obiektami, mającymi decydujące znaczenie w danym do rozwiązania zadaniu. Mieli do dyspozycji jedynie sam program i sami decydowali, jaki zastosować obiekt oraz w którym momencie rozwiązywania zadania go użyć. W tym programie ma znaczenie kolejność definiowania obiektów, ponieważ zmiennych utworzonych za pomocą jednego obiektu w kolejno tworzonym obiekcie nie trzeba już deklarować. Można zatem stwierdzić, że zmienne i ich wartości są uwzględnione przez kolejny obiekt. Plik programu TI InterActive!, zawierający tekst i obiekty utworzone w tym programie przez uczniów, zapisywali oni na dysku komputera. Zatem plik tego programu jest dla mnie narzędziem badawczym tworzonym samodzielnie przez uczniów w trakcie ich pracy. W programie **Camtasia Studio** rejestruję rozwiązywane przez każdego ucznia klasy I „b” zadanie, co daje mi możliwość obejrzenia filmu, przedstawiającego ich pracę w programie TI InterActive!. Jako narzędzia badawcze służy mi zatem plik programu TI InterActive! oraz film z rejestracją jego pracy.

Na początku pracy w gimnazjum w klasie objętej badaniami wstępnymi oraz badaniami właściwymi zebrałam informacje o wynikach osiągniętych przez badanych uczniów na podstawie:

– wyników punktowych sprawdzianu w klasie VI szkoły podstawowej opracowanego przez OKE w Krakowie,
– świadectw ukończenia szkoły podstawowej – ocena końcowa z matematyki i informatyki,
– sprawdzianu skonstruowanego przez nauczycieli uczących matematyki w Gimnazjum nr 2 w Kętach przeprowadzonego wśród wszystkich klas I,
– skonstruowanego przez siebie sprawdzianu złożonego z trzech zadań wstępnych (treści zadań przytoczone zostały w punkcie 4). Celem przeprowadzenia tego sprawdzianu było określenie, w jakim znaczeniu uczniowie rozumieją pojęcie parametru. Uczniowie badanych klas nie byli wcześniej przeze mnie przygotowywani do rozwiązywania zadań z tego sprawdzianu oraz treść tych zadań również nie była im przeze mnie wyjaśniana. Uczniowie rozwiązywali wyżej wspomniane zadania na kartce papieru bez wykorzystania programów komputerowych.

4 Analiza rozwiązań zadań

W trakcie badań wstępnych okazało się, że utworzone przeze mnie listy zawierały dużą liczbę zadań, ukierunkowanych bardziej na zrozumienie pojęcia parametru w znaczeniu zmiennej wielkości niż w innych znaczeniach. Dlatego do badań właściwych wybrałam tylko niektóre z nich. Podczas badań wstępnych przeglądałam również listy zadań pod kątem możliwości zauważenia więcej niż jednego znaczenia parametru w jednym zadaniu. Takie zadania były dla mnie tym cenniejsze, gdyż nie sugerowały, że parametr ma jedno znaczenie przypisane do jednego zadania, lecz w trakcie rozwiązywania danego zadania może zmieniać swe znaczenie z jednego w drugie. Trudnym okazał się również wybór zadania z parametrem na sprawdzian podsumowujący dany dział. Uczniowie w niektórych wybranych zadaniach napotykali w trakcie ich rozwiązania na przeszkodę, która uniemożliwiła im dalsze rozwiązanie zadania, a w rezultacie nie pokazane zostało, w jakim znaczeniu opanowali oni pojęcie parametru. W tej sytuacji wybrane zadanie na sprawdzian zmieniałam na inne. Zmieniona została również po badaniach wstępnych kolejność zadań analizowanych na lekcjach. Ostatecznie ustalone do badań właściwych listy nie traktowane były w trakcie tych badań bardzo sztywno. Po każdym zakończonym dziale matematyki dokonywałam analizy rozwiązań zadań uczniów ze sprawdzianu. Jeżeli okazywało się, że jedno ze znaczeń jest lepiej rozumiane przez większość uczniów niż inne, wtedy w kolejnym dziale omawiane na lekcji były w większości zadania, które zwracały uwagę na słabiej zrozumiane znaczenie. Ponadto niektórzy uczniowie rozwiązywali więcej zadań z parametrem niż pozostała część kasy. Rozwiązywali je szybciej niż reszta i wykazywali się lepszym ich zrozumieniem. Jako nauczyciel-badacz mogłam sobie pozwolić na taką indywidualizację nauczania.

W dalszej części artykułu skupię się na rocznej pracy Karoliny, uczennicy klasy I „b", która w szkole podstawowej osiągała bardzo dobre wyniki. Jest osobą pracowitą i sumienną, chętnie rozwiązującą zadania dodatkowe. Analizę rozwiązań zadań, dokonanych przez tę uczennicę w czasie lekcji w klasie I opisywałam w czasopiśmie MiK (Wadoń, 2006). Natomiast w ramach tego artykułu przedstawię rozwiązania wykonanych przez nią trzech zadań w czasie sprawdzianu wstępnego oraz pięciu zadań z parametrem, które pochodziły z czterech sprawdzianów pisanych przez uczniów w klasie I „b". Prezentacja rozwiązania każdego z zadań zawierać będzie:

- opis pracy uczennicy nad zadaniem (na podstawie rejestracji komputerowej),
- wyniki w zakresie postępów w rozumieniu przez uczennicę pojęcia parametru.

Poniżej przedstawiam zadania ze sprawdzianu wstępnego:

Zadanie 1.

a) Jaka jest wartość liczbowa wyrażenia $a^2 - 4b$ dla $a = 4$ i $b = -2$?

b) Obierz kilka innych wartości za a i b oraz podaj wartość liczbową tych wyrażeń.

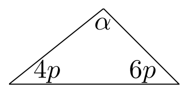
c) Czy każdą liczbę można podstawić za a i b?

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2.
Dla jakiej wartości m równanie $mx - 3 = 0$ ma rozwiązanie $x = 6$?

Zadanie 3.

a) Wyraź kąt α w zależności od pozostałych kątów (rys. 6).
b) Oblicz miarę kąta α dla kilku różnych wartości p.



Rysunek 6.

Karolina rozwiązała zadanie pierwsze poprawnie. Najpierw obliczyła wartość danego wyrażenia dla danych w zadaniu wartości a i b. Później obrała za a i b kilka innych wartości liczbowych, podstawiła je do wyrażenia algebraicznego, a następnie obliczyła jego wartość. Powinna zauważyć, iż wartość liczbowa wyrażenia może się zmieniać ze względu na wartość parametru a lub b. Niektórzy uczniowie tej klasy podstawili tylko jedną wartość liczbową za a oraz b, a następnie obliczyli wartość wyrażenia. Najprawdopodobniej uznali, że dane wyrażenie przyjmuje zawsze tylko jedną wartość liczbową lub też sądzili, iż a i b mogą przyjmować tylko jedną stałą wartość.

Gimnazjalistka rozwiązała zadanie drugie poprawnie. Skoro rozwiązanie równania ma być równe 6, to Karolina podstawiła za x liczbę 6 i obliczyła szukaną wartość parametru m jako 0,5.

Trzecie zadanie Karolina również rozwiązała poprawnie. Zapisała prawidłową zależność, podstawiła kilka wartości dla parametru p, jak również obliczyła stosowne wartości kąta α.

Wyniki

Podsumowując analizę rozwiązań pierwszego i drugiego zadania tej uczennicy ze wstępnego sprawdzianu, można było przypuścić, iż dostrzeżonym przez gimnazjalistkę znaczeniem parametru była wówczas nie tylko stała wielkość, ale również skończony zbiór wartości. Fakt ten sprawił, iż Karolina znalazła się w wyższym stanie rozumienia pojęcia parametru niż reszta klasy I „b". Natomiast w trzecim zadaniu parametr wystąpił w znaczeniu jednej wartości do odszukania. Jednak trudno stwierdzić, czy Karolina patrzyła na dane w tym zadaniu równanie w taki sposób, że parametr m może przyjmować nieskończenie wiele różnych wartości oraz że dla każdej wartości tego parametru otrzymujemy inne rozwiązanie danego równania. Można przypuścić, iż uczennica nie zdawała sobie jeszcze sprawy z tego faktu, tym samym nie widziała, że parametr może przyjmować znaczenie zmiennej wielkości. Analiza rozwiązań zadań przez uczniów tej klasy pochodzących z tego sprawdzianu wstępnego pozwala stwierdzić, iż większa ich część dostrzega jedynie znaczenie parametru jako stałej wielkości.

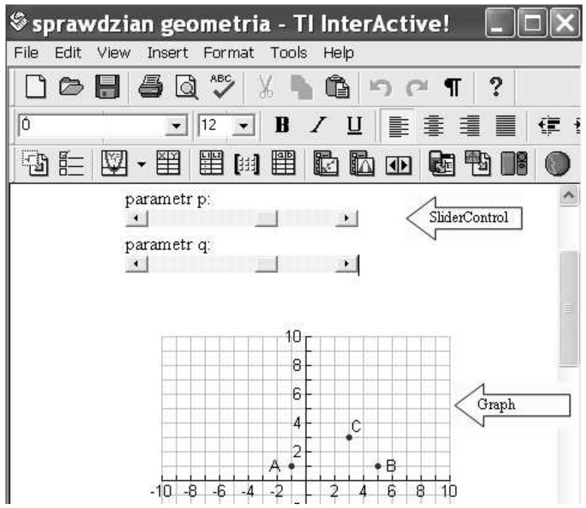
Jednak w klasie tej znalazła się również część uczniów, którzy nie rozwiązali żadnego z tych trzech zadań. W tym przypadku istotne było przyjrzenie się, jak właśnie ci uczniowie rozumieją pojedynczą literę występującą w zadaniu. W trakcie rocznej pracy Karoliny w klasie I dążyłam do tego, aby nie tylko upewnić się, czy moja wstępna diagnoza co do rozumienia przez nią pojęcia parametru była poprawna. Chciałam również pogłębić rozumienie przez nią tego pojęcia w znaczeniach: stałej wielkości i zbioru wartości w kontekście zadań z klasy I gimnazjum. Dążyłam także do tego, by rozwiązywanie zadań z parametrem przyczyniło się do rozumienia przez nią pojęcia parametru w wyższym stanie (tzn. parametru jako zmiennej wielkości czy niewiadomej). Trudno byłoby kształtować to pojęcie w znaczeniu zmiennej wielkości, wykorzystując jedynie do tego celu kartkę papieru. Dlatego do badań zdecydowałam się wprowadzić program komputerowy.

Pierwszym sprawdzianem, jaki pisali uczniowie klasy I, był **sprawdzian z geometrii**, na którym znalazło się następujące zadanie z tego działu związane z pojęciem parametru:

Dane są punkty $A = (-1, 1)$, $B = (5, 1)$, $C = (p, q)$. *Dla jakich wartości* p i q *trójkąt o wierzchołkach w tych punktach jest trójkątem równoramiennym? Czy istnieją takie wartości* p i q, *dla których z podanych punktów nie da się otrzymać trójkąta?*

Karolina zdecydowała się do rozwiązania tego zadania wykorzystać program komputerowy TI InterActive!. Po jego uruchomieniu posłużyła się dwukrotnie obiektem SliderControl, jednemu z nich przypisała literę p oznaczającą parametr, a drugiemu takiemu obiektowi przypisała literę q. Kolejnym obiektem, który utworzyła, był obiekt Graph, za pomocą którego w układzie współrzędnych zaznaczyła punkty A, B oraz C, gdzie punkt C został zaznaczony z uwzględnieniem bieżących wartości parametrów p i q na wcześniej zdefiniowanych suwakach (rys. 7).

Wybierając na pierwszym suwaku kolejne wartości parametru p (przy kroku zmian tych wartości ustalonym domyślnie w tym programie jako 0,1) uczennica starała się obserwować zmiany położenia punktu C. Odbywały się one w tym wypadku w kierunku poziomym. Karolina zauważyła, iż aby trójkąt ABC był równoramienny, punkt C musiałby być jednakowo oddalony od punktów A i B, zatem konfrontując różne wartości parametru p z położeniem punktu C względem punktów A i B, ustaliła, że parametr p musi przyjmować jedną wartość równą 2.



Rysunek 7.

Później zajęła się wyznaczeniem wartości parametru q. Zmieniając na drugim suwaku jego wartość (również dla kroku 0,1) zauważyła, iż punkt C przesuwa się w tym wypadku jedynie w kierunku pionowym. W tym przypadku wartość tego parametru mogła być dowolną liczbą, zatem otrzymała różne trójkąty równoramienne. Nie wyszczególniła tutaj, że dla $q = 1$ nie otrzymamy trójkąta, lecz trzy współliniowe punkty. Jednak ten fakt zauważyła przy szukaniu odpowiedzi na drugie zawarte w tym zadaniu pytanie, gdyż zapisała, że nie jesteśmy w stanie otrzymać trójkąta dla parametru $q = 1$ i parametru p przyjmującego w tym wypadku dowolną wartość. Karolina w swoim rozwiązaniu tego zadania wzięła jedynie pod uwagę przypadek, iż punkt C jest wierzchołkiem kąta między ramionami w trójkącie ABC.

Wyniki

Analizując rozwiązanie tego zadania można stwierdzić, iż zostało przez Karolinę pogłębione zrozumienie pojęcia parametru jako zbioru wartości. Zmieniała ona wartości obu parametrów na suwakach, przyjmując kolejne wartości dla tych parametrów jedna po drugiej. Co prawda, zapisała odpowiedź do pierwszej części zadania, że parametr q mógł przyjmować nieskończenie wiele wartości (różnych od 1), ale sprawdziła ten fakt jedynie przy kroku przyjmowania przez parametr kolejnych wartości równym 0,1. Kroku tego nie zmieniała, a zatem zmianę wartości dla tego parametru obserwowała skokowo. Taka skokowa zmiana jest charakterystyczna dla parametru w znaczeniu skończonego zbioru wartości.

W rozwiązaniu tego zadania nie da się, uwzględniając otrzymane wartości parametrów, podać jednego lub skończonej ilości punktów C z konkretnymi wartościami przypisanymi parametrom p i q. Pojęcie parametru w tym znaczeniu odpowiada za myślenie o pewnej rodzinie rozwiązań, dlatego bez pomocy programu komputerowego trudno byłoby Karolinie wyobrazić sobie graficzną analizę tego zadania.

Drugim sprawdzianem, jaki pisali uczniowie klasy I, był **sprawdzian z wyrażeń algebraicznych**, na którym znalazło się następujące zadanie z tego działu, związane z pojęciem parametru:

Dla jakiej wartości x wartość liczbowa wyrażenia x^2 wynosi odpowiednio:

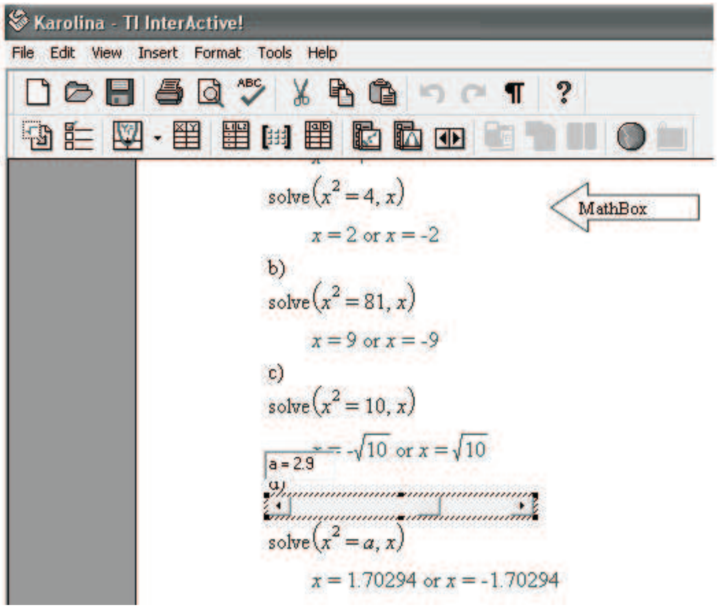
a) 4

b) 81

c) 10

d) a. *Jakiej wartości a nie może przyjmować?*

Jak poprzednio, Karolina zdecydowała się wykorzystać program komputerowy TI InterActive! do rozwiązania tego zadania. Wartość liczbowa wyrażenia x^2 wynosi 4 dla x równego 2 lub x równego -2. Karolina weryfikowała ten fakt poprzez użycie obiektu MathBox posługując się opcją *solve*. Wówczas wpisała $solve\,(x^2=4, x)$ i otrzymała powyższe rozwiązanie równania. Podobnie postąpiła z wartościami 81 oraz 10. Natomiast w przypadku, gdy w tym poleceniu Karolina użyła litery a zamiast danej liczby czyli $solve\,(x^2=a, x)$, wtedy jako rozwiązanie równania otrzymała $x = \sqrt{a}$ lub $x = -\sqrt{a}$. Ten podpunkt zadania, z dobrze znanym z poprzednich podpunktów schematem rozwiązania, wzbogacony jedynie o dodatkową literę a stanowił jednak barierę dla uczennicy, gdyż nie uznała ona tego ostatniego wyniku za rozwiązanie zadania. Nawet zdecydowała się rozwiązać zadanie inaczej. W tym momencie zastosowała obiekt suwak przypisując mu literę a i umieściła go przed obiektem MathBox, w którym wpisane było ostatnio wspomniane równanie z parametrem a. Przy pomocy suwaka przy kroku zmian wartości parametru równym 0,1 dla kolejnych wartości parametru a Karolina obserwowała, jak zmienia się rozwiązanie równania (rys. 8).



Rysunek 8.

W tej sytuacji zauważyła, że nie istnieje rozwiązanie równania dla a z przedziału $(-\infty, -0,1)$. Niestety, w zadaniu tym nie skorzystała ze zmiany kroku przyjmowania kolejnych wartości przez parametr a i zostawiła to zadanie z takim rozwiązaniem.

Wyniki

Analizując rozwiązanie tego zadania przez Karolinę można stwierdzić, iż rozumienie przez nią parametru jako zbioru wartości doprowadziło do sformułowania niepełnej odpowiedzi. Nie zastanowiła się, jakie jest rozwiązanie równania dla liczb między $-0,1$ oraz liczbą 0. Jednak bez zmiany kroku przyjmowania kolejnych wartości przez parametr Karolina nie zauważyła, że jego wartości mogą się zmieniać w sposób ciągły. Zatem uczennica pozostała w dalszym ciągu w stanie rozumienia pojęcia parametru w znaczeniu zbioru wartości.

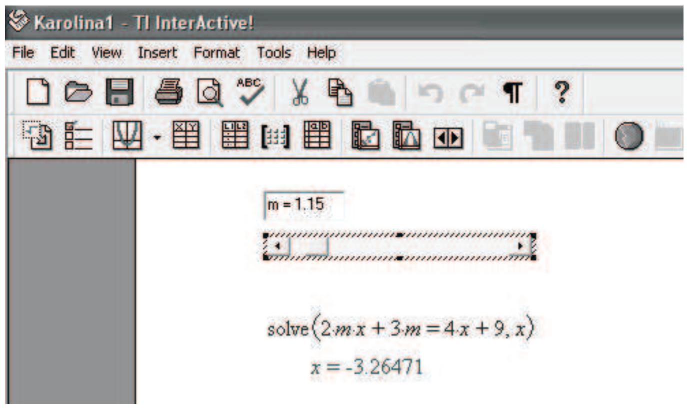
Atutem wymienionego programu komputerowego jest to, że daje on możliwość samodzielnego podejmowania decyzji o zastosowaniu obiektów potrzebnych w zadaniu oraz, co ważne, zmusza do dbałości o umieszczenie ich w odpowiedniej kolejności. Kolejność obiektów w tym programie komputerowym odgrywa znaczenie; na przykład deklaracja litery a jako parametru, dokonana za pomocą suwaka, musi poprzedzać obiekt, w którym rozwiązujemy równanie z tym parametrem. W tym przypadku „wiedza matematyczna potrzebna do rozwiązania zadania przeplata się z wiedzą instrumentalną (dotyczącą używania programu komputerowego)" (Laborde, 2005). Schemat użycia tego programu do rozwiązania zadań z parametrem wymaga funkcjonalnego widzenia obiektów matematycznych; na przykład, aby otrzymać szczególne rozwiązanie równania z parametrem należy najpierw ustalić wartość tego parametru (obiekt suwak), następnie rozwiązać to równanie dla bieżącej wartości tego parametru (obiekt MathBox). Umieszczenie tych obiektów w odwrotnej kolejności sprawi, iż otrzymamy ogólne rozwiązanie równania z parametrem a, natomiast umieszczony obiekt suwak poniżej obiektu MathBox nie będzie już miał dla tego równania żadnego znaczenia.

Występowanie dwóch liter w równaniu sprawiło, że Karolina nie potrafiła zinterpretować rezultatu wpisania polecenia $solve\,(x^2 = a, x)$, sprawiając wrażenie osoby nie uświadamiającej sobie sensu wykonywanych w zadaniu obliczeń. Najczęstszym schematem postępowania uczennicy w odniesieniu do parametru było wstawienie w miejsce parametru konkretnej wartości liczbowej. W przypadku, gdy zamiast liczby występowała litera oznaczająca parametr, Karolina nie potrafiła zinterpretować go jako pewne uogólnienie. Do tego potrzebne było w tym momencie zrozumienie pojęcia parametru w wyższym stanie. Świadczyło to o braku doświadczenia w zmaganiu z zadaniami, w których rozwiązaniu wymagane jest stosowanie języka symbolicznego.

Trzecim sprawdzianem, jaki pisali uczniowie klasy I „b", był **sprawdzian z *równań***, na którym znalazły się następujące **dwa zadania** z parametrem:

Zadanie 1. *Jak zmienia się rozwiązanie równania* $2mx + 3m = 4x + 9$*, gdy* m *należy do przedziału* $\langle 1, 3\rangle$*?*

Karolina zdecydowała się wykorzystać do rozwiązania obu tych zadań program komputerowy TI InterActive!. Utworzyła obiekt SliderControl, ustaliła za jego pomocą literę oznaczającą parametr jako m oraz przypisała zakres zmienności tego parametru jako przedział $\langle 1, 3\rangle$. Kolejny obiekt, jaki utworzyła, to MathBox, w którym wpisała dane w zadaniu równanie. Karolina przyglądnęła się rozwiązaniom równania na krańcach przedziału; dla parametru $m = 1$ rozwiązanie równania jest równe $x = -3$, z kolei dla parametru $m = 3$ rozwiązanie równania to $x = 0$. Zwiększała na suwaku wartość parametru m przy kroku zmian jego wartości równym $0,1$. Zauważyła, iż dla $m = 1$ do wartości 1,9 rozwiązanie równania maleje począwszy od wartości -3. Z kolei dla $m = 1,9$ wynosi ono $-16,5$. Dla $m = 2$ rozwiązanie równania nie istnieje, natomiast dla wartości $m = 2,1$ rozwiązanie równania wynosi 13,5, i dalej wraz ze wzrostem wartości tego parametru do wartości 3 rozwiązanie równania maleje do 0. Zmniejszyła krok przyjmowania kolejnych wartości przez parametr jako $0,01$ i później jeszcze jako 0,001. Dla każdego z tych kroków obserwowała, jak parametr m dynamicznie przechodził przez zbiór wartości z przedziału $\langle 1, 3\rangle$. Najprawdopodobniej dostrzegła, iż ciągłość zmian wartości parametru powodowała ciągłą zmianę rozwiązania równania. Wówczas okazało się, iż rozwiązanie równania dla lewostronnego otoczenia wartości parametru $m = 2$ czyli dla 1,9; 1,99 oraz 1,999 jest coraz mniejszą liczbą ujemną. Natomiast dla prawostronnego otoczenia wartości m równej 2 czyli 2,1; 2,01; 2,001 rozwiązanie równania jest coraz większą dodatnią liczbą (rys. 9).



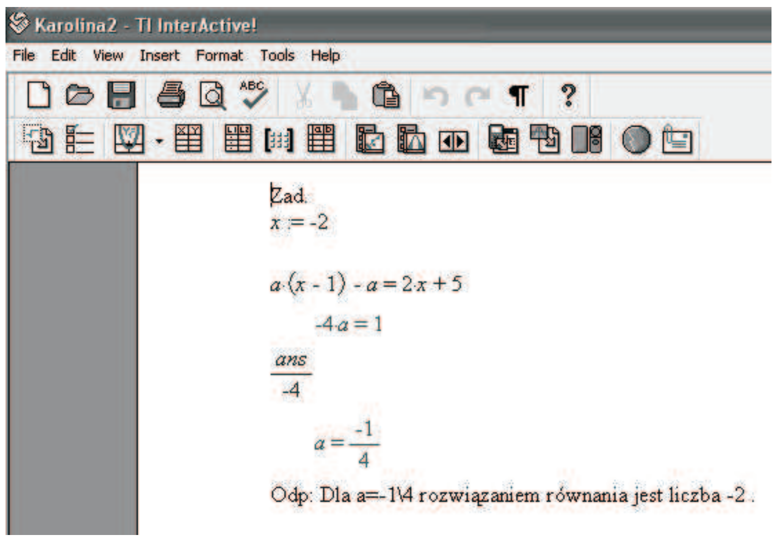
Rysunek 9.

Wyniki

Analizując rozwiązanie tego zadania można stwierdzić, iż Karolina była świadoma ciągłości zmian parametru i adekwatnych do tych zmian modyfikacji postaci równania. Dostrzeżenie tego faktu pozwala stwierdzić, iż zaczynała zauważać kolejne znaczenie parametru w sensie zmiennej wielkości, znajdujące się już w wyższym stanie w porównaniu ze znaczeniami: stałą wielkością i zbiorem wartości. Co więcej, przy każdym kroku przyjmowania kolejnych wartości parametru w pobliżu granicznej wartości tego parametru, tzn. 1,9; 1,99; 1,999 oraz 2,1; 2,01; 2,001 Karolina nie używała suwaka w sposób pozwalający zmieniać wartości w sposób ciągły, ale wartość po wartości rozpatrywała spełnienie warunków zadania. W tej sytuacji suwak pozwolił na wzmocnienie u Karoliny pojęcia parametru jako zbioru wartości.

Zadanie 2. *Znajdź taką wartość parametru a, aby rozwiązaniem równania $a(x - 1) - a = 2x + 5$ była liczba -2.*

Na początku rozwiązywania równania Karolina przypisała literze x wartość równą -2, deklarując w obiekcie MathBox $x := -2$. Wówczas po wpisaniu w kolejnym obiekcie MathBox danego w zadaniu równania, przyjęło ono po uwzględnieniu wartości zmiennej x postać $-4a = 1$. Dodatkowa litera a, która występowała na początku rozwiązywanego zadania w znaczeniu parametru, w tym momencie przyjęła rolę niewiadomej, którą należy wyliczyć. Ten program komputerowy umożliwia rozwiązanie równania krok po kroku, tzn. jeśli teraz w kolejnym oknie MathBox wpiszemy jedynie: „:(-4)", to wtedy ostatnio wpisane równanie zostaje obustronnie podzielone przez tę liczbę. Po tak wykonanym działaniu, Karolina otrzymała wartość, jaką powinien przyjąć parametr a. Zapisała odpowiedź, iż dla $a = -\frac{1}{4}$ rozwiązaniem równania jest liczba -2 (rys. 10).



Rysunek 10.

Wyniki

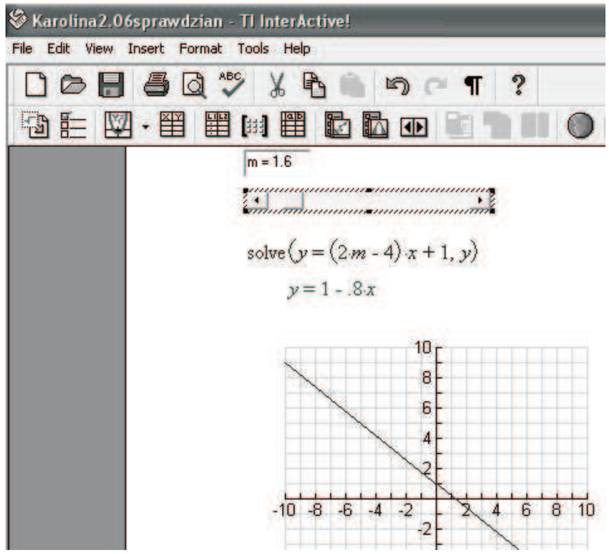
Karolina już po przeczytaniu treści zadania miała pomysł na jego rozwiązanie. Otrzymane równanie, w którym danej w równaniu zmiennej x przypisana jest określona stała wartość, nie budziło zastrzeżeń co do dalszego rozwiązania. Jest to pewien szczególny przypadek zadania z parametrem, w którym wybieramy te jego wartości, które spełniają pewien zadany warunek w zadaniu, jakim w tym wypadku było to, iż rozwiązanie ma być równe -2. Rozwiązanie tego zadania z parametrem, w którym przyjmował on w pewnym etapie rozwiązywania zadania znaczenie niewiadomej, nie sprawiło uczennicy żadnej trudności.

Czwartym sprawdzianem, jaki pisali uczniowie klasy I „b", był **sprawdzian z *funkcji***, na którym znalazło się następujące zadanie z tego działu związane z pojęciem parametru:

Dla jakich dodatnich wartości parametru m *funkcja* $y = (2m - 4)x + 1$ *jest malejąca?*

W trakcie rozwiązywania tego zadania uczennica zdecydowała się posłużyć programem komputerowym TI InterActive!. Uczennica na początku rozwiązywania zadania utworzyła obiekt SliderControl reprezentujący wartości parametru m oraz obiekt Graph, za pomocą którego sporządziła wykres funkcji danej w zadaniu. Przypuszczam, iż uczennica wiedziała, że w trakcie rozwiązywania tego zadania należy skorzystać z twierdzenia o monotoniczności funkcji liniowej. Analizując dynamicznie zmieniający się wykres funkcji poprzez ustalanie na suwaku kolejnych wartości parametru łatwo zauważyła że dana funkcja jest malejąca nie tylko dla ujemnych wartości parametru m, lecz też dla niektórych dodatnich wartości tego parametru. Spostrzegła, że ważną rolę w zadaniu odgrywa wartość parametru równa 2. Dla tej wartości wykres funkcji był równoległy do osi x. Poprzez zmiany wartości parametru na suwaku przy domyślnym kroku tych zmian równym 0,1, stwierdziła, iż funkcja jest malejąca, gdy wartości m będą z przedziału $(-\infty; 1,9\rangle$. Karolina zmieniła krok przyjmowania kolejnych wartości przez parametr z 0,1 na 0,01. W tym przypadku zdecydowała się na kolejne modyfikacje wartości parametru na suwaku, i wówczas stwierdziła, że wartości parametru m spełniające warunki zadania będą należeć do przedziału $(-\infty; 1,99\rangle$. I kolejno, po zmianie kroku z 0,01 na 0,001 i dokonaniu kolejnych zmian wartości parametru na suwaku, wartości parametru m, spełniające warunki zadania będą należeć do przedziału $(-\infty; 1,999\rangle$. Prawdopodobnie w wyobraźni Karoliny odbywała się dalsza zmiana kroku przyjmowania kolejnych wartości przez parametr m i zdecydowała ona, że przedziałem spełniającym warunki zadania będzie $(-\infty, 2)$ (rys. 11).

Czytając ponownie treść zadania, gimnazjalistka zauważyła, iż skoro wartość parametru m ma być dodatnia, to przedziałem spełniającym warunki zadania będzie $\langle 0,1;\ 2)$. Stwierdziła to bez odbywania żadnych manipulacji wartościami parametru na suwaku. Jednak po chwili zastanowienia szybko powyższy przedział zmodyfikowała na $(0,\ 2)$. Można przypuszczać, iż opisany wcześniej tok postępowania Karoliny związany ze zmniejszaniem wartości kroku z 0,1 na 0,01 i 0,001 oraz obserwacją coraz dokładniejszych zakresów wartości parametru, spełniających warunki zadania, w tym momencie dokonał się już w wyobraźni Karoliny.



Rysunek 11.

Wyniki

Po doświadczeniach zdobytych w czasie rozwiązywania zadań z lekcji uczennica była już świadoma ciągłości zmian parametru, związanych z równoczesnymi płynnymi zmianami na wykresie funkcji. Widziała konsekwencje zmniejszania kroku zmian wartości parametru na coraz dokładniejsze zakresy jego wartości, spełniające warunki zadania.

5 Podsumowanie

W Polsce nie prowadzono badań nad zrozumieniem pojęcia parametru bez wykorzystywania technologii informacyjnej. Zatem nie można przeprowadzić porównania wyników przeprowadzonych przeze mnie badań z badaniami nie uwzględniającymi technologii informacyjnej.

a) Rola programu komputerowego TI InterActive! w rozwiązywaniu zadań za jego pomocą

Analiza rejestracji dokonana za pomocą programu CamtasiaStudio oraz plików programu TI InterActive!, zawierających rozwiązanie powyższych zadań przez Karolinę ujawniła następujące cele zastosowania programu komputerowego w trakcie ich rozwiązywania.

- **Eksperymentowanie**

Dzięki użyciu obiektu SliderControl w trakcie rozwiązywania zadania za pomocą programu TI InterActive! Karolina mogła podstawiać różne wartości dla określonego w zadaniu parametru. Mogły nimi być dowolne liczby, nie tylko całkowite, również nie tylko dodatnie, jak to zwykle przyjmuje się rozwiązując zadanie bez wykorzystania technologii informacyjnej. Uczennica obserwowała sytuację daną w zadaniu przy różnych wartościach parametru. Następnie stawiała hipotezy i weryfikowała je.

- **Wizualizacja skokowych zmian wartości parametru**

Skokowe zmiany wartości parametru i ich konsekwencje dla sytuacji w danym zadaniu byłoby ciężko zauważyć, rozwiązując je jedynie z wykorzystaniem „kartki i ołówka". Taką obserwację mógłby sobie wyobrazić gimnazjalista, gdyby zmiana miała dotyczyć jedynie skończonego zbioru wartości. A przecież może również chodzić o nieskończony zbiór wartości, np. o kroku zmian wartości parametru równym 0,1.

- **Wizualizacja ciągłości zmian wartości parametru**

Zastosowanie obiektu SliderControl w trakcie rozwiązywania zadania niewątpliwie pomogło Karolinie w zrozumieniu, że parametr jest rodzajem uogólnienia, że zastępuje dowolną liczbę, co oznacza, że w jego miejsce można wstawić każdą wartość liczbową. Dzięki temu obiektowi uczennica spostrzegła, że parametr przyjmuje określone wartości jedna po drugiej, każdą w określonym czasie. Zrozumienie bez użycia programu komputerowego faktu, że wartości parametru dynamicznie przechodzą przez pewien zbiór wartości byłoby z pewnością trudniejsze do zrozumienia dla uczennicy.

- **Animacja sytuacji danej w zadaniu**

Dzięki możliwości animacji w tym programie komputerowym Karolina mogła zauważyć, że każdej konkretnej wartości parametru przypisane jest jedno rozwiązanie równania, jeden przepis funkcji, innymi słowy, tej wartości odpowiada jeden szczególny przypadek zadania. Wraz ze zmianą wartości parametru uczennica dostrzegała, że zmiany te mają konsekwencje we wzorze czy wykresie funkcji. Fakt ten nie był tak trudny do zobaczenia, jak byłby bez użycia tego programu komputerowego.

• **Obliczenia symboliczne**

W programie TI InterActive! można rozwiązywać zadanie z parametrem bez ustalania jakiejkolwiek dla niego wartości. Rozwiązując krok po kroku równanie można parametr traktować jako daną ustaloną wielkość. Jednak Karolina rzadko korzystała z takiej możliwości rozwiązania zadania. Łatwiej jej było ustalić konkretne wartości parametru i wówczas analizować rozwiązanie zadania.

• **Skupienie uwagi na zadaniu**

Na moją prośbę Karolina napisała kilka zdań o pracy na lekcji matematyki z wykorzystaniem programu komputerowego: „*Program TI InterActive! jest bardzo pożyteczny. Może służyć za komputerowy zeszyt. Bardzo dobrze i łatwo się z nim pracuje. Nie trzeba skupiać się na wyliczeniu wyniku, tylko na poprawnym zapisaniu działania.*" Dosyć często zdarza się, iż uczniowie gubią się rozwiązując zadanie z parametrem, nie pamiętają do czego tak naprawdę w zadaniu dążą, dlatego program komputerowy, przejmując część obliczeniową, pozwala skupić się na istocie problemu danego w zadaniu.

b) Aktywności matematyczne uczennicy ujawnione w trakcie rozwiązywania powyższych zadań

Analiza rozwiązań zadań pozwala na dokonanie spostrzeżeń na temat aktywności matematycznych uczennicy:

• **Schematyzowanie**

Na początku rozwiązywania zadań z parametrem Karolina ustalała pewną wartość parametru. Następnie, albo tworzyła obiekt Graph, by zwizualizować sytuację w zadaniu, albo też zamiast tego obiektu posługiwała się obiektem MathBox, by otrzymać algebraiczne rozwiązanie zadania. Następnie zmieniała wartość tego parametru, a wówczas w obiektach Graph i MathBox uwzględniona zostawała nowa wartość parametru. Uczennica, zmieniając jedynie jego wartość, mogła analizować graficzne i algebraiczne rozwiązanie zadania dostosowane do nowej wartości parametru. W ten sposób Karolina tworzyła samodzielnie pewien schemat rozwiązywania zadań z parametrem.

• **Stawianie i weryfikacja hipotez**

Uczennica nie uznawała wyniku prowadzonych przez siebie obserwacji sytuacji danej w zadaniu przy użyciu programu komputerowego jako ostatecznego rozwiązania zadania. Traktowała je tylko jako hipotezę, którą próbowała zweryfikować w drodze obliczeń.

• **Dostrzeganie analogii**

Poprzez podstawianie różnych wartości parametru Karolina dostrzegała analogie między szczególnymi przypadkami zadania, otrzymanymi dla kolejnych wartości tego parametru.

• **Uogólnianie**

Na podstawie obserwacji prowadzonych dla różnych wartości parametru przy dowolnym kroku przyjmowania kolejnych wartości przez parametr (równym np. 0,1; 0,01 czy 0,001) Karolina przeprowadzała rozumowanie na temat ogólnego rozwiązania zadania.

• **Stosowanie języka symbolicznego**

Początek rozwiązania zadań z parametrem przez Karolinę najczęściej przebiegał w ten sposób, iż przyjmowała ona dla parametru konkretne wartości. Następnie dla tych ustalonych przez siebie wartości parametru rozważała dalszą część zadania. Dlatego można stwierdzić, że uczennica ta w przypadku rozwiązywania zadań z parametrem rzadko dostrzegała możliwość rozwiązania zadania w sytuacji ogólnej, korzystając w zapisie jego rozwiązania z języka symbolicznego.

• **Specyfikacja**

Rozwiązanie zadania z parametrem, w którym ten parametr jawi się w znaczeniu zmiennej wielkości, daje pewną klasę rozwiązań. Przyjęcie danych w zadaniu specyficznych warunków do spełnienia sprawiało, że wówczas parametr występował w znaczeniu niewiadomej. Rozwiązanie zadania z parametrem występującym w tym znaczeniu wymagało od uczennicy analizy pewnej szczególnej sytuacji, co nie sprawiało jej trudności.

c) Wyniki badań dotyczące rozumienia pojęcia parametru

Na początku roku szkolnego klasy I Karolina najprawdopodobniej wykazywała rozumienie parametru w dwóch znaczeniach: stałej wielkości i skończonego zbioru wartości. W trakcie lekcji uczniowie rozwiązywali zadania z parametrem, w tym czasie pojęcie to było przeze mnie kształtowane i sprawdzane było jego rozumienie pod koniec każdego działu matematyki, omawianego w klasie I. Analiza rozwiązań zadań przez Karolinę dokonana w ramach tego artykułu pozwoliła na wysnucie wniosków, w jakim stanie zrozumienia pojęcia parametru jest Karolina w chwili rozwiązywania przez nią tych zadań:

- Karolina pogłębiła rozumienie pojęcia parametru w znaczeniu zbioru wartości. Zmieniała ona wartości parametru na suwaku, przyjmując kolejne wartości dla tego parametru jedna po drugiej. Zmianę jego wartości obserwowała skokowo, co jest charakterystyczne dla parametru w znaczeniu zbioru wartości.
- Uczennica przybliżyła się do rozumienia pojęcia parametru w znaczeniu zmiennej wielkości. Zmieniała krok przyjmowania kolejnych wartości przez parametr na 0,01 oraz 0,001 i zauważyła, że jego wartości mogą się zmieniać w sposób ciągły i adekwatnie do tych zmian następowała modyfikacja wzorów, równań czy wykresów funkcji. W tym przypadku uczennica analizowała dynamicznie zmieniający się rysunek, będący ilustracją zadania.
- Karolina w trakcie rozwiązywania zadań z parametrem przyjmowała w miejsce parametru konkretną wartość liczbową. W przypadku, gdy zamiast liczby występowała litera oznaczająca parametr, uczennica nie potrafiła zinterpretować go jako pewne uogólnienie.
- Gimnazjalistka nie miała trudności w rozwiązaniu zadań, w których parametr przyjmował na pewnym etapie rozwiązywania znaczenie niewiadomej. W trakcie rozwiązania takich zadań, wybierała te jego wartości, które spełniały pewien podany w zadaniu warunek.

W artykule tym zawarłam analizę rozwiązań zadań ze sprawdzianów z wykorzystaniem programu komputerowego tylko jednej uczennicy. W dalszych badaniach będę chciała dowiedzieć się, jakie są postępy uczniów w rozumieniu pojęcia parametru w kontekście zadań z parametrem, rozwiązywanych w drugiej i trzeciej klasie gimnazjalnej.

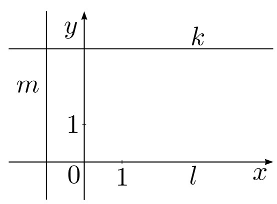
Na podstawie wyników przeprowadzonych badań w klasie pierwszej można stwierdzić, że programy komputerowe umożliwiają koncentrację na zrozumieniu istoty pojęcia i strategiach rozwiązywania problemu, uwalniając od żmudnych obliczeń. Szczegółowe konsekwencje dla nauczania wynikające z wniosków przeprowadzonych badań zostaną przytoczone po ich zakończeniu. Ciekawym byłoby również sprawdzenie, jak uczniowie radziliby sobie w zrozumieniu pojęcia parametru w działach matematyki nie uwzględnionych w moich badaniach.

Załącznik 1

Projekt badania (lista zadań) w klasie I w trakcie realizacji działu *funkcje* z uwzględnieniem pojęcia parametru

Zadania rozwiązywane w czasie lekcji:

Zadanie 1.
Dobierz współczynniki a i b we wzorze funkcji $y = ax + b$ w taki sposób, aby wykresem otrzymanej funkcji była prosta k. Dla jakich a i b wykresem będzie prosta l?
Czy potrafisz dobrać współczynniki a i b w taki sposób, aby otrzymać prostą m?
Czy prosta m jest wykresem funkcji? (rys. 12)



Rysunek 12.

Zadanie 2.
Dla jakich wartości a punkt $A = (1, 5)$ należy do wykresu funkcji liniowej $y = ax + 4$?

Zadanie 3.
Dla jakich wartości b punkt $A = (-1, 4)$ należy do wykresu funkcji liniowej $y = x + b$?

Zadanie 4.
Dla jakich wartości a i b wykres funkcji przechodzi przez punkty o współrzędnych $A = (0, 3)$, $B = (-6, 0)$?

Zadanie 5.
Dla jakich wartości m wykres funkcji $y = -mx$ będzie tworzył z dodatnią częścią osi odciętych kąt:

a) $0°$,
b) $45°$,
c) $90°$,
d) $135°$,
e) $180°$?

Zadanie 6.
Dla jakich wartości m wykresy funkcji $y = 2mx$ będą do siebie prostopadłe?

Zadanie 7.
Narysuj wykres funkcji $y = 2x + b$. Zmieniając wartość parametru b dla każdej z nich, oblicz miejsce zerowe. Wyniki zapisz w tabeli:

b						
miejsce zerowe						

Czy istnieje jakaś zależność między wartościami współczynnika b, a odpowiednimi wartościami miejsc zerowych? Czy te wartości są wielkościami wprost proporcjonalnymi?
Jakim wzorem wyraża się ta zależność? Zapisz ten wzór w postaci funkcji i narysuj jej wykres.

Zadanie 8.
Narysuj wykres funkcji $y = ax + b$. Zmieniając wartość parametru a dla każdej z nich, oblicz miejsce zerowe. Wyniki zapisz w tabeli:

a						
miejsce zerowe						

Czy istnieje jakaś zależność między wartościami współczynnika a i odpowiednimi wartościami miejsc zerowych? Czy te wartości są wielkościami wprost proporcjonalnymi?
Jakim wzorem wyraża się ta zależność? Zapisz ten wzór w postaci funkcji i narysuj jej wykres.

Zadanie 9.
Narysuj wykres funkcji $y = ax + b$ dla $a = -1$ oraz $b = 4$.
Oblicz pole trójkąta ograniczonego wykresem funkcji oraz osiami układu współrzędnych. Dla jakich wartości parametrów a i b pola otrzymywanych trójkątów będą równe polu pierwszego trójkąta? Co powiesz o zależności między współczynnikami a i b? Zapisz tę zależność wzorem i narysuj jej wykres.

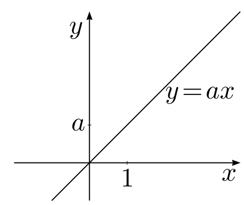
Zadanie 10.
Narysuj wykres funkcji $y = ax + b$ dla różnych wartości współczynników a i b. W każdym przypadku oblicz miejsce zerowe tej funkcji, określ przedział, w którym funkcja przyjmuje wartości dodatnie, oraz przedział, w którym funkcja przyjmuje wartości ujemne.

Dobierz wartości współczynników w taki sposób, aby funkcja liniowa przyjmowała wartości dodatnie dla liczb rzeczywistych ujemnych. Dla jakich współczynników funkcja liniowa będzie przyjmowała wartości dodatnie dla wszystkich liczb rzeczywistych? Dla jakich współczynników będzie przjmowała wartości ujemne?

Zadanie 11.

Dana jest prosta o równaniu $y = ax$. Narysuj proste o równaniach $y = ax + 1$, $y = ax + 5$, $y = ax - 3$ (rys. 13). Co powiesz o położeniu prostej $y = ax + b$, gdy:

a) $b > 0$,
b) $b < 0$,
c) $b = 0$.



Rysunek 13.

Zadanie 12.

Dane są dwie funkcje $f(x) = |x + 2|$ orz funkcja $g(x) = m$. Dobierz tak wartość m, aby pole trójkąta ograniczonego wykresem funkcji f i funkcji g było równe 4.

Zadanie 13.

Narysuj wykresy funkcji:

a) $y = |x + b|$,
b) $y = |x| + b$.

Zbadaj zależność między wartościami współczynnika b, a odpowiednimi wartościami miejsc zerowych.

Zadanie 14.

Dla jakiej wartości parametru m funkcja dana wzorem $y = (2m - 3)x + 3$ przyjmuje wartości dodatnie tylko dla $x < 3$?

Zadanie 15.

Dla każdej wartości a równanie $y = ax - 5a + 2$ jest wzorem funkcji liniowej.

1. Narysuj wykres funkcji liniowej dla przynajmniej czterech wartości a.
2. Co obserwujesz na wykresach, gdy wartości a rosną?

3. Jaki punkt należy do wykresu powyższej funkcji dla każdej wartości a? Jak sprawdzić ten fakt obliczeniowo?
4. Wyznacz te wartości parametru a, dla których miejscem zerowym powyższej funkcji jest liczba większa od 1 oraz mniejsza od 4.

Zadanie 16.

Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja $y = (2a + 1)x + (b - 1)$ jest rosnąca oraz przecina oś y w punkcie $(0, -2)$?

Zadanie rozwiązywane w czasie sprawdzianu:

Dla jakich dodatnich wartości parametru m funkcja $y = (2m - 4)x + 1$ jest malejąca?

Literatura

B i l l s, L.: 2001, Shifts in the Meaning of Literal Symbols, w: *Proceedings of the twenty fifth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Utrecht, Netherlands, 161-168.

D r i j v e r s, P. H. M.: 2003, *Learning algebra in a computer algebra environment – Design research on the understanding of the concept of parameter*, rozprawa doktorska, Proefschrift Universiteit Utrecht.

G i e s s e n, C. v a n d e: 2001, The visualization of parameter, w: *Proceedings of the Fifth International Conference on Technology in Mathematics Teaching*, University of Klagenfurt, Austria, 97-100.

K ą k o l, H., R a t u s i ń s k i, T.: 2004, Rola komputera w procesie rozwiązywania zadań, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **26**, 119 -142.

K ą k o l, H. (red.): 1999, *Program nauczania matematyki z elementami informatyki w gimnazjum*, Wydawnictwo *Dla szkoły*, Wilkowice.

K ą k o l, H. (red.): 2000, *Matematyka z elementami informatyki w gimnazjum, klasa 1,* Wydawnictwo *Dla szkoły*, Wilkowice.

K o n i o r, J.: 2002, O pojęciu zmiennej w nauczaniu szkolnym matematyki, w: Żabowski, J. (red.), *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki, t. 4*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock, s. 339-375.

K r y g o w s k a, Z.: 1980, *Zarys Dydaktyki Matematyki, tom II*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogogiczne, Warszawa.

K r y g o w s k a, Z.: 2000, O poprawne rozumienie przez uczniów symbolu literowego w nauce algebry, w: Żabowski, J. (red.), *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki, t. 1*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock, s. 27-43.

K u s i o n, L.: 1996, Różne aspekty litery jako istotnego składnika języka matematycznego na tle czynnościowego nauczania, WSP w Krakowie, *Rocznik Naukowo–Dydaktyczny, Prace z Dydaktyki Matematyki* **IV**, s. 163-200.

L a b o r d e, C.: 2005, Projektowanie nauczania i sytuacji przyjaznych do uczenia się matematyki w oparciu o wiedzę matematyczną w systemie geometrii Cabri, *Nauczyciele i Matematyka* **55** (tłumaczenie K. Dałek).

P a c z e s n a, W., M o s t o w s k i, K.: 2003, *Podręcznik dla klasy 2 gimnazjum*, Wydawnictwo Nowej Ery, Warszawa.

S e m a d e n i, Z.: 2002a, Trojaka natura matematyki: idee głębokie, formy powierzchniowe, modele formalne, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka matematyki* **24**, 41-92.

S e m a d e n i, Z.: 2002b, Rola znaczenia w rozumowaniach matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **24**, 145-174.

S e m a d e n i, Z.: 2004, Stany i działania na stanach jako aspekty znaczeniowe pojęć matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **27**, 169-193

S i k o r s k a - M i c h a l a k, A., W o j n i ł k o, O. (red.): 2000, *Słownik współczesnego języka polskiego, t. IV*, Wydawnictwo *Wilga*, Kraków.

T u r n a u, S.: 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa.

W a d o ń, K.: 2004, Walory dydaktyczne i techniczne programu TI InterActive!, *Matematyka i Komputery* **18**, 13-17.

W a d o ń, K.: 2006, O procesie rozwiązywania pewnego zadania matematycznego z użyciem programu komputerowego, *Matematyka i Komputery* **26**, 11-15.

W a d o ń, K.: 2006, O procesie rozwiązywania pewnego zadania matematycznego z użyciem programu komputerowego c. d., *Matematyka i Komputery* **27**, 7-10.

W a d o ń, K.: 2007, Different kinds of understanding of the concept of parameter, w: *Proceedings of the 8th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*, University of Hradec Kralove, Czech Republic, CD ROM.

Different kinds of the understanding of the concept of parameter

S u m m a r y

The object of interest in traditional mathematics teaching are first of all contents connected with concepts like triangles, numbers, vectors etc. and their properties. A teacher focuses pupils' attention mainly on these concepts. Letters (variables) are simply used (Konior, 2002) and treated as if they were already known by pupils and represented the part of alphabet earlier known to them. It is clear that the assumption that pupils will use mathematical alphabet symbols in a conscious manner is wrong as long as nobody has familiarized them with this alphabet.

It is necessary to ask a question how algebra looks in pupils' the eyes. According to Turnau (1990) it is not possible to specify a purpose of executable operation without understanding particular letters in a task clearly, and it is not possible to plan this operation rationally.

Understanding and proper interpretation of a letter is not an easy task for pupils. A context decides about its meaning in the algebraic text, phase of reasoning, subjective interpretation, as well as customs concerning the kind of used letters (Turnau, 1990). Proper interpretation of a letter in a given algebraic structure is a task often overgrowing pupils. Feeling and intuitive recognition turns out to be more popular strategy than interpreting of a letter in way of certain reasoning. Pupils know concepts like variable, unknown, or parameter, however, they do not always use them consciously, and therefore they are not understood by them entirely.

I specify different meanings of letters on the base of literature (Turnau, 1990; Konior, 2002; Giessen van de, 2001; Drijvers, 2003) and I present them on the drawing below (fig. 14):

I have decided to devote a particular attention to the letter standing for parameter. After the review of literature I state, that there has been in Poland no research concerning understanding by pupils of the concept of parameter . However there are such researches abroad. Firs was led by Carel van de Giessen (2001) who described classroom experiences of 16-17 years old pupils connected with visualization of different meanings of the concept of parameter during solving tasks with the use of Graphic Calculus program. The second appeared in Holland, at the University of Utrecht, where Paulus Drijvers (2003) described research on the understanding of the concept of parameter using information technology. In the experiment of the mentioned author there were four meanings of the concept of parameter classified: placeholder, generalizer,

changing quantity and unknown. In my research I have investigated different kinds of understanding of the concept of parameter by students at the age of thirteen during their three-year learning at school.

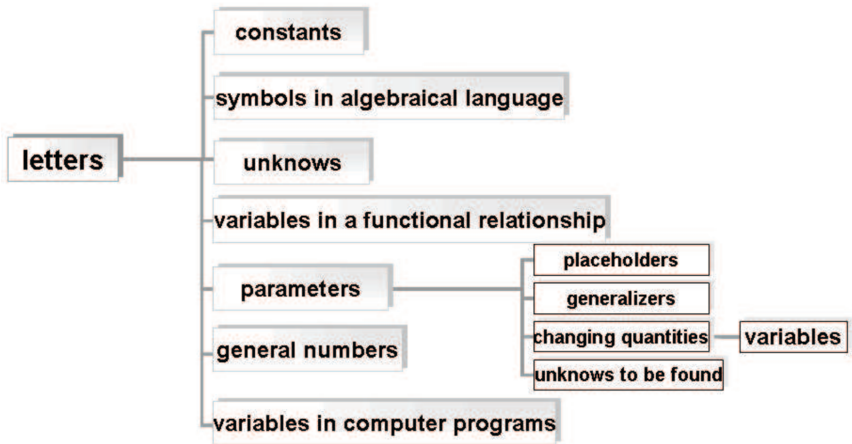


Figure 14.

Research of Drijvers differs with mine because it did not have a continuous character and it was not planned on several years, while my observation is led in a course of three-year work with pupils in secondary school (13-16 years old children). In my research I implement a didactical conception supported by information technology, concerning the understanding of the concept of parameter, performing also its verification in school conditions. Because of the fact, that my research is continuous, information techniques and interface problems have an influence on solving mathematical tasks by pupils only in initial period of my research. Besides, a Dutch group carrying the research did not consist of teachers of the investigated groups of students. Contrary to that, I do teach mathematics and informatics, and my group is also younger. Pupils, during realization of my conception, in comparison with those from Holland, solve many more tasks from different sections of mathematics, which contain parameter. After some time, my research tasks with parameters did not seem as new type of tasks to the pupils.

Investigated problem: If and in what degree computer programs can be helpful in the process of forming the concept of parameter?

I have carried three-year preliminary research in the oldest class, and proper research in the youngest one, which also lasted three years. The described groups have not been selected by no means. Besides, mathematics lessons are led by me in both classes both in the traditional manner, and by means of software.

My research is consistent with the idea of natural experiment. I have also used designed research method in my investigations, leaned observation and analysis of documents. Due to the use of **Camtasia Studio** program, I have registered solving of tasks by some pupils, that gives capability of observing the movie of their work. As a research tool also serves me **TI InterActive!**, which includes texts and objects created in this program by pupils, which they recorded on the disk of their computer. This investigative tool is created by pupils independently in the course of solving a task.

Presently I am in the course of proper research in third class of secondary school. During preliminary research, I created lists of tasks related to the concept of parameter, concerning different sections of mathematics, which are solved by pupils in the first, second and third class of secondary school. Each list includes also the task with parameter, which pupils solve during the posttest, which finishes the realization of some section of mathematics. Preliminary research served also for the verification of these lists. The analysis of solutions of problems from lessons and from the posttest supplies information of pupils' progress in the understanding of different meanings of the concept of parameter in different mathematical contexts. For me, as a teacher-researcher it is a situation, which gives me full image of effects of the process concerning forming the concept of parameter.

I have conducted pretest at the beginning of the first secondary class, which allowed me to find out, which meaning of the concept of parameter pupils understand. The analysis of solutions of this test by Karolina, a female pupil of class I b, in which I carried my proper research, has supplied information, that the meanings of parameter she was aware of are placeholder and generalizer. In this article I present analysis of solutions of problems from four posttests during the first class of secondary school, which supplies information of her progress in the understanding of different meanings of the concept of parameter in contexts of: geometry, algebra, equations and functions.

Wyniki Konkursu im. A. Z. Krygowskiej na najlepszą pracę studencką z dydaktyki matematyki – edycja 2008

Jury konkursu, po zapoznaniu się nadesłanymi na konkurs pracami, przyznało **pierwszą nagrodę** Pani Dominice Woźniak, absolwentce UAM w Poznaniu, za pracę *Przygotowanie przez wyższe studia matematyczne do nauczania rachunku prawdopodobieństwa w szkole*. Promotorem pracy była dr Aleksandra Maciejewska.

Przyznano również **dwie drugie nagrody ex aequo** Paniom: Lucynie Matusik, absolwentce Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie, za pracę *Pojęcie funkcji w nauczaniu matematyki a typy zadań w koncepcji realistyczno-problemowej*, oraz Pani Annie Pająk, również absolwentce Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie, za pracę *Koncepcje wprowadzania procentów we współczesnym nauczaniu matematyki*. Promotorem obydwu nagrodzonych prac była prof. Helena Siwek.

przewodnicząca jury

Poznań, 12. 05. 2008 r.

Maria Korcz