

Jana Slezáková
Uniwersytet Karola, Praga
Ewa Swoboda
Uniwersytet Rzeszowski

Ewolucja znaczenia słowa w matematyce jako problem dydaktyczny¹

Wstęp

Komunikowanie się między nauczycielem i uczniem jest podstawowym środkiem interakcji na lekcji matematyki. Może ono przybierać różne formy, ale niezmiennie najważniejszą z nich jest stosowanie języka. Podczas lekcji wypowiada się zarówno nauczyciel, jak i uczeń. Czasami podczas takiej rozmowy dochodzi do nieporozumień.

Wcześniejsze nasze badania doprowadziły do wyróżnienia czterech różnych typów przeszkód kognitywnych w komunikowaniu się na lekcji matematyki. Były to:

1. Różne rozumienie kontekstu sytuacji/zadania.
2. Skupienie się na własnych celach.
3. Skupienie uwagi na różnych fragmentach informacji.
4. Różne znaczenie nadawane temu samemu kluczowemu słowu (Slezáková-Kratochvilová, Swoboda, 2006)².

¹Praca była częściowo realizowana w ramach grantu VZ MSM 002 162 0862.

²Oto krótka charakterystyka tych przeszkód:

- A *Różne rozumienie kontekstu sytuacji/zadania*. Nauczyciel, planując zadanie lub sytuację kontekstową, która ma przybliżyć ucznia do rozumienia pojęcia - potrafi to pojęcie wyłuskać z kontekstu, wie, co jest ważne, a co nie. Funkcjonuje u niego projekcja: pojęcie matematyczne → sytuacja kontekstowa. Uczeń rozwiązujący zaplanowane przez nauczyciela zadanie będzie starał się wykorzystać całą swoją wiedzę szkolną i pozaszkolną. Skojarzone doświadczenia mogą mieć związek z różnymi matematycznymi

W tym artykule zechcemy pokazać, że w komunikowaniu się w matematyce szczególne znaczenie ma jedna z nich, mianowicie ta, która wiąże się ze zmianą znaczenia słów.

1 Odwołania do teorii

Przegląd literatury dotyczącej funkcjonowania języka pokazuje, że opis analogicznych do wyróżnionych przez nas kategorii można wyczytać między wierszami klasycznych dzieł dotyczących psychologicznych aspektów komunikacji językowej. Między innymi, w pracy L. Wygotskiego „Myślenie i mowa” znajduje się wiele opinii i uwag mających wspólną charakterystykę z kategoriami przez nas wyróżnionymi³.

Za podstawowy wynik swoich badań nad związkami między myśleniem a mową Wygotski uznał fakt, że znaczenia słów zmieniają się. Pisze o tym w sposób następujący:

Odkrycie zmienności znaczeń słów i ich rozwoju jest odkryciem podstawowym i tylko ono może wyprowadzić z impasu całą teorię myślenia

pojęciami, jak i mogą w ogóle nie mieć związku z matematyką. Wiedza matematyczna może okazać się inna niż ta, którą zakładał nauczyciel, a użyta wiedza pozamatematyczna może spowodować, że pewne aspekty sytuacji, nieistotne dla nauczyciela, staną się dominujące.

- B *Skupienie się na własnych celach.* Nauczyciel wie, co zamierza osiągnąć proponując uczniowi rozwiązanie danego zadania. Może to być wyćwiczenie pewnej sprawności lub odkrycie określonych własności czy związków, ważnych z punktu widzenia matematyki jako nauki. Te cele często determinują sposób pracy nad zadaniem, a odstępstwo od oczekiwanych sposobów pracy jest oceniane jako działanie błędne. Uczeń podejmując zadanie chce je przede wszystkim rozwiązać, i to na ogół w najłatwiejszy dla siebie sposób, stosując znane mu (lub oceniane przez niego jako najbardziej skuteczne) sposoby postępowania. Może się również zdarzyć, że rozwiązywanie zadania będzie interpretował w świetle pewnych umów społecznych, zupełnie nieczytelnych dla nauczyciela.
- C *Skupienie uwagi na różnych fragmentach informacji.* Sens całej wypowiedzi rozumiany jest dzięki temu, że zachowujemy w pamięci brzmienie wcześniej wypowiedzianych słów; znaczenia pojedynczych słów umieszczamy wtedy w szerszym kontekście. W zależności od tego, który fragment wypowiedzi zostanie uwypuklony, cała wypowiedź nabiera odmiennego znaczenia.
- D *Różne znaczenie nadawane temu samemu kluczowemu słowu.* Budowanie własnej matematyki jest długotrwałym procesem, w trakcie którego może następować zmiana znaczenia pewnych słów. Różne znaczenie nadawane tym samym słowom stymuluje do wykonywania różnych procedur i operacji związanych z danym pojęciem; powoduje, że to samo słowo wywołuje inne własności, budzi inne powiązania i relacje.

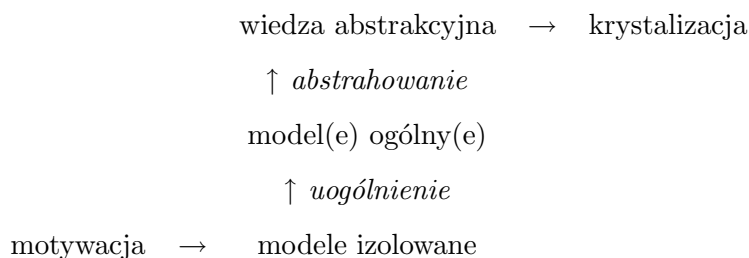
³Zestawienie wyróżnionych przez nas kategorii z poglądami Wygotskiego znajduje się w pracy Slezáková, Swoboda 2007.

i mowy. Znaczenie słowa zmienia się wraz z rozwojem dziecka, zmienia się przy różnych sposobach funkcjonowania myśli. Jest strukturą raczej dynamiczną, niż statyczną (Wygotski, 1989, s. 329).

Na znaczenie słowa składa się wiele powiązań, jest ono nasycone różnorodnymi doświadczeniami. Zdaniem Wygotskiego te powiązania tworzą *strukturę*, która nie jest niezmienna, wprost przeciwnie – podlega stałym zmianom, zwłaszcza w okresie kształtowania się pojęć kryjących się za słowami, które je reprezentują. Jest to związane ze stale zmieniającym się zakresem doświadczeń, ale nie tylko. W teorii Wygotskiego słowo jest odbiciem myśli, odbiciem bardzo mocno związanym ze *świadomością* tej rzeczywistości, którą reprezentuje i w której funkcjonuje. Nie tylko treść przedmiotowa słowa, ale również charakter uogólnienia i odbicia rzeczywistości ulegają zmianie w toku rozwoju.

[..] główną charakterystyczną cechą słowa jest uogólnione odbicie rzeczywistości. Tym samym dotknąłem takiego aspektu natury słowa, którego znaczenie wykracza poza granice myślenia jako takiego i który w pełni można zbadać tylko w kontekście problemu bardziej ogólnego – problemu słowa i świadomości. Jeżeli świadomość odbierająca wrażenie i myśląca dysponuje różnymi sposobami odbijania rzeczywistości, to sposoby te reprezentują też różne typy świadomości. (Wygotski, 1989, s. 408).

Wiedza matematyczna ucznia i wiedza nauczyciela dotycząca tego samego pojęcia nie są takie same. Inaczej mówiąc, świadomość matematyczna związana z danym pojęciem (faktem, algorytmem, własnością ...) u ucznia i nauczyciela istotnie się różni. Nie chodzi o to, że nauczyciel *wie więcej*. Podstawowa różnica związana jest ze sposobem budowania wiedzy matematycznej. W rozwoju umysłowym każdego człowieka struktura ta zmienia się i rozbudowuje. Opis tego sposobu podaje na przykład M. Hejný, (Hejný, Littler, 2006) pisząc o *procesie zdobywania wiedzy* przechodzącym poprzez 5 poziomów. Rozpoczyna się on od motywacji, a jego istotą są dwa przejścia na wyższe poziomy umysłowe (mental lifts): od wiedzy *konkretnej* do wiedzy *ogólnej* i od wiedzy *ogólnej* do *abstrakcyjnej*. Proces ten przedstawia następujący schemat:



Jezyk zmienia się wraz z rozwojem struktury umysłowej. Słowa wypowiedziane zarówno przez nauczyciela, jak i ucznia są powiązane ze strukturą

umysłową, którą reprezentują. Struktura umysłowa, zwłaszcza w okresie budowania, czyli w okresie uczenia się, jest tworem szczególnie dynamicznym, stale zmieniającym się. Wtedy słowa nie zawsze podążają za adekwatnym poziomem umysłowym.

...jedną z typowych cech budowania struktury kognitywnej jest jej hierarchiczna natura. Struktura **istnieje** na wielu różnych poziomach abstrakcji. Stąd, poza powiązaniem horyzontalnymi czyli powiązaniem pomiędzy elementami tego samego poziomu abstrakcji, powiązane są również struktury istniejące na różnych poziomach abstrakcji. (Kvasz, 2005)

W świadomości nauczycieli, jak i naukowców, matematyka jest postrzegana jako nauka ścisła, i na ogół nie dopuszcza się przyjęcia zmienności znaczenia pojęć. Z tego powodu język nauczyciela i język ucznia (czyli partnerów o różnym poziomie ukształtowanej struktury kognitywnej) mogą się istotnie różnić w swoich znaczeniach. Rodzi to istotne problemy w komunikowaniu się. W momencie przechodzenia na wyższy poziom abstrakcji, adekwatny dla tego poziomu język dziecka może nie być jeszcze ukształtowany. Nauczyciel nieświadomy tego faktu może więc operować takimi sformułowaniami (dla siebie oczywistymi), których sens jest dla dziecka zawężony do wcześniejszego poziomu rozumienia. Jest możliwe również, że uczeń, stykając się z problemem zbyt skomplikowanym i nowym, może go interpretować w ramach znanego sobie, ustabilizowanego modelu. Wtedy również jego wypowiedzi będą się odnosiły do znaczeń z poziomu niższego, czego nauczyciel na ogół nie wie.

To krótkie zestawienie wybranych poglądów psychologicznych i dydaktycznych uzmysławia, że prowadzenie rozmowy na lekcji matematyki nie może być łatwe, a osoba odpowiedzialna za jakość tej rozmowy, czyli nauczyciel, powinien brać pod uwagę wiele aspektów. Mówiąc ogólnie, nauczyciel rozmawiający o matematyce w klasie, prowadzi tę rozmowę na dwóch poziomach: poziomie matematycznym dotyczącym przedmiotu rozmowy (obiekty matematyczne, relacje, procedury, algorytmy, fakty, ...) oraz na poziomie meta-dyskursywnym, odnoszącym się do sztuki komunikowania się. Pierwszej warstwy nauczyciel jest świadomy, i stara się ją realizować podczas lekcji. O drugiej zazwyczaj nie myśli, jeśli nie jest na nią wyczulony:

...Meta-reguły funkcjonują w dyskursie w sposób niejawnny, a uczenie się tych reguł odbywa się spontanicznie, bez świadomych, planowych zabiegów ze strony nauczyciela, bez wyraźnego zamiaru nauczania się ich przez uczniów, i często bez świadomego zwracania na nie uwagi przez kogokolwiek. A te niejawne reguły są również odpowiedzialne nie tylko za sposób, w jaki robimy cokolwiek, lecz również za sam fakt, że jesteśmy w stanie w ogóle coś zrobić. (Sfard, 2000, s. 161)

O ile w przygotowaniu zawodowym nauczycieli w bardzo wyraźny sposób zwraca się uwagę na pierwszą warstwę (bardzo dokładnie realizując warstwę przedmiotową, dbając o zapobieganie błędom merytorycznym w prowadzeniu lekcji), to druga warstwa bywa w istotny sposób zaniedbywana.

2 Metodologia prowadzonych badań

Naszym problemem badawczym są nieporozumienia, które w spontaniczny sposób pojawiają się w trakcie matematycznego dyskursu. Problem ten nie może być badany w ramach odpowiednio zaplanowanego eksperymentu; każdy taki eksperyment musiałby z góry zakładać, że rzeczywiście dojdzie do nieporozumienia, co zupełnie przeczyłoby jego wartości badawczej. Materiał do naszych analiz zbierany był podczas uczestniczących obserwacji w klasie, w trakcie lekcji matematyki. Obserwacje były ukierunkowane na rejestrowanie takich momentów, w których następowało nieporozumienie między nauczycielem i uczniem.

Po przeanalizowaniu wielu różnych przykładów nieporozumień i opisanii ich przyczyn (Kratochvilová, Swoboda, 2003, Slezáková-Kratochvilová, Swoboda, 2006, Slezáková, Swoboda, 2007) postanowiłyśmy dokonać pewnego typu podsumowania dotychczasowych wyników. Wcześniejsze badania pozwoliły na wyróżnienie czterech kategorii przyczyn mających istotne znaczenie dla powstania nieporozumienia między nauczycielem i uczniem. Teraz doszłyśmy do wniosku, że wyróżnienie i rozdział tych kategorii wprowadzie porządkuje zjawisko nieporozumień, ale może nie charakteryzować dobrze obserwowanych sytuacji. Na tym etapie badań staramy się patrzeć na zebrane nieporozumienia biorąc pod uwagę wszystkie kategorie równocześnie. Dlatego analizujemy te sytuacje z punktu widzenia wyróżnionych przez nas czterech typów przeszkód kognitywnych. Jednym z celów takiego podejścia jest szukanie związków pomiędzy wyróżnionymi kategoriami. Chcemy również spróbować ocenić znaczenie (wagę) poszczególnych kategorii dla porozumiewania się między nauczycielem i uczniem na lekcji matematyki.

3 Analiza dydaktyczna obserwowanych sytuacji klasowych

W prezentowanym opracowaniu przedstawimy kilka przykładów rzeczywistych sytuacji lekcyjnych, w których miało miejsce wzajemne nieporozumie-

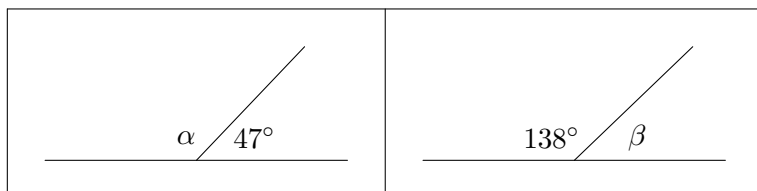
nie⁴ (między nauczycielem i uczniem jak i między nauczycielem i całą klasą). Podamy również analizę dydaktyczną tych sytuacji.

3.1 Przykład 1

Lekcja w klasie I gimnazjum.

Temat lekcji: Kąty przyległe i kąty wierzchołkowe.

Nauczyciel podaje zadanie: Jaka jest rozwartość kątów α , β ?



Uczniowie niemal chórem od razu odpowiadają, że $\alpha = 133^\circ$.

Nauczycielka: *A β ?*

Prawie wszyscy zgodnie mówią: *Ale to nie jest kąt rozwarty.*

3.1.1 Różne znaczenie nadawane temu samemu kluczowemu słowu

Słowo, które było różnie interpretowane, to „rozwartość”. Było ono kluczowe dla całego zadania. To słowo było również przyczyną zaistniałego nieporozumienia, gdyż przez obie strony było inaczej rozumiane.

Rozwartość jest sformułowaniem używanymi w języku potocznym, choć już dość archaizującym: „rozwarłe wrota”, „szeroko rozwarte usta”, „rozwarłe ramiona” itd. Słowo budzi skojarzenia z ruchem, który sprawia przejście od sytuacji, kiedy coś było zamknięte, do sytuacji, kiedy to „coś” jest otwarte. Na przykład wrota zwykle są zamknięte; jeżeli są rozwarte, to znaczy mieszkańcy domu zapraszają gości. To słowo z języka potocznego przeszło do terminów matematycznych, konkretnie, do charakterystyki kąta. Pozostało tam w dwóch różnych znaczeniach. Jednym z nich jest nazwa kąta większego od kąta prostego i mniejszego od kąta półpełnego; drugie rozumienie jest związane z miarą kąta.

— *Kąt ostry* swoim wyglądem przypomina szpic; im mniejsza jego miara, tym bardziej kształt ten mógłby (również w języku potocznym) być opisany

⁴Prezentowane przykłady zostały zaobserwowane podczas praktyk pedagogicznych, w roku akademickim 2006/2007. Stały się one później podstawą prac licencjackich Justyny Lis-Gubernat oraz Anety Skorupy, studentek Uniwersytetu Rzeszowskiego, napisanych w ramach seminarium dyplomowego pod kierunkiem jednej z autorek.

jako „ostry” („ostro zastrugany ołówek”, „ostry koniec szpilki” ...). *Kąt rozwarty*, ze względu na swą wizualną reprezentację (większy niż kąt prosty) nawiązuje w nazwie do wszystkiego, co w języku potocznym jest szeroko otwarte.

— Drugie rozumienie potocznego słowa „rozwartość” jest związane z ruchem. Są różne określenia kąta, jednym z nich jest kąt jako miara obrotu. Sądzimy, że *rozwartość* w odniesieniu do kąta może być związana z tą koncepcją kąta – w ujęciu dynamicznym, związanym z obrotem. Miara obrotu jednego ramienia (czy też wielkości obszaru zakreslanego przez to ramię) nazywana jest *miarą rozwartości*, skrótowo: *rozwartością*.⁵

⁵Polska nazwa „rozarty” dla kąta, którego miara jest większa niż 90 stopni, kształtowała się długo, i przebiegała inaczej niż w większości krajów europejskich. W nazewnictwie stosowanym w większości innych języków istnieje silny związek między nazwami dla kątów o mierze mniejszej niż kąt prosty i większej niż kąt prosty. Jest to spowodowane tradycją ukształtowaną poprzez łacińskie przekłady *Elementów* Euklidesa. W języku tym obowiązują nazwy, *angulus* – kąt, *rectus* – prosty, (potocznie: właściwy, słuszny) *obtuse* – tępy (potocznie: głupi, tępy), *acutus* – ostry (potocznie: zastrzony, przenikliwy). Łacińskie nazewnictwo w bezpośredni sposób kształtowało nazewnictwo w języku angielskim (*right angle*, *obtuse angle*, *acute angle*). Ale nie tylko – podobne przykłady można znaleźć w nazwach kątów w wielu językach europejskich. Stąd kąt rozwarty nazywa się: *obtus* – w francuskim, *obtuse* (*stumpfwinklichtes*) – w niemieckim, *tupý* - w czeskim, *tupoj* - w rosyjskim.

Przeciwstawienie językowe: ostry (*acutus*) – tępy (*obtuse*) wskazuje od razu na związek tych dwóch kątów. Być może – taki jak w kątach dopełniających, lub ze względu na przeciwstawną zależność od kąta prostego.

We współczesnym polskim nazewnictwie nie ma przeciwstawienia: ostry – tępy. Od czasu, kiedy zaczęły powstawać podręczniki pisane w języku polskim, nazwy kątów często ulegały zmianie. W propozycjach słownictwa można się czasami dopatrzeć wpływów łaciny, ale są też wpływy koncepcji dydaktycznej podręczników, czy nazewnictwa z języka potocznego. W podręczniku Grzepskiego z 1566 r. kąt ostry nazywa się *kończasty*, zaś kąt rozwarty – *tępy* (wg. (Pawlikowska, 1964); w rękopisach Józefa Noronowicza-Narońskiego (1600 – 1678) pojawiają się nazwy kąt *ostry* lub kąt *spiczasty* oraz kąt *tępy*. W dziele „Geometra Polski..” Stanisława Solskiego z 1683 pojawiają się po raz pierwszy nazwy *angul ostry* i *angul rozwarty*, co wcale nie oznacza, że te nazwy zaczęły obowiązywać w podręcznikach polskojęzycznych na dobre. Wiek XVII był powrotem do piśmiennictwa łacińskiego, stąd propozycje polskiego nazewnictwa nie mogły się utrwalić. Reformy Konarskiego doprowadziły między innymi do napisania przez Skaradkiewicza podręcznika *Geometrya czyli nauka o ziemi i miernictwie ku snadniejszemu wyższej matematyki poznaniu służąca* (wyd. 1774 i 1776). Ale tam mamy znowu kąt *ostry* (lub *spiczasty*) i kąt *tępy* (lub *wklęsły*). Powołanie w 1775 przez Komisję Edukacji Narodowej Towarzystwa do Ksiąg Elementarnych jest wyrazem troski zarówno o ujednoczenie i (lub) stworzenie czytelnej i odpowiedniej terminologii matematycznej, jak i o poziom merytoryczny i dydaktyczny podręczników matematycznych. O tym, że Towarzystwo zamierzało czuwać nad terminologią, świadczą „Przestrogi potrzebne do pisania wszystkich książek elementarnych”, a zwłaszcza punkty 4 i 7 poświęcone terminologii (Bąk, 1984, s. 85). Towarzystwo zaakceptowało podręczniki Szymona Lhuilliera, które z języka francuskiego tłumaczył Jędrzej Gawroński. Zostały tam zaproponowane obowiązujące do dzisiaj nazwy kątów: *prosty*, *ostry*, *rozarty*. Nie znaczy to, że termin *kąt rozwarty* nie budził już więcej kontrowersji. Na przykład, w podręczniku Antoniego Wyrwicza, tłumaczonym z je-

W analizowanej przez nas sytuacji nauczyciel starał się zastosować język, do którego przywykł podczas studiów. Stosował język typowy dla poziomu formalnego. W podręcznikach akademickich⁶ oraz w niektórych wypowiedziach matematycznych używa się sformułowań podobnych do tych, których użył nauczyciel. Nauczyciel nie musiał analizować rodowodu słowa, wystarczy, że spotkał się już z koncepcją kąta jako miary obrotu oraz zaakceptował samą nazwę „rozwartość”.

Uczniowie nie rozumieli słowa „rozwartość”. Starali się zbudować jego sens. Mogło to przebiegać w sposób następujący: W stosunku do zaistniałej sytuacji wiedzieli, że istnieje „miara kąta” – a nie „rozwartość kąta”. Kąty się mierzyło, a miara była wynikiem mierzenia. Taki związek semantyczny z matematycznym pojęciem był dla nich oczywisty, wskazywał na związek *procesu* wymierzania z *wynikiem* tego pomiaru. Stąd kąt miał swoją miarę, wyrażaną w stopniach, a typowe pytanie związane z pomiarami brzmiało: *ile stopni ma dany kąt*.

Do tej pory uczeń znał nazwy kątów: ostry, rozwarty. Słowo wypowiedziane przez nauczycielkę ma ten sam rodowód, co słowo „rozwarty”. Dokonał językowej analizy i szukał odniesień do słowa z tym samym rdzeniem, i też odnoszącego się do kąta. Mógł słowo „rozwartość”, które było dla niego nowe, wytłumaczyć następująco: nauczycielka w nowy dla nas sposób mówi o kątach rozwartych, pytanie „jaka jest rozwartość kąta” należy rozumieć „ile wynosi miara kąta rozwartego”. Postąpił tak, jak osoba słabo znająca obcy język: gdy z całej wypowiedzi rozumie poszczególne słowa, szuka wtedy powiązań pomiędzy nimi i na tej podstawie buduje znaczenie całej wypowiedzi.

3.1.2 Różne rozumienie kontekstu sytuacji

Zadanie przedstawione zostało w dwu warstwach: słownej i graficznej. Nieporozumienie stało się oczywiste dopiero przy drugim obrazku. Pierwszy obrazek nie wyjawia konfliktu – więcej, może utwierdzać dziecko w przekonaniu, że jego interpretacja wypowiedzi nauczycielki była słuszna. Jeżeli pytanie „jaka jest rozwartość kąta” zinterpretowali „ile wynosi miara kąta rozwartego”, to odpowiedź: 133 stopnie satysfakcjonuje zarówno nauczycielkę jak i uczniów. Ale pytanie zadane przez nauczycielkę ich zdaniem nie odnosiło się już do

zyka francuskiego *Początki Geometrii podług Legendre z 1825 roku* pojawia się termin *kąt wyskakujący* (za W. Więslaw, 1998, s. 116). Wydaje się, że o przyjęciu nazwy „kąt rozwarty” zdecydowały koncepcje dydaktyczne, w których kąt bywał przedstawiany w ujęciu dynamicznym, z jednym ruchomym ramieniem.

⁶Z. Krygowska wyraźnie wiąże *rozwartość* z dynamicznym ujęciem kąta. W podręczniku geometrii z 1975 r. s. 219 znajduje się definicja: **Rozwartością** kąta skierowanego niezerowego nazywamy miarę kąta wypukłego, którego ramionami są ramiona kąta skierowanego.

kąta β . (N: $A \beta$? U: *Ale to nie jest kąt rozwarty.*) W ten sposób pokazali, że zupełnie inaczej zrozumieli zadanie, niż to było w zamierzeniach nauczycielki.

W sytuacji bezpośredniej rozmowy nauczyciel może łatwo zorientować się, gdzie leży problem, i go rozwiązać. Gorzej, gdyby uczniowie taki problem napotkali w czasie rozwiązywania pisemnego testu. Brak „poprawnej” odpowiedzi z pewnością wpłynąłby na ogólną ocenę.

3.1.3 Skupienie się na własnych celach

Celem dziecka było zrozumienie zadania i poszukiwanie jego rozwiązania. W tym kontekście słowo „rozwartość” dało się interpretować w odniesieniu do procedur i kontekstów poprzedzających opisywaną aktywność. Uczniowie starali się spełniać polecenia nauczyciela, który zwykle decyduje o przebiegu lekcji (cel: czego oczekuje nauczyciel?). Dlatego możliwe jest, że intencje nauczyciela, który pyta o kąt β oceniali różnorodnie. Uczniowie mogli mieć świadomość, że nowa nauczycielka mówi inaczej niż ich dawna, ze szkoły podstawowej. W związku z tym sensu wypowiedzi trzeba się trochę domyślać.

Tutaj mogą być dwie interpretacje:

1. Drugi obrazek wywołuje kognitywno-lingwistyczny konflikt: pierwsza interpretacja, że *rozwartość* dotyczy jedynie kąta rozwartego, nie ma sensu. Wielkość 138 jest wpisana przy kącie rozpoznawanym jako rozwarty, a to, czego szukamy, to wielkość kąta β . Mogło to stworzyć socjalne napięcie. Uczeń słowa nauczyciela tłumaczy sobie jako niepoprawne – nauczyciel się pomylił, miał powiedzieć „jaka jest ostrość”. Sugeruje więc nauczycielowi, by inaczej sformułował pytanie.
2. Uczeń mógł już mieć doświadczenie z sytuacjami, gdy nauczyciel daje zadania nie posiadające rozwiązania. Wtedy tę sytuację mógł rozpoznać jako zadanie bez rozwiązania, dlatego mówi o tym nauczycielowi.

3.2 Przykład 2

Lekcja w klasie VI szkoły podstawowej.

Zadanie polegało na skonstruowaniu odcinka danego w oparciu o dany odcinek AB .

N.01: Proszę zwiększyć długość danego odcinka półtora raza.

U.01: *Uczennica na tablicy przedłużyła odcinek AB poza jego koniec B , odłożyła go od tego końca raz, a potem jeszcze pół raza, otrzymując punkt C .*



N.02: (zdziwienie w głosie) Co ty zrobiłaś?

3.2.1 Różne znaczenie nadawane temu samemu kluczowemu słowu

Różne rozumienie słowa *zwiększ* wywołuje inną procedurę i inny wynik rozwiązana.

W geometrii przekształcanie w skali większej od 1 popularnie nazywane jest powiększaniem odcinka; przekształcanie, gdzie skala jest ułamkiem mniejszym od 1, jest pomniejszaniem. Jest to związane z faktem, że rozumiejąc przekształcanie nie jako proces, ale jako relację, wypowiedź odnosimy do obrazu. Nauczyciel może to zadanie kojarzyć z podobieństwem, gdzie sformułowanie „półtora raza” odnosi się do skali podobieństwa. Ponieważ skala $k \geq 1$, więc w wyniku dokonanej operacji długość odcinka zostanie zwiększona. Może też nieświadomie używać tego sformułowania w sensie przyjętym w tego typu zadaniach. (Jak byłoby rozumiane zadanie: powiększ odcinek pół raza?)

W wypowiedzi nauczyciela polecenie „zwiększ” miało następujące znaczenie: jeżeli dokonasz operacji na odcinku, to odcinek będzie większy. Podał więc od razu własną interpretację rozwiązania zadania, mimo że wpływała ona z konwencjonalnych sformułowań dotyczących tego typu zadań geometrycznych.

Język nauczycielskiej wypowiedzi jest daleki od precyzji formalnego języka matematyki. W opisywanym przypadku jest raczej splotem znaczeń pochodzących z matematyki jako gotowego produktu i języka potocznego. Jest pewnym geometrycznym „slangiem”, zrozumiałym dla tych, którzy są obeznani z pojęciem.

Nieświadoma interpretacja ukryta w słowie „zwiększ” spowodowała zupełnie inne skojarzenia u ucznia niż te, których oczekiwał nauczyciel. Dla uczniów na tym poziomie matematycznych kompetencji słowo „powiększ” wciąż najczęściej kojarzy się z dodawaniem, i to o wartość dodatnią. *Powiększ = dodaj, dołóż, daj jeszcze trochę do tego co jest* funkcjonuje od pierwszego kontaktu z działaniami arytmetycznymi.

3.2.2 Skupienie uwagi na różnych fragmentach informacji

W treści zadania współczynnik powiększenia jest liczbą mieszaną (1,5), co spowodowało wyróżnienie dwóch słów: „powiększ” oraz „półtora raza”. Każda ze stron uczestniczących w tej sytuacji wybrała inne słowo jako to, które niesie podstawową informację.

Sformułowanie „półtora” jest typowe dla języka potocznego. Oznacza ono wielkość i pół, ale wyraża to tylko jednym słowem. Na ogół jest ono używane przy zakupach, w sytuacjach odmierzania wielkości: *półtora kilograma jabłek, półtora kilometra, półtora litra soku . . . , nawet półtora tysiąca złotych*. Przejście od wyrażenia słownego do symbolicznego jest naturalne: półtora $\rightarrow 1\frac{1}{2}$, ale przejście odwrotne nie jest już takie oczywiste, gdyż na ogół symbol $1\frac{1}{2}$ będzie odczytany *jeden i pół*. To mogło powodować, że informacja słowna niosła dwa różne sygnały, w nierównym stopniu skojarzone z matematyką; jeden dotyczący operacji powiększania, a drugi mówiący o wielkości tego operatora. „Powiększ” wielokrotnie dziecko odkodowywało jako dodawanie, i to połączenie w oczywisty sposób otwierało świat matematyki. Być może pierwsze skojarzenie spowodowało, że dla ucznia wiodącym słowem było polecenie: powiększ. Dlatego potem całą sytuację rozumiał inaczej.

Nauczyciel wiedział, że długość nowego odcinka będzie większa niż długość odcinka AB , stąd sformułowanie: „powiększ” nie miało nieść istotnej treści. Najważniejsze było podanie wielkości operatora, bo ta wielkość różnicowała kolejne zadania dotyczące konstruowania odcinków.



3.2.3 Różne rozumienie kontekstu sytuacji/zadania

Zadanie było rozumiane zgodnie z dwoma różnymi modelami, innym dla nauczyciela, i innym dla ucznia.

Model nauczyciela (MN):

Zdaniem nauczyciela, zadanie posiada jeden poziom.

Jego rozwiązanie polega na dołożeniu do odcinka danego (lub do odcinka równego danemu) połowy odcinka danego. W ten sposób odcinek traktowany jako rozwiązanie zadania będzie miał półtora długości odcinka wyjściowego. Sama konstrukcja jest tylko narzędziem, podporządkowanym uzyskaniu rozwiązania:

- to jest dane: 
- to należy uzyskać: 





Procedura zadania polega na wykonywaniu operacji *na* danym obiekcie, w wyniku czego obiekt początkowy ulega zmianie (odcinek AB przechodzi w odcinek AC), staje się większy.

Model ucznia (MU)

Zdaniem ucznia, zadanie posiada dwa poziomy

1. Skonstruowanie odcinka mającego półtora długości odcinka wyjściowego
2. Połączenie odcinka wyjściowego z nowo skonstruowanym odcinkiem.

Ponieważ te dwa poziomy realizował jednocześnie, etapy pracy były następujące:

- to mam: 
- mam dodać: 
- co mam dodać: 
- uzyskuję wynik: 

Dla ucznia ważny jest proces, co wpływa na rozumienie zadania. W tym procesie obiekt wyjściowy bierze udział, ale sam się nie zmienia (odcinek AB jest fragmentem odcinka AC). Procedura do wykonania to działanie *na* danym obiekcie.

3.3 Przykład 3

Lekcja matematyki w klasie IV.

Temat lekcji: *Pojęcie ara i hektara.*

W ramach tematu „pole figury” znajdowało się wprowadzenie pojęć ara i hektara. Nauczycielka powiedziała dzieciom, że ar jest to pole kwadratu o boku 10 metrów (taka definicja jest w podręczniku). Dzieci policzyły, że jest to 100 metrów kwadratowych.

Kolejne zadanie polega na obliczeniu pola prostokąta o bokach 20 m na 5 m.

N.01: Ile wam wyszło?

U.01: 100 m².

N.02: Widzicie ten prostokąt ma powierzchnię jednego ara.

U.02: Jak to? Przecież to nie jest kwadrat...

3.3.1 Skupienie uwagi na różnych fragmentach informacji

W tej sytuacji uczniowie skupili uwagę na fakcie, że ar to *kwadrat*. Są co najmniej dwa powody, dla których nazwa ar została skojarzona z kwadratem, a nie z jednostkami pola:

1. Kwadrat ma swoją bardzo oczywistą reprezentację wizualną; od przedszkola uczniowie manipulowali kwadratami. Nie dziwi ich, że dowiadują się o kwadracie czegoś nowego, bo przecież kwadrat najpierw jedynie nazywali i manipulowali nim, potem zaczęli opisywać, kolejno mówiąc o bokach i kątach, potem o przekątnych, a potem o jego polu i obwodzie.
2. Pewną przeszkodą w budowaniu skojarzeń z jednostkami pola może być fakt, że kwadrat obrany jako jednostka nie ma boku równego 1. Jednostką długości były centymetr (1 cm), metr (1 m), kilometr (1 km), jed-

nostką pola były kwadraty o określonej długości boków ale zawsze związanej z jedyneką, jednostką objętości analogiczne sześciiany. Na tym etapie kształcenia dzieci spotkały się po raz pierwszy z jednostką nie podpadającą pod ten schemat (jednostką jest kwadrat o boku 10 m).

Dla nauczycielki słowem, któremu należało poświęcić uwagę, było słowo *ar* i pojęcie ara. Wiedziała, że jest to nowy termin, i nowe pojęcie matematyczne, ale chyba nie sądziła, że uczniom będzie trudno je zrozumieć. Dla niej linia skojarzeniowa była prawdopodobnie jasna. Ponieważ lekcja, na której pojęcie ara było wprowadzone, umieszczona była w cyklu lekcji o polach figur, więc było oczywiste, że należy „omówić” różne jednostki pola. Ar w jej umyśle był prawdopodobnie rozumiany tak, jak i inne jednostki, nie wyróżniał się niczym specjalnym. Ponieważ dzieci już wcześniej obliczały pola figur i wyniki podawały w takich jednostkach jak m^2 czy cm^2 , więc pewnie sądziła, że pojęcie jednostki pola jest dzieciom dostatecznie dobrze znane i na skojarzenia związane z polem figury nie warto poświęcać wiele czasu.

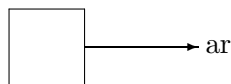
3.3.2 Różne znaczenie nadawane temu samemu kluczowemu słowu

Lekcja była poświęcona wprowadzeniu nowego pojęcia, skrywającego się pod słowem „ar”. W opisywanym momencie lekcji dla nauczycielki i dla uczniów to słowo było wypełnione zupełnie inną treścią.

Nauczycielka (co widać z protokołu) nie zasugerowała żadnych zadań, które umożliwiłyby dzieciom intuicyjne zapoznanie się z nową jednostką. Szybko przeszła na poziom abstrakcji, chcąc, by to pojęcie funkcjonowało jako model ogólny. Widocznie nawet nie przypuszczała, że to pojęcie może powodować jakieś problemy. W jej strukturze umysłowej istniały już silne kognitywne powiązania pomiędzy takimi pojęciami jak figura (i jej kształt), jednostka miary, procedura dokonywanie pomiarów (prawdopodobnie widziana już jako pojęcie), pole. Między innymi było dla niej oczywiste, że ar i hektar mogą dotyczyć figur o różnych kształtach. Dlatego pewnie nie zdawała sobie sprawy, że dla nowej jednostki takie powiązania nie powstają automatycznie. Nie zwróciła uwagi na niezręczność definicji. Jest jednak godne podkreślenia, że na możliwość błędnej dziecięcej interpretacji nie zwrócili uwagi autorzy podręcznika, podając właśnie taką a nie inną definicję ara.

Dzieci umieściły aktywność o przeliczeniu pola ara pomiędzy tymi, które robiły wcześniej – liczyły pola różnych figur, mogły więc policzyć *pole ara*. W trakcie tej aktywności mogły nie być świadome, że jest to najważniejsze słowo na tej lekcji. Słowo „ar”, którym posługiwała się tylko nauczycielka, zeszło do cienia, przytłumione procedurami liczenia pól znanych im figur: kwadratu i prostokąta.

Ar to nowe pojęcie dla dzieci. W prezentowanej sytuacji związek pomiędzy pojęciem „ar” i pojęciem „kwadrat” jest jednostronny: ar jest rozumiany jedynie w związku z kwadratem: jeżeli mam kwadrat o boku 10 m, to mam ar. Definicja ara istnieje dla dziecka na poziomie izolowanego modelu, i dotyczy jedynie figur związanych z kwadratami (niektóre kwadraty są arami, i to jest związane z ich wielkością; ar to taki kwadrat, którego bok ma 10 m). W ramach takiej interpretacji można założyć, że byłyby w stanie stwierdzić, iż dwa kwadraty o bokach po 10 m dają dwa ary. Być może powiedziałyby, że trzy ary to takie figury, które dadzą się rozłożyć na trzy kwadraty, czyli takie figury, jak na rys. 2; ogólnie, mając ary można z nich zbudować pewne figury. Ale przy takim rozumieniu ar jest obiektem sztywnym (jak klocek w dziecięcej układance), nie da się go przeciąć i uzyskanych z przecięcia części poskładać w dowolny sposób.



Rysunek 1.



Rysunek 2.

W tej szczególnej sytuacji nastąpiło bardzo specyficzne pomieszenie znaczeń: jeden ar jako figura – kwadrat o określonych wymiarach, i jeden ar jako liczba – pole dowolnej figury. Jest to niejako sytuacja graniczna dla pojęcia figury jak i dla pojęcia jednostki pola. W tej mieszance przeważa jednak znaczenie nadane przez kwadrat jako figurę geometryczną. W takiej interpretacji nie mają zastosowania własności jednostki miary: kwadrat przetransponowany na prostokąt o różnej długości boków już nie jest kwadratem!

3.3.3 Różne rozumienie kontekstu sytuacji/zadania

W tym przykładzie uczniowie i nauczyciel różnie rozumieją problem wymierzania pola prostokąta jednostką ar. Dla nauczycielki związki są oczywiste: wynik 100 m^2 znaczy, że pole prostokąta jest równe 1 ar. Dla dzieci jest to zadanie niewykonalne, gdyż ar jest związany jedynie z kwadratem. Jak widać z przykładu, uczniowie nie mają problemu ze znajomością odpowiednich wzorów na pola figur, ani z wykonywaniem standardowych rachunków. Wiedzą również, że licząc pole figury, której wymiary podane są w metrach, otrzymają jej pole wyrażone w metrach kwadratowych. Ale na tym się kończą ich umiejętności związane z opisywanym zadaniem.

3.3.4 Skupienie się na własnych celach

Celem nauczycielki jest wypracowanie płynnych powiązań między różnymi jednostkami pola. Widać to ze sposobu organizowania zajęć (przeliczanie pól figur i wyrażanie ich w m^2) i wypowiedzi: *widzicie, ten prostokąt ma powierzchnię jednego ara*. Robi to jednak w sposób bardzo formalny, bez umożliwienia uczniom samodzielnego odkrycia tych powiązań.

Aktywność uczniów na tej lekcji sprowadza się do wykonywania obliczeń, dlatego mogą odnieść wrażenie, że jest to lekcja ćwiczeniowa na obliczanie pól różnych figur. W tej sytuacji cele dziecka ograniczają się jedynie do wykonywania poleceń nauczycielki, bez świadomości, po co wykonują te wszystkie zabiegi i przeliczenia.

3.4 Przykład 4

Klasa II gimnazjum.

Temat lekcji: Przekształcanie wyrażeń algebraicznych z zastosowaniem wzorów skróconego mnożenia.

Nauczycielka mówi treść zadania: *Przedstaw wyrażenie w postaci sumy algebraicznej*, i zapisuje na tablicy następujące wyrażenie:

$$(x + 3)^2 + (2x + 5)(2x - 5).$$

N01: *Kto podejdzie do tego przykładu?*

U01: *(z ławki) Ale tu już przecież jest suma.*

N02: *Kto? No chodź, chodź.*

U02: *Ale tu nie ma co robić.*

N03: *Jak to? Nie da się tu nic przekształcić?*

U03: *No da się, ale suma już jest.*

N04: *To jak się da, to licz.*

U04: *Ale ...*

N05: *Proszę do tablicy.*

U05: *(z ociąganiem) $(x+3)^2 + (2x+5)(2x-5) = (x^2+6x+9) + (4x^2-25)$.*

N06: *Żwawiej, usuwaj te nawiasy.*

U06: $x^2 + 6x + 9 + 4x^2 - 25$.

N07: *Co dalej?*

U07: *podkreśla wyrazy podobne.*

N08: *To jak się to nazywa? Redu ...*

U08: *Redukujemy wyrazy podobne. $5x^2 + 6x - 16$.*

N09: *Dziękuję, siadaj.*

U09: *(wracając do ławki) No i wychodzi różnica, a nie suma ...*

3.4.1 Różne znaczenie nadawane temu samemu kluczowemu słowu

Przyczyną zaistniałego nieporozumienia jest różne rozumienie słowa „suma algebraiczna” występującego w poleceniu zadania.

Suma algebraiczna dla nauczycielki to jeden termin, jedna nazwa. W tradycji polskiej szkoły istnieją synonimy tego samego pojęcia, chociaż różniące się pewnymi odcieniami: wielomian, wyrażenie algebraiczne, suma algebraiczna.

Suma algebraiczna (której oczekuje nauczycielka) winna się składać z jednomianów połączonych znakiem $+$. Jest to rozumienie sumy algebraicznej jako obiektu, niekiedy reprezentowanego symbolem \sum .

Uczeń rozumiał to słowo zgodnie z najbardziej pierwotnym jego sensem, jako *operację* dodawania, kodowaną znakiem $+$. Ponieważ na tablicy wypisane były liczby i litery, czyli pojawiła się symbolika stosowana w algebrze, zrozumiał, że wyrażenie „suma algebraiczna” odnosi się do zapisu, w którym znak $+$ istnieje pomiędzy wyrażeniami typowymi dla zapisów algebraicznych. W ten sposób interpretuje on znaczenie dwóch słów: „suma” i „algebraiczna” – suma, bo jest znak $+$, a algebraiczna, bo w wyrażeniu występują liczby i litery.

Pierwsza reakcja ucznia: „ale tu już przecież jest suma” powinna wyculić nauczycielkę na możliwość wystąpienia nieporozumienia. Uczeń sygnalizował, że przedstawione wyrażenie algebraiczne interpretuje jako sumę. Mogło to być związane z jego wcześniejszymi doświadczeniami. Stosuje słowa, które miały sens na poziomie arytmetycznym, i ten sens stara się przenieść do świata algebry.

3.4.2 Różne rozumienie kontekstu sytuacji/zadania

Na wcześniejszych lekcjach uczniowie ćwiczyli nazywanie wyrażeń algebraicznych, w których stosowano wiele działań. Było to więc ćwiczenie językowe w przekładaniu języka mówionego na język symboliczny i odwrotnie. Rozwiązali zadania typu: *Zapisz symbolicznie iloraz, w którym dzielna jest sumą wyrażenia $2x$ i liczby 5 , a dzielnik jest różnicą liczb a i b* . Były też ćwiczenia odwrotne, gdzie od zapisu symbolicznego należało przejść do wyrażenia słownego. Zapoznali się z zasadą, że nazwa wyrażenia jest wyznaczona przez to działanie, które jest wykonywane jako ostatnie. Z nauki w klasach szkoły podstawowej wynieśli regułkę, że kolejność działań jest następująca: 1. potęgowanie, 2. mnożenie i dzielenie, 3. dodawanie i odejmowanie. Tę regułkę uczniowie często „nad-interpretują”, w ich rozumieniu kolejność działań dla sumy i różnicy jest taka: najpierw dodawanie, potem odejmowanie.

Uczeń najwidoczniej powiązał obecną lekcję z lekcjami wcześniejszymi. Wyrażenie napisane na tablicy kilka lekcji wcześniej nazwałby sumą i wtedy

uzyskałby pochwałę nauczycielki. Stąd jego natychmiastowa reakcja: *Ale tu już przecież jest suma.*

Nauczyciel o wykształceniu matematycznym w trakcie swoich studiów spotkał się z nazwą "suma" w wielu różnych kontekstach. Jeden z podstawowych związany był z wykorzystaniem symbolu \sum , jego nazwą i jego znaczeniem. Słowo suma może też odnosić się np. do działań na zbiorach (suma zbiorów A i B), do szeregów funkcyjnych (suma szeregu), a nawet do alternatywy (suma logiczna). Tak różnorodne wykorzystanie tego samego słowa jest dla nauczycielki oczywiste. W swojej wypowiedzi korzysta z jednego z kolejnych znaczeń słowa *suma*. Jego aktualne znaczenie jest dla niej czytelne poprzez aktualny kontekst. Nauczycielka ani nie myśli o powiązaniu tej lekcji z wcześniejszą.

3.4.3 Skupienie uwagi na różnych fragmentach informacji

Dla nauczycielki najważniejsze było sformułowanie *przedstaw wyrażenie*. Była nastawiona na *proces* przekształcania wyjściowego wyrażenia. Uczeń „powinien” wykazać się umiejętnością zastosowaniu wzorów skróconego mnożenia, dokonania stosownych redukcji wyrazów podobnych, zapisania wyniku tych przekształceń „w najprostszej postaci”.

Dla ucznia najważniejsze było słowo *suma*. W tej sytuacji żadne działanie nie było potrzebne, gdyż wyrażenie już spełniało wymogi, by nazwać je sumą.

3.4.4 Skupienie się na własnych celach

Przebieg całego zdarzenia pokazał, że nauczycielka wymusiła na uczniu działanie. Uczeń długo nie mógł zrozumieć, o co nauczycielce chodzi. Działał pod presją jej oczekiwań, ale wciąż własne rozumienie celu zadania nie pasowało mu do wykonywanych przekształceń.

Nauczycielka oczekiwała działania według określonego algorytmu, wykazania się sprawnością rachunkową, a również zaprezentowania wiedzy teoretycznej. Jej styl pracy nauczycielskiej powodował, że była bardzo skupiona na realizacji własnych celów. Nie reagowała na sygnały pochodzące od ucznia. W niektórych sytuacjach te sygnały ignorowała (N01: *Kto podejździe do tego przykładu?* U01: (z ławki) *Ale tu już przecież jest suma.* N02: *Kto? No chodź, chodź*). W innych sytuacjach z całej wypowiedzi wybierała tylko te fragmenty, które pasowały do jej planów. (N03: *Jak to? Nie da się tu nic przekształcić?* U03: *No da się, ale suma już jest.* N04: *To jak się da, to licz*).

Cel ucznia był całkiem inny: sprawdzić, czy wyrażenie napisane na tablicy jest sumą. W jego ocenie wyjściowe wyrażenie algebraiczne spełniało już wymogi zadania, i stwierdzając ten fakt zadanie rozwiązał.

Gdyby polecenie brzmiało: *doprowadź wyrażenie do najprostszej postaci*, uczeń wiedziałby, jak postępować. Z protokołu widać, że prezentuje on dużą sprawność w przekształcaniu wyrażeń algebraicznych, zna stosowne wzory i procedury.

4 Nieporozumienia a ewolucja znaczeń w matematyce

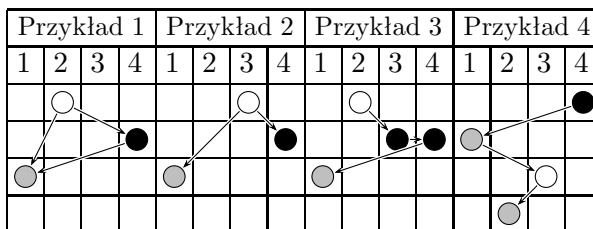
Nieporozumienia między dwiema osobami są zjawiskiem powszednim, i nie powinny nikogo dziwić. Jednak w sytuacji, kiedy zachodzi nieporozumienie, zupełnie naturalne powinno być dążenie do jego wyjaśnienia. Taka też powinna być postawa nauczyciela na lekcji: w momencie, kiedy uczeń sygnalizuje rozumienie inne niż oczekiwane, nauczyciel powinien dać szansę uczniowi na przedstawienie własnego rozumienia, a następnie zdiagnozować, skąd się wzięła różnica rozumień. Daje to szansę nauczycielowi na lepsze poznanie uczniowskich rozumowań oraz sposobów budowania jego własnej matematyki. Czasami wybrnięcie z nieporozumienia jest sprawą bardzo łatwą, czasami odkrywa głębokie błędy w rozumieniu pojęć i procedur matematycznych.

Podane przykłady pochodzą z typowych lekcji matematyki. Jak widać, nauczyciel nie zawsze korzysta z szansy, jaką daje nieporozumienie między nim a uczniem. A przecież, prowadząc z uczniem rozmowę, mógłby się tak wiele od ucznia dowiedzieć o dziecięcym myśleniu i rozumowaniu! Zbyt często ignoruje uczniowskie uwagi, narzucając własny tok postępowania z zadaniem, nie zastanawia się nad głębokim sensem dyskusji, która może się toczyć na lekcji. Dyskusji kształcącej dla obu stron w niej uczestniczących.

Analizy, które przeprowadziłyśmy, ukazują, że nieporozumienie jest zjawiskiem mocno skomplikowanym. Staraliśmy się wykorzystać wcześniejsze wyniki badań, w trakcie których wyróżniłyśmy cztery kategorie nieporozumień. Wprawdzie miałyśmy poczucie, że nie są one rozłączne, ale nie wiedziałyśmy, jakie relacje między nimi rzeczywiście zachodzą. Poniższe diagramy pokazują wyniki przeprowadzonych analiz i związki pomiędzy kategoriami. W tabeli 1 pod numerkami 1, 2, 3, 4 znajdują się wyróżnione przez nas kategorie przyczyn, czyli:

1. Różne rozumienie kontekstu sytuacji/zadania.
2. Skupienie się na własnych celach.
3. Skupienie uwagi na różnych fragmentach informacji.
4. Różne znaczenie nadawane temu samemu kluczowemu słowu.

Występowanie tych kategorii w opisywanych przez nas czterech przykładach zaznaczamy kółeczkiem, a odcień szarości wskazuje na jego znaczenie w analizowanej sytuacji (oceniane przez nas subiektywnie). Dodatkowo pokazujemy za pomocą strzałek, w jaki sposób występowanie tych kategorii było od siebie zależne. Taki przebieg jest również wynikiem naszych analiz i naszej interpretacji opisywanych sytuacji.



Rysunek 3.

Przykład	1				2				3				4			
Kolejność	2	4	1	-	3	4	1	-	2	3	4	1	4	1	3	2

Tabela 1. Obserwowane związki między kategoriami przyczyn nieporozumień

Okazuje się, że w niektórych sytuacjach można wyróżnić wszystkie opisywane przez nas kategorie, w innych tylko niektóre. Chyba najbardziej niezależną jest kategoria 2 – *skupienie się na własnych celach*. Takie usytuowanie tej kategorii wydaje się być oczywiste; świadczy bowiem o małej elastyczności osób (osoby) uczestniczącej w rozmowie, nie zwracanie uwagi na racje partnera. Może być to spowodowane silnym przekonaniem o swojej racji, ale często jest raczej wynikiem ignorowania (świadomego lub nie) stanowiska drugiej osoby. Ta kategoria może być punktem wyjścia dla nieporozumienia, jak i może powodować, że nieporozumienie nie ma szansy na rozwiązanie. Współcześni nauczyciele raczej są otwarci na prowadzenie dialogu z uczniem, więc sytuacje, w których za wszelką cenę forsują swoje racje, są rzadkie.

Drugą, dość luźną kategorią jest 3 – *skupienie uwagi na różnych fragmentach informacji*. Nie zawsze występowała ona podczas nieporozumienia, ale jeżeli wystąpiła, mogła nieść za sobą istotne konsekwencje. Jeżeli osoba mówiąca i osoba słuchająca zwracały uwagę na różne fragmenty wypowiedzi, to na ogół wiązało się to z inną oceną ważności słów składających się na całą wypowiedź, a co za tym idzie – inny odbiór informacji. Nadawało inny sens całej wypowiedzi, w tym – wpływało również na rozumienie słowa kluczowego.

Z analizy widać, że w opisywanych sytuacjach najistotniejsza i najtrudniejsza do wykrycia przyczyna nieporozumienia tkwiła w *różnym rozumieniu*

słowa kluczowego (kategoria 4). To nieporozumienie zawsze pociągało za sobą *różne rozumienie kontekstu sytuacji* (kategoria 1). W rezultacie uczeń i nauczyciel przenosili się do innej rzeczywistości, rozmawiali o innym zadaniu, lub starali się realizować inne cele.

Dlatego wydaje się, że fakt posługiwania się słowami o różnym znaczeniu dla obu stron uczestniczących w dialogu był najbardziej brzemienisty w skutki. Owo kluczowe słowo zawsze było **najpierw wypowiedziane** przez nauczyciela. To nauczyciel używał takich sformułowań, które nie były przez uczniów rozumiane, albo takich słów, których znaczenie dla ucznia było inne niż dla niego. Można wskazać co najmniej dwa następujące powody, dla których słowo kluczowe wypowiedziane przez nauczyciela nie było odbierane zgodnie z intencją osoby je wypowiadającej.

1. Nauczyciel stosował język, do którego dziecko jeszcze nie przywykło. Był to język bliski formalnemu, a przez to dla dziecka sztuczny i zmuszający do szukania własnych interpretacji. Mówienie, nawet o rzeczach bliskich dziecku, odbywało się w 'obcym dla niego języku. Formalny język dla nauczyciela nie był czymś nadzwyczajnym, był często normą wypowiedzi o matematyce. Wynikało to z funkcjonowania nauczyciela na innej płaszczyźnie rozumienia matematyki, poruszania się po matematyce jako nauce o określonych zasadach budowania wypowiedzi. Jego matematyczna „świadomość” (w sensie Wygotskiego) bywa na ogół bliższa matematyce jako nauce, niż jako twórczości. Stąd jednym z celów, które nauczyciele starają się realizować na lekcjach matematyki, jest dbałość o precyzję wypowiedzi, o wprowadzanie w kulturę matematycznego języka. Jeżeli robione jest to w taki sposób, jak zostało to pokazane na przykładach, czyli przez mówienie w tym języku *bez troski o to, jak on jest odbierany*, przynosi to skutki takie, jak opisywane.

Specyficzną odmianą formalnego języka jest swoisty „slang” matematyczny. Wypowiedzi mogą być dalekie od precyzji, ale są dobrze rozumiane przez osoby z danego środowiska. Niestety, najczęściej jedyną osobą w klasie rozumiejącą matematyczny slang jest nauczyciel.

2. Inny powód, naszym zdaniem bardziej istotny, to ewolucja znaczeń słów w matematyce. Pod tym samym słowem kryją się różne obrazy. To samo słowo swoim znaczeniem obejmuje coraz rozleglejszy zakres, i pojęcie w pierwotnym sensie jest tylko jego specyficznym przypadkiem. Nauczyciel ma te pojęcia już ukształtowane jako niezależne twory na wysokim poziomie abstrakcji, a związek pojęcia ogólnego z poszczególnymi przypadkami szczególnymi jest związkiem czysto logicznym. Zapomina, że dziecko jest jeszcze na poziomie wcześniejszym, i że odnosi słowo do szczególnego przypadku pojęcia.

W tej sytuacji dziecko, jako odbiorca komunikatu wysłanego przez nauczyciela, nadaje słowom dostępne sobie znaczenie. Interpretuje usłyszane słowa

w świetle swojej poprzedniej wiedzy, związanej zarówno ze znaczeniem pojęć, jak i procedurami. W relacji do wcześniej opisanych dwóch powodów nieporozumień (formalizm wypowiedzi nauczyciela i ewolucja znaczeń), jego interpretacje mogą iść w następujących kierunkach.

1. Jeżeli nauczyciel używa stylu, do którego uczeń nie przywykł, to uczeń każdą wypowiedź będzie starał się interpretować, a nie odbierać dosłownie. Słyszając nowe słowo, które ma rodowód podobny do słowa sobie znanego, będzie je odbierał w znaczeniu określonym przez słowo znane. Jak widać z przykładu 1, dotyczącego związku między słowami rozwarty i rozwartość, te interpretacje nie zawsze są trafione.

2. Słowo jest związane ze świadomością matematyczną i kryje znaczenie, które jest określone przez tę świadomość. U dziecka rozumienie pojęć kształtowało się na ogół w jego umyśle bez definicji, dlatego znaczenie słowa wypełnione jest bogatą treścią empiryczną (Wygotski, s. 268). Dodatkowo, specyfiką *tworzenia* matematycznej struktury jest to, że pojęcia nowe są odnoszone do znanych pojęć i procedur. Zanim staną się one osobnymi, niezależnymi bytami, karmią się własnościami obiektów znanych. To jest podstawowy powód, że dla dziecka kluczowe słowo może różnić się znaczeniem w stosunku do znaczenia posiadanego przez nauczyciela. Dzieje się to w wyniku:

- skojarzenia z procedurą, a nie z pojęciem („powiększ” rozumiane poprzez pryzmat dodawania),
- skojarzenia z innym pojęciem, dobrze znanym i funkcjonującym w danej sytuacji, przesunięcia znaczenia z innego słowa (ar widziany z perspektywy kwadratu),
- odnoszenia słowa do jednego izolowanego modelu, wraz ze specyficznymi własnościami tego modelu (suma rozumiana jedynie jako dodawanie).

Można więc powiedzieć, że nieporozumienia na lekcjach matematyki mają swoją specyfikę związaną zarówno ze sposobem tworzenia wiedzy matematycznej, jak i z ewolucją znaczeń słów (ewolucją pojęć kryjących się pod tym samym słowem). Czasami dodatkowo zamieniają się słowa związane z pojęciem (to samo pojęcie zmienia swój kod słowny), i ten fakt staje się dodatkowym utrudnieniem dla dziecka. W przedstawionych sytuacjach obserwowaliśmy takie przypadki.

Refleksja na zakończenie

Wspólne prowadzenie badań, a głównie wspólne analizy w kierunku poszukiwania korzeni nieporozumień pokazało nam dodatkowo, w jak dużym stopniu

„około-formalny” język, którym posługują się nauczyciele, jest uwarunkowany kulturowo. Fakt, że autorki pochodzą z różnych krajów, pomógł ulepszyć metodologię badawczą. Prowadząc wspólne dyskusje i analizy przekonaliśmy się, jak silny jest wpływ kontekstu na wzajemne porozumienie, a z drugiej strony, jak skryty jest to czynnik. Uświadomiło to nam przepaść kulturową widoczną w klasie, oczywistą ale często ignorowaną. Kultura matematyczna nauczyciela i ucznia jest nieporównywalna, zwłaszcza jeżeli nauczyciel ma pełne matematyczne wykształcenie, a uczeń jest uczniem szkoły podstawowej.

Literatura

Bąk, M.: 1984, Powstanie i rozwój polskiej terminologii nauk ścisłych, *Monografie z dziejów nauki i techniki*, tom CXXX. Zakład Narodowy Imienia Ossolińskich, Wydawnictwo PAN.

Dianin, J. Wachulka, A.: 1963, *Tysiąc lat polskiej myśli matematycznej*, PZWZ Warszawa.

Hejný, M.: 2003, Understanding and Structure, w: Mariotti, M.A. (ed.). *Proceedings CERME3 Bellaria-Italy, 28th Febr. – 3rd 2003*, CD ROM.

(http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG3/TG3.Hejny_cerme3.pdf)

Hejný, M. Littler, G.: 2006, Transmissive and constructivists approach to teaching. w: *Creative teaching in mathematics, The IIATM project No. 2112218-CP-2003-COMENIUS-2.1*

Kratochvilová, J., Swoboda, E.: 2003, Aspects Affecting Pupil's Thinking in Mathematics During Interactions Researcher-Pupil, w: Mariotti, M.A. (ed.) *Proceedings CERME3 Bellaria-Italy, 28th Febr. – 3rd 2003*, CD ROM.

(http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG3/TG11.Kratochvilova_cerme3.pdf)

Krygowska, Z.: 1975, *Geometria dla klasy I Technikum*. WSiP, Warszawa.

Kvasz, L.: 2005, On Linguistic Aspects of Structure Building, w: *Proceedings of CERME4*, CD ROM.

(lub <http://cerme4.crm.es/papers>)

Pawlikowska, Z.: 1964, Z historii polskiej terminologii matematycznej, cz. I, II, III. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria II, Wiadomości Matematyczne*, **IX**, 91-126.

Pawlikowska-Brożek, Z.: 1999, Simon Lhuillier w Polsce. Domo-radzki, S., Pawlikowska-Brożek, Z., Węglowska, D. (red.) *XII Szkoła Historii Matematyki, Krynica 1998*. Wydawnictwo Wydziału Matematyki Stosowanej

AGH, 94-104.

P i a g e t, J.: 1992, *Mowa i myślenie dziecka*, Biblioteka klasyków Psychologii, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

S f a r d, A.: 2000, On reform movement and the limits of mathematical discourse', *Math. Thinking and Learning*, **2(3)**, 157-189.

S l e z a k o v a, J., S w o b o d a, E.: 2007, Obstacles in mathematical discourse during researcher – student interaction. *Proceedings of CERME 05*, <http://ermeweb.free.fr/CERME5>.

S l e z a k o v a - K r a t o c h v i l o v a, J., S w o b o d a, E. : 2006, Kognitywne przeszkody w komunikowaniu się nauczyciel – uczeń, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **29**, 185-207.

W i ę s ł a w, W.: 1998, Wpływ przekładów dzieł matematyków francuskich na matematykę w Polsce, *XII Szkoła Historii Matematyki – Krynica'98* Wydawnictwo Wydziału Matematyki Stosowanej AGH, 105-124.

W i ę s ł a w, W.: 1997, *Matematyka i jej historia*. Wydawnictwo NOWIK, Opole.

W i ę s ł a w, W.: 1999, „Geometra Polski” Stanisława Solskiego, *Matematyka* **2**, 68-77.

W i ę s ł a w, W.: 2000, Simon Lhuillier i jego podręczniki, *Matematyka* **1**, 3-11.

W u c z y ł s k a, K.: 1995, Podręczniki szkolne i akademickie przed rokiem 1920. Red. S. Fudali, w: *Materiały z IX ogólnopolskiej Szkoły Historii Matematyki, Międzyzdroje*. Szczecin, 255-277.

W y g o t s k i, L. S.: 1989, na podstawie wyd. z roku 1966, *Myślenie i Mowa*, Biblioteka Klasyków Psychologii, PWN, Warszawa.

Varying meaning of words in a mathematical discourse

S u m m a r y

The research problem of this investigation is what are the sources of misunderstandings between the teacher and a student that spontaneously occur during a mathematical discourse. Several episodes of mathematics classes are here analyzed, in which the meaning of a word or expression was different for the teacher and a student. They are analyzed with respect to four kinds of cognitive obstacles identified previously:

- A. *Different understanding of the context of a situation or a problem.* The teacher while designing a problem or a context situation, which aims at bringing a concept closer to the student, is able to extract the concept out of the context, knows what is important and what is not. A projection concept \rightarrow context situation is functioning in her thinking. A student solving the problem designed by the teacher will try to exploit all his school and out-of-school knowledge. Associating experience may be linked with different mathematical concepts or be detached from mathematics. The students' mathematical knowledge may prove to be different from that expected by the teacher, and the out-of-mathematics knowledge may cause some aspects of the situation, for the teacher unimportant, to dominate.
- B. *Focusing on own goals.* The teacher knows what she intends to achieve when proposing to solve a certain problem. It can be getting a skill or discovering some property or connections, important for the science of mathematics. Those objectives often determine the desired way of handling the problem, deviations of it being considered faulty. The student is focused on finding the solution and doing it with least effort. So she/he will apply approaches that she/he knows and thinks to be most efficient.
- C. *Focusing on different pieces of information.* Understanding of an utterance is possible because of all words being kept in memory, so that the meaning of each can be located in a context. The sense of the whole utterance depends on which part of it has been highlighted.
- D. *Different meanings assigned to the same key word.* Building one's own mathematics is a long-lasting process, in the course of which some words may change their meanings. Different meanings assigned to the same words stimulate enacting different procedures and operations attached to the given concept. As a result, the same word evokes different properties, connections, and relations.

Example

A mathematics class, 2nd year of junior secondary school (17-year-old students).

The topic: Transforming algebraic expressions with the use of formulas.

Teacher: *Represent the given expression in the form of an algebraic sum:*

$$(x + 3)^2 + (2x + 5)(2x - 5)$$

Teacher 01: *Who would come to do this example?*

Student 01: (sitting) *But there is a sum here already, though.*

T02: *Who? Come, come.*

S02: *But there is nothing to do here.*

T03: *Why? Nothing can be transformed?*

S03: *Well, one could, but a sum is there already.*

T04: *So, if one could then calculate.*

S04: *But...*

T05: *Please come to the blackboard.*

S05: (reluctantly): $(x + 3)^2 + (2x + 5)(2x - 5) = (x^2 + 6x + 9) + (4x^2 - 25)$.

T06: *Speed up, remove those brackets.*

S06: $x^2 + 6x + 9 + 4x^2 - 25$.

T07: *What next?*

S07: underlines similar terms.

T08: *How is it called? Redu . . .*

S08: *Reducing similar terms.* $5x^2 + 6x - 16$.

T09: *Thank you, sit down please.*

S09: (returning to his chair) *Ha, and it is a difference coming out, not a sum...*

Different meanings assigned to the same key word

For the teacher, an algebraic sum should be composed of monomials with the plus signs between them. The student associated with the word sum its original meaning: the adding operation, usually coded with +. On the blackboard he saw numbers and letters: symbols used in algebra. To him, an „algebraic sum” referred to a situation where the plus sign occurred in-between algebraic symbols.

Different understanding of the context of a situation or a problem

In previous lessons students practiced translation of a verbal formula to the symbolic one and inversely. The student may have associated the present task with the former one where calling a sum the expression $(x+3)^2+(2x+5)(2x-5)$ would be approved. Hence his reaction *But there is a sum here already, though.*

Focusing on different pieces of information

To the teacher, importance of the task was in *Represent the given expression*. Representing (transforming) an expression is meant as a process, in which the student should show her/his ability to use the $(a+b)^2$ formula, to reduce similar terms, and to get the „simplest form”. To the student, the most important was the word *sum*. In the given situation no action was needed as the expression was a sum already.

Focusing on own objectives

The event shows that the student’s action was forced by the teacher. The former for long could not catch the teacher’s intention. She/he worked under the pressure of the teacher’s expectations, yet her/his own understanding of the objective did not fit her/his action. The teacher on her part expected executing an algorithm, showing skill, as well as theoretical knowledge.

In further analysis the authors show that the dominant reason of a misunderstanding is the difference of meanings assigned to words by the teacher and the student. There are two causes of this phenomenon:

- the teacher uses words, common to her, to which the student is not accustomed,
- in the course of learning meanings of mathematical words evolve.

The research has made the authors aware of a cultural gap, which exists in the mathematics classroom. The teacher’s mathematical culture is incomparable with that of a student.