ANNALES OF THE POLISH MATHEMATICAL SOCIETY
5TH SERIES: DIDACTICA MATHEMATICAE 30 (2007)

Renata Wojtuś
Wyższa Szkoła Umiejętności im. S. Staszica w Kielcach

Komputer w pozalekcyjnej pracy ucznia — fragment badań

1 Wprowadzenie

Postępujący w szybkim tempie rozwój technologii informacyjnych wywiera ogromny wpływ na niemal wszystkie dziedziny ludzkiej działalności, w tym także na system edukacyjny.

Już dawno doceniono zalety komputera jako narzędzia programistycznego mającego ogromne możliwości przetwarzania wielu informacji w szybkim czasie (Bogaj, Zegadło, 1971). Podkreślano pozytywne strony wykorzystania programów komputerowych w obliczeniach numerycznych, a także fakt, że można uczyć się szybciej i rozumieć lepiej, jeśli ma się możliwość zaprogramowania swojego problemu i uruchomienia go na komputerze. Istnieje, bowiem, ogromna różnica pomiędzy opisem procesu i jego realizacją przez program, gdyż charakter pracy maszyny, wykonywanie przez nią ściśle określonych instrukcji zmusza do bardzo drobiazgowej kontroli i wszechstronnego rozpatrzenia problemu. Ponadto komputer umożliwia rozpatrzenie przykładów, które nie dają się rozwiązać na danym etapie kształcenia (Young, 1968, Walker, 1968, Przybyło, 1969, Smith, 1970, Krygowska, 1977).

W Polsce i na świecie od szeregu lat prowadzone są liczne badania związane z wykorzystaniem komputerów w procesie nauczania i uczenia się matematyki. Świadczą o tym liczne publikacje dotyczące różnych aspektów zastosowania komputera w edukacji.

Przeważającą ich część stanowią przykłady zastosowania wybranych programów komputerowych na lekcjach (Pająk, 2006, Ulman, 2006), wykorzystania komputera do wizualizacji pojęć, rozwiązywania konkretnych zadań (Hajłasz, 1991).

Można odnaleźć publikacje i relacje z badań na temat zastosowań różnych języków programowania (np. Logo, Basic, Fortran) oraz programów komputerowych (np. Cabri, Derive, Mathematica, Winplot) w:

- nauczaniu logiki (Cater, Johnstone, 1975, Goldberg, Suppes, 1976),
- nauczaniu statystyki i prawdopodobieństwa (Kąkol,1990),
- nauczaniu geometrii (Laborde (2000) i Sutherland (1989) omawiają wpływ stosowania programów dynamicznej geometrii na kształcenie umiejętności dowodzenia, Hille, Kieran, Gurtner (1989) mówią o roli obrazu komputerowego w wybieraniu strategii rozwiązania zadania),
- nauczaniu algebry (np. kształtowanie pojęcia zmiennej (Sutherland, 1989, Tall, Thomas, 1991)),
- w procesie nauczania matematyki (rola komputera w procesie rozwiązywania zadań matematycznych (Ratusiński, 2003, Kąkol, Ratusiński, 2004), prowadzeniu rozumowań matematycznych (Parcia, 2004), wykorzystania komputera jako środka dydaktycznego w nauczaniu (Artigue, 1997, Ruthven, Henessy, 2002)).

Interesujące są też badania nad związkiem miedzy nastawieniem do komputera i nastawieniem do samej matematyki (Moreira, Noss, 1995; Ganguli, 1992; Vale, Leder, 2004), a także strategią zarządzania czasem na lekcji matematyki przy wprowadzaniu nowych technologii informatycznych (Assude, 2005), wykorzystania platformy e-learningowej jako narzędzia wspomagającego nauczanie i uczenie się matematyki (Leżański, 2005).

W Polsce zastosowaniem nowych technologii w uczeniu się – nauczaniu matematyki poświęcony jest kwartalnik Matematyka i Komputery. Także w czasopiśmie *Matematyka* od początku 2006 roku wprowadzono dział „Informatyka dawniej i dziś". Zagadnienie nauczania matematyki z wykorzystaniem komputera jest również tematem obrad wielu specjalistycznych konferencji naukowych, wśród których na uwagę zasługuje ICTMT, organizowana co dwa lata w różnych miejscach świata. Na konferencjach tych prezentowane są walory techniczne i dydaktyczne najnowszych programów komputerowych pomagających w nauczaniu matematyki, poruszane są tematy związane z wykorzystaniem Internetu w nauczaniu, zintegrowania matematyki i informatyki, przedstawianych jest wiele przykładów wykorzystania programów komputerowych w różnych dziedzinach matematyki na różnych poziomach kształcenia matematycznego, prezentowane są wyniki prowadzonych badań naukowych (Triandafillidis, Hatzikiriakou, 2003; Olivero, Sutherland, 2005).

Przegląd literatury związanej z nauczaniem matematyki przy wykorzystaniu komputera pozwala na stwierdzenie, że zastosowanie tego środka w procesie nauczania może przynieść wiele korzyści. Jednak we wszystkich publikacjach opisywane są sytuacje wykorzystania komputera **w obecności nauczyciela, najczęściej na zajęciach,** rzadziej poza nimi. Nie znalazłam publikacji i sprawozdań z badań, które pokazywałyby, jakie są efekty stosowania przez uczniów komputera i programów matematycznych poza lekcją (w pracy domowej, samodzielnej nauce) w procesie uczenia się matematyki. Ponadto większość opisanych badań odbywała się z wykorzystaniem komercyjnych programów komputerowych, do których uczniowie nie mieli dostępu po zajęciach szkolnych. Nie mieli więc też możliwości ponownego sprawdzenia treści przekazywanych na lekcji. Czas na lekcji był ograniczony, uczniowie radzący sobie słabej z komputerem niejednokrotnie nie byli w stanie wykonać wszystkich eksperymentów związanych z danym tematem.

Z moich obserwacji wynika, że w naszym systemie edukacyjnym nauczyciele na ogół nie wykorzystują nowoczesnych środków dydaktycznych (komputer, kalkulator graficzny) na lekcji matematyki. Przyczyn tego faktu jest wiele: jedną z nich, o której wspomina Kordos (2006), jest fakt, że uczniowie są bardziej oswojeni z komputerem niż ich nauczyciele, kolejną — słaba wiedza nauczycieli na temat możliwości wykorzystania TI w nauczaniu. Komputery w szkole mają zastosowanie dydaktyczne z reguły na lekcji informatyki, nauczyciele innych przedmiotów wciąż nie mają odpowiednich programów oraz wiedzy na temat możliwości ich wykorzystania.

A przecież, jak twierdzi Galloway (1976), „nauczanie oparte w głównej mierze na przekazie werbalnym może być nieefektywne i niewystarczające nie tylko we wczesnych latach. Na poziomie szkoły średniej, a nawet uniwersytetu, struktura materiału, który ma być przyswojony, nadal musi być dostosowywana do struktur wiedzy uczniów. I choć większość z nich osiągnęła stadium inteligencji formalno-operacyjnej i jest w stanie poradzić sobie z pojęciami i regułami na poziomie abstrakcji słownej, to jednak ich struktury wiedzy niekoniecznie muszą zawierać te wszystkie specyficzne pojęcia i reguły, które są niezbędne do uporania się w sferze abstrakcji z określonymi, nowymi dla nich problemami.

Jeśli nasze nauczanie ma w tym przypadku zapewnić uczniom odpowiednie ćwiczenia, to należałoby włączyć do niego doświadczenia z materiałami konkretnymi — z rzeczywistymi przedmiotami czy zdarzeniami, modelami, wykresami, zdjęciami — które mogą zostać odebrane w sposób bezpośredni i doprowadzić do rozróżnień i pojęć konkretnych. Wówczas uczniowie będą się już mogli posługiwać ze zrozumieniem na poziomie abstrakcji słownej pojęciami abstrakcyjnymi i regułami dotyczącymi nowej problematyki. Próby ominięcia wymogu opanowania ze zrozumieniem wiedzy wstępnej i zdanie się na puste oddziaływanie werbalne to polityka bardzo ryzykowna”.

Powyższą wypowiedź można odnieść do komputerów, które odpowiednio wykorzystane mogą być dobrym środkiem do symulowania sytuacji rzeczywistych, manipulowania obiektami matematycznymi.

Opisane w literaturze przykłady, rozważania, wyniki badań związanych z funkcjonowaniem komputera na lekcji matematyki (Kąkol, Ratusiński, 2004, Parcia, 2004) wskazują, że odgrywa on istotną rolę w kształtowaniu pojęć matematycznych, prowadzeniu rozumowań matematycznych, kształtowaniu języka matematycznego, rozwijaniu aktywności matematycznych, rozwiązywaniu zadań.

Jak wspomniałam wcześniej, wielu nauczycieli w swym warsztacie środków dydaktycznych nie wykorzystuje komputera. Rodzą się pytania: czy więc ich uczniowie nie mogą „przeżywać” matematyki jak ci, którzy pracują z komputerem na lekcji? Czy uczniowie ci mogą sami, ucząc się matematyki z pomocą komputera rozwijać swe aktywności i umiejętności matematyczne? Jakie aktywności i w jakim stopniu mogą być rozwijane przez uczniów w samodzielnej, pozalekcyjnej nauce matematyki wspomaganej komputerem?

Pytania te są uzasadnione tym bardziej, że w dobie ogromnego postępu technologicznego wielu uczniów posiada komputer w domu, a więc możliwa jest sytuacja: komputer nie jest wykorzystywany na lekcji, ale uczeń ma do niego dostęp po zajęciach szkolnych i może go stosować w uczeniu się matematyki, przygotowaniu do lekcji, opanowaniu materiału.

Pojawia się jednak pytanie: czy uczniowie chcą korzystać z komputerów i odpowiednich programów poza lekcją matematyki?

Deficyt badawczy związany z powyższymi zagadnieniami stał się motywacją do podjęcia prób badawczych w tym zakresie.

2 Problematyka pracy i organizacja badań

Problematyka mojej pracy związana jest z wykorzystaniem przez uczniów matematycznych programów komputerowych w procesie nauczania i uczenia się matematyki, a w szczególności w samodzielnej pozalekcyjnej pracy ucznia.

Celem prowadzonych przeze mnie w tym zakresie badań jest rozwiązanie następującego problemu badawczego:

Jaka jest rola komputera w samodzielnej pozalekcyjnej pracy ucznia?

W szczególności interesują mnie zagadnienia:

1. Czy w trakcie samodzielnej nauki poza lekcją matematyki uczniowie odczuwają potrzebę korzystania z programu komputerowego?

2. W jakich sytuacjach uczniowie wykorzystują matematyczne programy komputerowe poza lekcją matematyki?
3. Jaki wpływ ma stosowanie matematycznych programów komputerowych na wyniki w nauce, na rozwój aktywności i umiejętności matematycznych?
4. Jaki wpływ ma stosowanie matematycznych programów komputerowych na sposób podejścia uczniów do rozwiązywanych zadań?

Zaplanowałam następujące zadania badawcze:

1. Określenie stopnia znajomości obsługi matematycznych programów komputerowych przez uczniów.
2. Wdrożenie uczniów do pracy z wybranymi matematycznymi programami komputerowymi.
3. Skonstruowanie narzędzi badawczych.
4. Obserwacja pracy uczniów na lekcji.
5. Analiza prac domowych i sprawdzianów.
6. Weryfikacja narzędzi badawczych.

Aby znaleźć choćby częściową odpowiedź na postawione w problemie badawczym pytanie przeprowadziłam cykl badań:

Badania wstępne

Rozpoczęłam je w roku szkolnym 2004/2005 w trzech klasach drugich w dwóch kieleckich liceach ogólnokształcących. Uczniowie tych klas nie korzystali na lekcji z komputera, nie mieli doświadczeń w pracy z matematycznymi programami komputerowymi, realizowali program nauczania wybrany przez nauczyciela matematyki w danej klasie.

Chciałabym podkreślić, że moje badania nie wiążą się z sytuacją wykorzystania komputera na lekcji matematyki, lecz poza szkołą (najczęściej w warunkach domowych), gdy uczniowie mają dostęp do komputera, dysponują programami matematycznymi, mogą z nich korzystać w dowolnym momencie nauki po lekcji. To oni decydują, czy użyją komputera, jak długo chcą z niego korzystać i w jakiej sytuacji.

Na początku badań przeprowadziłam wśród uczniów każdej z klas czteroczęściową ankietę, której celem było uzyskanie informacji na następujące tematy:

1. Nastawienie do komputerów.
2. Znajomość programów komputerowych i obsługi komputera.
3. Nastawienie do matematyki.
4. Ilość zajęć pozalekcyjnych, czas i systematyczność odrabiania prac domowych.

Z ankiety wynika, że 97% uczniów posiada własny komputer, 79 % korzysta z niego codziennie, 79% jest do niego pozytywnie nastawionych, 99% uczniów nie zna żadnego matematycznego programu komputerowego.

Następnie w każdej z klas przeprowadziłam po dwie godziny zajęć, na których prezentowałam sposoby wykorzystania matematycznych programów komputerowych w rozwiązywaniu zadań, odkrywaniu własności, wizualizacji pojęć.

Rozpoczęłam od programu Winplot. Poinformowałam uczniów o tym jak sporządzać wykresy funkcji, odczytywać miejsca zerowe oraz jak zmieniać wartości odpowiednich parametrów. Wspólnie z uczniami rozwiązywaliśmy zadania:

1. Dana jest funkcja $f(x) = \sqrt{(a-1)\,x^2 - ax + 3}$.
Znajdź taką liczbę a, aby dziedzina tej funkcji była:
a) zbiorem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$,
b) przedziałem liczbowym
Czy dziedzina rozpatrywanej funkcji może być jeszcze innym zbiorem?

Uczniom bardzo spodobała się własność programu pozwalająca zmieniać wartości parametru i obserwować natychmiast zmiany wykresu funkcji.

2. Wykorzystując program C.a.R.:

a) Skonstruuj okrąg, mając dany jego środek i odcinek równy długości średnicy tego okręgu.
b) Skonstruuj trójkąt mając dane trzy odcinki. Zmierz długości boków trójkąta, kąty trójkąta. Korzystając z możliwości programu zmieniaj długości odcinków i odpowiedz na pytanie: Czy w każdym przypadku można zbudować trójkąt? Odpowiedź uzasadnij znanym Ci twierdzeniem.
a) Skonstruuj okrąg opisany na trójkącie lub okrąg wpisany w trójkąt.

3. Wykorzystując program Winplot, sformułuj własności funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$

Uczniom lekcje bardzo się podobały, o czym świadczyć mogą ich anonimowe opinie, o które prosiłam po lekcjach: „Spodobały mi się programy i ich możliwości”, „Programy umożliwią nam lepszą i ciekawszą pracę w domu”,

„Można sprawdzić wiele różnych sposobów rozwiązywania zadań, Nie jest to nudne i monotonne jak książka”, „Fajne programy, chciałbym mieć takie w domu”, „Praca z komputerem zachęca uczniów do działania. Myślę, że to dobry sposób na pogłębianie swojej wiedzy matematycznej”, itp.

Grupę, którą badałam, stanowili uczniowie, którzy dobrowolnie zgłosili się do badań po tych lekcjach. Spośród 117 uczniów chęć wzięcia udziału w badaniach wyraziły 43 osoby — tylko tyle było zainteresowanych wykorzystaniem komputera w samodzielnej pracy pozalekcyjnej, wśród nich 18 z klasy matematyczno-fizycznej, 25 z klas o profilu ogólnym (Tabela 1).

Klasa	Liceum	Profil	Liczebność klasy	Iiczba osób, które zgłosiły się do badań
II a	III LO	ogólny z rozszerzoną informatyką i j.angielskim	43	12
II d			43	13
II a	IV LO	matematyczno-fizyczny	35	18

Tabela 1.

Uczniowie ci otrzymali ode mnie matematyczne programy komputerowe. Początkowo były to: Wykresy i C.a.R.[1] Jednak uczniowie sygnalizowali niechęć do pracy w programie Wykresy spowodowaną brakiem wyświetlania jednostek, dlatego też lista programów została powiększona o program Winplot. Ponadto uczniowie otrzymali opracowane przeze mnie „samouczki” zawierające najważniejsze instrukcje i wskazówki związane z pracą w tych programach oraz zadania sprawdzające umiejętność obsługi aplikacji Winplot i C.a.R. O ich wyborze zdecydowała przede wszystkim łatwa dostępność (programy bezpłatne), możliwości, nieskomplikowana obsługa.

Prowadząc badania hospitowałam lekcje w poszczególnych klasach, współpracowałam z nauczycielami matematyki przy konstrukcji prac domowych i sprawdzianów, które następnie poddawałam analizie. Celem tej współpracy był dobór takich zadań, by można było w nich w efektywny sposób wykorzystać komputer, by mógł on podpowiedzieć sposób rozwiązania zadania, wizualizować problem, np.:

Zad. Dla jakich wartości zmiennej m równanie $\left|x^2-4\right| = m^2+1$ ma dokładnie dwa rozwiązania?

Zad. Wyznacz równanie krzywej, jaką opisuje wierzchołek paraboli o podanym równaniu, jeśli m jest dowolną liczbą rzeczywistą:
a) $y = 2x^2 - 4(m+1)x + 2m^2 - m$

[1] Chociaż w badaniach wstępnych nie skupiałam się na wykorzystaniu przez uczniów komputera w trakcie realizacji działów dotyczących geometrii, to na płycie uczniowie otrzymali program C.a.R.

b) $y = x^2 - 2(m+1)x + 6m - 4$
c)$y = x^2 - 2(m-3)x + m - 8$

Zad. Wyznacz największą wartość funkcji w podanym przedziale
a) $f(x) = -x^2 + 2x + 5,\ x \in \langle 0, 3\rangle$
b) $f(x) = 2x^2 - 4,\ x \in \langle 1, 2\rangle$

W trakcie prowadzonych badań obserwowałam podczas lekcji badanych uczniów pod kątem rozwoju ich aktywności i umiejętności matematycznych, sposobów rozwiązywania przez nich zadań; analizowałam prace domowe i sprawdziany, prowadziłam rozmowy z uczniami, udzielałam pomocy technicznej z zakresu obsługi programów. W etapie tym obserwacje dotyczyły problemu wykorzystania przez uczniów komputera w ich pozalekcyjnej pracy podczas realizacji działu funkcje kwadratowe. Jednak przez cały rok uczestniczyłam w lekcjach matematyki, aby uczniowie mogli zadawać pytania związane z wykorzystaniem programów także w innych działach matematyki.

Pod koniec roku szkolnego, po zrealizowaniu materiału klasy II, nauczyciele zadali uczniom długoterminową pracę domową. Uczniowie mieli opracować: jeden z 12 tematów z części I (przy czym do jednego tematu mogło się zgłosić **nie więcej niż 5 osób**), rozwiązać dwa zadania z części II, jeden problem otwarty z części III.

Przykładowe tematy i zadania z długoterminowej pracy domowej:

Część I

1. Przekształcenia wykresów funkcji
2. Wykresy funkcji z wartością bezwzględną.
3. Równania i nierówności z wartością bezwzględną
4. Wzajemne położenie prostej i okręgu, położenie dwóch okręgów
5. Wielokąty wpisane w okręgi, opisane na okręgu

Część II

Zad. Geometryczna konstrukcja wykresu funkcji $y = x^2$

Zad. Zbadaj wykres funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ w zależności od współczynników a, b, c.

Zad. Jaki zbiór tworzą wszystkie punkty odległe o daną liczbę a od danego okręgu o promieniu długości r?

Zad. Znaleźć taki punkt wewnętrzny trójkąta, którego odbicie symetryczne względem dowolnego boku leży na okręgu opisanym na tym trójkącie.

Część III

Zad. 1 Dany jest prostokąt ABCD i punkt M. Niech punkty K, L, R, P będą odpowiednio punktami symetrycznymi do punktu M względem środków boków AB, BC, CD, DA. Co można powiedzieć o czworokącie utworzonym z punktów K, L, R, P?

Zad. 2 W kwadracie ABCD punkt E jest środkiem boku BC, punkt F środkiem boku CD. Odcinki AE i AF dzielą przekątną BD na 3 części. W jakim stosunku są części podzielonej przekątnej?
Czy odkryta własność będzie charakterystyczna także dla innych czworokątów?
Rozważ sytuację, w której odcinki BC i CD dzielimy nie na dwie, ale na trzy (spróbuj też na więcej) części.

Tematy części I celowo zostały sformułowane w sposób ogólny, by uczniowie sami mogli zdecydować, co w danym dziale matematyki jest dla nich ciekawe, jak i również by mogli wybrać te treści z danego działu, które mogą interesująco, również z użyciem komputera, rozwiązać i opisać.

Uczniowie zostali poinformowani, z jakich materiałów mogą korzystać (m.in. programy komputerowe, Internet). Efektem ich pracy były sprawozdania, które oprócz opracowania poszczególnych zadań zawierały informację o źródłach, z jakich korzystał uczeń, motywację zainteresowania wybranym tematem, napotkane trudności. Na realizację pracy mieli 3 tygodnie.

Obserwacje poczynione w fazie badań wstępnych pozwoliły na sformułowanie wniosku, że wykorzystanie komputera w samodzielnej pozalekcyjnej pracy uczniów pozytywnie wpłynęło na ich proces uczenia się matematyki, rozwój aktywności matematycznych, twórczą postawę wobec zadań. Równocześnie dało się zauważyć, że większość uczniów nie była zainteresowana wykorzystaniem komputera w samodzielnej pracy, mimo że wszyscy chętnie widzieliby go jako środek dydaktyczny stosowany na lekcji.

Spośród 43 uczniów tylko 6 korzystało systematycznie z komputera, 8 sporadycznie, 20 osób zainstalowało programy i zerknęło kilka razy (z ciekawości), 9 osób nie zrobiło nic, nawet nie zainstalowało programów. (Tabela 2)

Liczba osób, które zgłosiły się do eksperymentu	Osoby, które nie zrobiły nic (nawet nie zainstalowały programu)	Zainstalowały i zerknęły kilka razy (z ciekawości)	Ucząc się korzystały sporadycznie	Korzystały często
43	9	20	8	6

Tabela 2.

Z rozmów z uczniami wynika, że korzystanie z matematycznych programów komputerowych jest dla nich dodatkowym obowiązkiem, a nie pomocą w uczeniu się matematyki. Brakiem czasu tłumaczyli nie zainstalowanie programów i nie korzystanie z nich, bądź korzystanie w niewielkim zakresie. Niektórzy uczniowie sądzili, że będziemy więcej zadań rozwiązywać wspólnie na lekcji matematyki. Twierdzili, że przydałyby się zajęcia dodatkowe w szkole, na których uczyliby się obsługi programów i rozwiązywali zadania. Jednak zajęcia te chcieliby organizować podczas lekcji matematyki, tłumacząc, że po lekcjach brak im czasu. Zorganizowałam jednak dla uczniów takie popołudniowe zajęcia w swojej uczelni, ponieważ w szkołach pracownie komputerowe są zbyt obciążone. Niestety, nikt nie przyszedł.

Badania właściwe

Zaplanowałam je w dwóch etapach:

I etap obejmował okres roku szkolnego 2005/2006. Organizacja i metodologia tych badań była taka jak w badaniach wstępnych. Uczniowie wypełniali taką samą ankietę, prowadziłam lekcje, na których prezentowałam identyczne przykłady wykorzystania programów w nauczaniu i uczeniu się matematyki. Uczniowie otrzymali także taką samą długoterminową pracę domową. Wszystko po to, by stworzyć analogiczne, jak w badaniach wstępnych warunki do pracy i obserwacji.

Chcąc zweryfikować dotychczasowe spostrzeżenia, sprawdzić, jakie będą wyniki w innej i większej grupie uczniów, zwiększyłam liczbę szkół i klas, a także zakres materiału, który w tym etapie obejmował wszystkie działy matematyki szkolnej obowiązujące w klasie II liceum (a nie tylko funkcji kwadratowej jak w badaniach wstępnych). Podczas badań wstępnych uczniowie pracowali z komputerem w krótkim okresie czasu. Być może było to przyczyną, że tak mało osób było zainteresowanych wykorzystaniem programów.

Przykładowe zadania:

Zad. Dla jakich całkowitych wartości parametru m wielomian

$$W(x) = (m-1)\,x^2 - \left(m^2+1\right)x + m^2 + m$$

ma całkowite pierwiastki?

Zad. Znajdź równanie wielomianowe stopnia co najmniej 4, które nie ma rozwiązań.

Zad. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^2 + 2(m-2)\,x^2 + m^2 - 1 = 0$ ma dwa różne pierwiastki?

Zad. Ile punktów wspólnych ma okrąg o środku w punkcie $(0,0)$ i danym promieniu r z hiperbolą $y = \frac{1}{x}$

a) $r = 1$,

b) $r = 2$.

Zad. Jaki zbiór tworzą wszystkie punkty odległe o daną liczbę a od danego okręgu o promieniu długości r?

Zad. W trójkącie prostokątnym z wierzchołka kąta prostego poprowadzono środkową. Na tej środkowej, jako na średnicy, zbudowano okrąg. Na jakie części zostały podzielone przez ten okrąg przyprostokątne trójkąta?

Zad. Wyznacz zbiór środków okręgów stycznych do dwóch przecinających się prostych k, l.

Zad. Dany jest kwadrat $ABCD$. Niech punkt E będzie środkiem BC, a punkt F środkiem CD. Odcinki AE i AF dzielą przekątną BD na 3 części. W jakim stosunku są części podzielonej przekątnej? Sformułuj twierdzenie i udowodnij je.

Z przeprowadzonej na początku w tym etapie badań ankiety wynika, że 96% uczniów posiada własny komputer, 82% korzysta z niego codziennie, 81% jest do niego pozytywnie nastawionych. Jest to istotny fakt, bowiem jak pokazują wyniki prowadzonych na świecie badań (Ganguli, 1992) istnieje związek między nastawieniem do komputera a nastawieniem do matematyki. Ankieta wykazała także, że 95% uczniów nie zna żadnego matematycznego programu komputerowego.

W Tabeli 3 zestawione są ilościowe dane na temat uczniów, którzy brali udział zarówno w badaniach właściwych (I etap) jak i, dla porównania, w badaniach wstępnych.

Badania	Liczba uczniów w klasach	Liczba uczniów, którzy wzięli udział w badaniach	Uczniowie, którzy nie zrobili nic (nawet nie zainstalowali programów)	Zainstalowali i zerknęli kilka razy (z ciekawości)	Ucząc się korzystali sporadycznie	Korzystali często
Wstępne	117	43	9	20	8	6
Właściwe	191	59	15	32	7	5

Tabela 3.

Wyniki i spostrzeżenia z przeprowadzonych do tej pory badań właściwych pokrywają się z wynikami badań wstępnych. Spośród wszystkich uczniów klas niewielu zdecydowało się wziąć udział w badaniach. Z tej grupy tylko 11 osób często korzystało z komputera. U tych uczniów zauważyłam pozytywny wpływ matematycznych programów komputerowych na rozwój ich aktywności i umiejętności matematycznych.

Jednakże niewielu uczniów stosuje komputer poza lekcją w procesie uczenia się matematyki. Świadczą o tym prowadzone przeze mnie obserwacje, rozmowy z uczniami, wyniki ankiety przeprowadzonej po wystawieniu ocen na końcu roku szkolnego wśród uczniów, którzy zgłosili uczestnictwo w badaniach, a także wyniki długoterminowej pracy domowej.

Opracowując tę pracę uczniowie posługiwali się komputerem najczęściej do wykonania sprawozdania w Wordzie, prezentacji w Power Point, lub wykonania strony internetowej na zadany temat. Niektórzy uczniowie posługiwali się programem Winplot, by wykonać „zdjęcia" odpowiednich wykresów. Pięciu uczniów w rozwiązaniu zadania 2 z części II sporządziło w Excelu wykres funkcji kwadratowej i prowadzili obserwacje zmieniając wartości współczynników a, b, c.

Tylko 8 osób wykorzystało programy jako pomoc w rozwiązaniu zadania. (Dane liczbowe z badań wstępnych i właściwych).

3 Wyniki ankiety i rozmów z uczniami na temat ich opinii o korzystaniu z TI w procesie nauczania i uczenia się matematyki

Poniżej przedstawiam pytania ankiety:

1. Wymień powody, dla których wyraziłeś(aś) chęć wzięcia udziału w badaniach
2. Który z programów, które otrzymałeś(aś) ode mnie zainstalowałeś(aś)?
3. Czy posiadasz inne matematyczne programy komputerowe? Jeśli tak wymień je.
4. a) Który z programów potrafisz obsługiwać?

   b) Którego i z jakich powodów nie potrafisz obsługiwać?
5. Jak często (do tej pory) korzystałeś(aś) z matematycznych programów komputerowych?
6. Jeśli korzystałeś(aś) to w jakich sytuacjach — wymień je?
7. Przedstaw w kilku zdaniach Twoją opinię na temat wykorzystywania komputerów (odpowiednich programów) w procesie nauczania i uczenia się matematyki.
8. Czy chciałbyś, aby lekcje prowadzone były z wykorzystaniem środków Technologii Informacyjnej? Swą odpowiedź uzasadnij.
9. Co mogłoby wpłynąć na to, że częściej uczyłbyś (uczyłabyś) się przy pomocy matematycznych programów komputerowych?
10. Czy gdyby takie badania były powtórzone w następnym roku to chciałbyś (chciałabyś) w nich uczestniczyć?

Z ankiety i rozmów z uczniami wynika, że zdecydowana większość uczniów zainstalowała dostarczone przeze mnie programy, ale korzystała z nich w niewielkim zakresie. Przyczyn takiego stanu jest rzeczy wiele, m.in.:

- brak doświadczenia w pracy z programami.
- niewielka motywacja do uczenia się i korzystania z programów komputerowych (była to bowiem praca nieobowiązkowa i nieoceniana).
- brak przekonania uczniów do włączenia komputera w proces nauczania i uczenia się, (skoro nie korzysta na lekcji nauczyciel i nie można korzystać z komputera na maturze, to jaki jest sens stosowania go samodzielnie)
- zbyt długie (10 lat) przywiązanie do tradycyjnego sposobu uczenia się. Uczniów przyzwyczajonych do poszukiwania rozwiązań „tradycyjnie" niełatwo jest przekonać, by szukali ich odmiennymi sposobami.

Na pytanie 9 ankiety: „Co mogłoby wpłynąć na to, że częściej uczyłbyś (uczyłabyś się) przy pomocy matematycznych programów komputerowych?" aż 96 % uczniów wyrażało opinię, że chcieliby, aby ich lekcje były prowadzone z wykorzystaniem komputera.

W grupie osób stosujących programy matematyczne uczniowie najczęściej wykorzystywali go w celach:

- poprawnego, szybkiego wykonania wykresów funkcji, co pozwoliło im skupić uwagę na rozwiązywanym zadaniu,
- sprawdzania swoich wyników (szczególnie uczniowie słabsi podkreślali ten sposób pracy z programami, mówili, że niejednokrotnie wykrył on błędy w ich rozwiązywaniu zadań domowych),
- porównania swoich wykresów z komputerowymi,
- wizualizacji sytuacji opisanej w zadaniu,
- „dla zabawy".

4 Przykłady wykorzystania przez uczniów programów komputerowych w procesie uczenia się matematyki

Poniżej przedstawię cztery przykłady wykorzystania przez uczniów matematycznych programów komputerowych w procesie uczenia się matematyki.

4.1 Emilka

Emilka, uczennica klasy II o profilu ogólnym jest, według nauczyciela, uczennicą słabą, nieśmiałą, pracuje powoli, najczęściej otrzymuje oceny dopuszczające i dostateczne. Jest zadowolona, gdy otrzyma trójkę lub wyżej. Mało aktywna na lekcji, nigdy nie zabiera głosu w dyskusji, ale kiedy ma większe problemy przychodzi do nauczyciela i potrafi dokładnie sprecyzować, z czym sobie nie radzi.

Przedstawię rozwiązanie jednego z zadań ze sprawdzianu z funkcji kwadratowej, którego treść jest następująca:

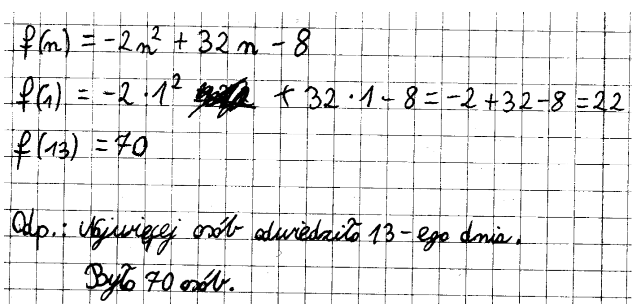
Liczbę osób, które odwiedziły kiermasz obuwia n-tego dnia od momentu jego otwarcia w przybliżeniu opisuje wzór $k(n) = -2n^2 + 32n - 8$, gdzie $n \in N$ i $1 \leqslant n \leqslant 13$.

a) W którym dniu kiermasz odwiedziło najwięcej osób i ile ich było?

b) Ile osób odwiedziło kiermasz podczas jego trwania?

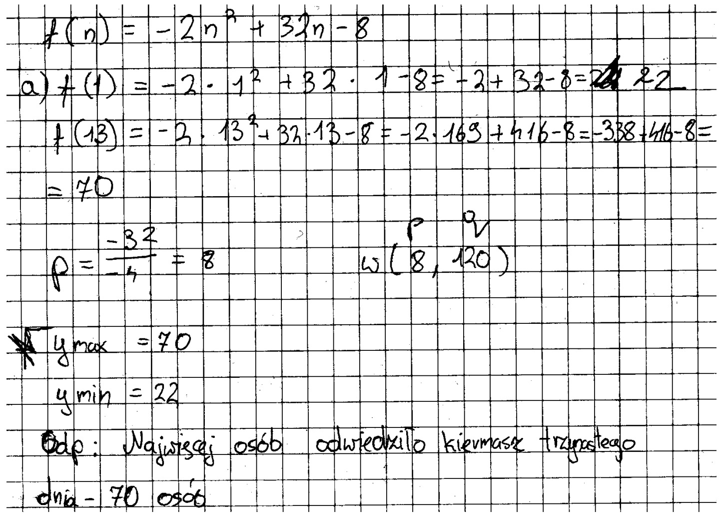
W rozwiązaniu tego zadania przeważająca część uczniów nie posługiwała się wykresem funkcji kwadratowej, postępowała wg schematów:

- wyznaczenie wartości funkcji na krańcach przedziałów $\longrightarrow$ wnioskowanie o wartości największej, najmniejszej (błędnie) (Rys. 1)



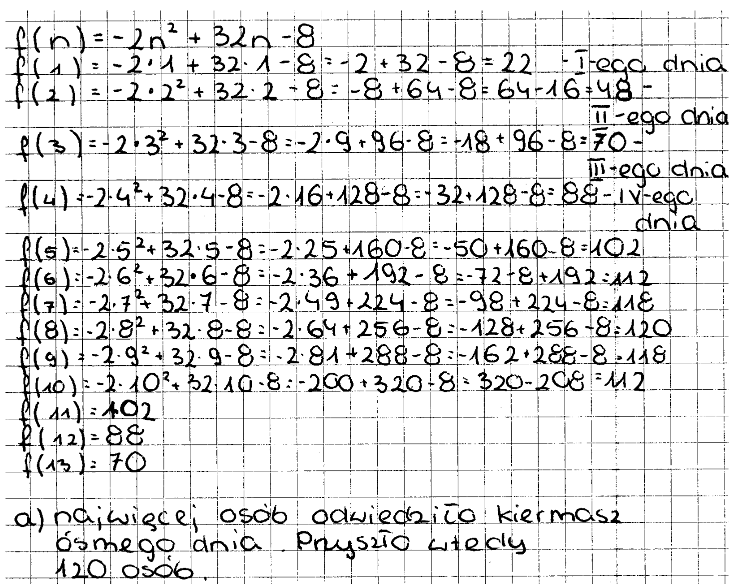
Rysunek 1.

- wyznaczenia wartości funkcji na krańcach przedziałów $\longrightarrow$ wyznaczenie współrzędnych wierzchołka paraboli $\longrightarrow$ wnioskowanie o wartości największej, najmniejszej (często błędnie) (Rys. 2)



Rysunek 2.

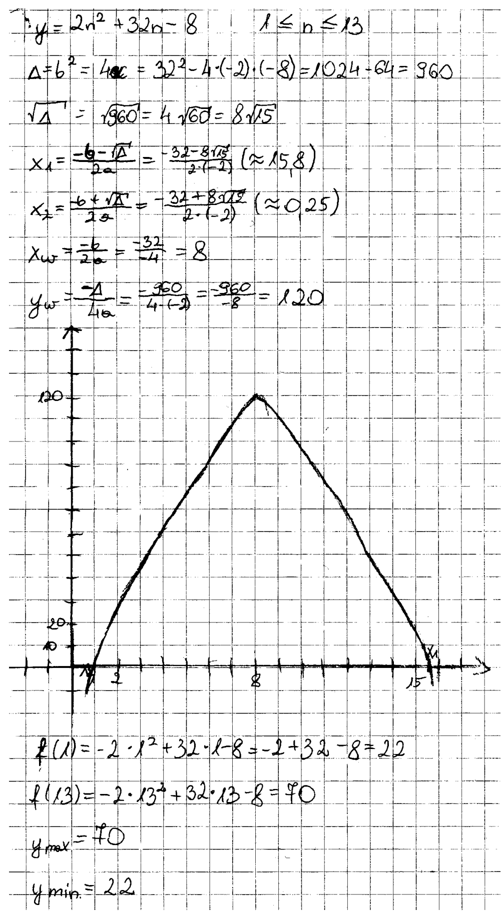
- obliczanie wartości funkcji dla kolejnych n należących do dziedziny funkcji $\longrightarrow$ wnioskowanie o wartości największej, najmniejszej (zwykle poprawnie, Rys. 3)



Rysunek 3.

Niektórzy rozwiązali to zadanie poprzez:

- sporządzenie wykresu danej w zadaniu funkcji kwadratowej (nie zawsze poprawnie) $\longrightarrow$ wyznaczenie współrzędnych wierzchołka paraboli $\longrightarrow$ wnioskowanie o wartości największej (nie zawsze poprawnie) (Rys. 4)



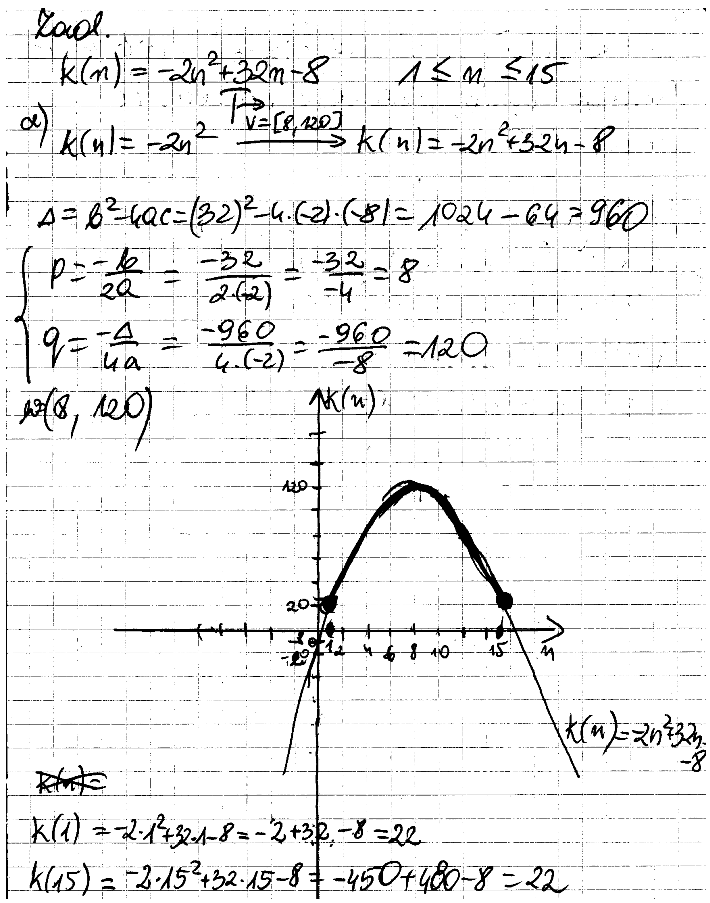
Rysunek 4.

Emilka jest reprezentantem kilkuosobowej grupy, która w rozwiązaniu zadania posługiwała się wykresem. Rysunki 5 oraz 6 prezentują to rozwiązanie. (Uczennica pomyliła się przepisując treść zadania i rozważała n z przedziału $\langle 1, 15\rangle$zamiast $\langle 1, 13\rangle$; nie zmienia to jednak poprawności przedstawionego rozwiązania).

Emilka poprawnie sporządziła wykres funkcji danej w zadaniu. W tym celu wyznaczyła najpierw współrzędne wierzchołka W paraboli: $p = 8, q =$

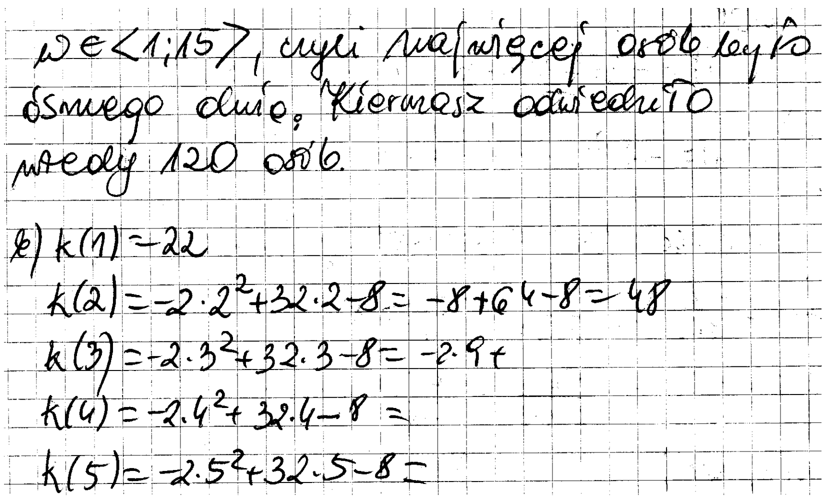
120. Następnie przekształciła wykres funkcji $y = -2n^2$ wykonując translację o wektor $\vec{v} = [8,\ 120]$. Potem prawidłowo odczytała i zinterpretowała dane przedstawione na wykresie. Zauważyła, że wierzchołek W paraboli należy do przedziału $\langle 1; 15\rangle$, a więc największą wartość funkcja osiąga dla $x = p = 8$.

Warto podkreślić, że tryb sporządzenia tego wykresu przez Emilię odbiega od sposobów wykonywania go przez innych uczniów, którzy na lekcji sporządzali ten wykres licząc miejsca zerowe, ewentualnie punkt przecięcia z osią OY. W jej pracy klasowej (Rys. 5) znajduje się tylko końcowy efekt sporządzania wykresu. Uczennica narysowała najpierw „na brudno” wykres funkcji, nie mogła jednak sobie poradzić, jak tłumaczyła, z dość dużymi jednostkami, dlatego też „na czysto” narysowała tylko ostateczny wykres funkcji danej w zadaniu.



Rysunek 5.

W punkcie b) zadania należało odpowiedzieć na pytanie, ile osób odwiedziło kiermasz w poszczególnych dniach. Emilka prawidłowo podstawiła kolejno $n = 1, 2, 3, 4, 5$ do wzoru funkcji $f(n)$. Nie zdążyła obliczyć końcowych wyników wartości tej funkcji, brakło jej też czasu na obliczenie wartości funkcji dla kolejnych argumentów $n = 6, 7, ..., 15$. Można jednak sądzić, że poradziłaby sobie z tym problemem w nieco dłuższym okresie czasu. Być może, gdyby mogła korzystać z kalkulatora, zdążyłaby rozwiązać całe zadanie w czasie przeznaczonym na klasówkę.



Rysunek 6.

Analizując rozwiązania zadań uczniów, jak i obserwując ich pracę na lekcji przy rozwiązywaniu tego typu zadań, zaobserwowałam, że uczniowie nie rozumieją zależności między przedziałem, wierzchołkiem paraboli i wartością największą (najmniejszą) funkcji kwadratowej w przedziale domkniętym. Uczniowie:

- nie wyznaczali współrzędnych wierzchołka, albo
- wyznaczali wartości funkcji na krańcach przedziałów i rzędną wierzchołka paraboli, a następnie wyciągali wniosek, że i tak wartość największa (najmniejsza) funkcji kwadratowej jest w krańcu przedziału, albo
- wyznaczali wartości funkcji na krańcach przedziału i rzędną wierzchołka paraboli i określali wartość największą (najmniejszą) danej funkcji jako wartość maksymalną (minimalną) spośród trzech wymienionych wyżej liczb (nie rozpatrując zależności między przedziałem a wierzchołkiem).

Świadczą o tym przykłady rozwiązań przedstawione na Rys. 1, Rys. 2.

Interesujące jest rozwiązanie ucznia, który wyliczał kolejno wartości $f(n)$ dla $n = 1, 2, ..., 13$. Na tej podstawie udzielił odpowiedzi na pytanie postawione w punkcie a) (Rys. 3).

Emilka uczyła się w domu wykorzystując program Winplot. Wykorzystywała głównie jego graficzne możliwości. Komputer poprawnie i w krótkim czasie sporządzał za nią wykresy różnych funkcji kwadratowych, a ona dzięki temu zyskiwała czas i mogła się skupić na problemach w rozwiązywanych zadaniach. Obserwowała wykresy funkcji, widziała rozważany przedział i odpowiadający mu fragment wykresu. Łatwo było jej zauważyć, gdzie znajduje się wierzchołek paraboli, czy leży on na rozpatrywanym fragmencie wykresu funkcji, czy też poza nim, jaka jest wartość największa (najmniejsza) danej funkcji. Sporządzając na klasówce wykres funkcji kwadratowej zachowała kształt paraboli, czego nie można powiedzieć o uczniu, którego rozwiązanie zadania znajduje się na Rys. 4. Można sądzić, że nie miał on wiele doświadczeń ani w sporządzaniu, ani w obserwacji wykresów funkcji kwadratowej. W przeciwnym razie nie narysowałby go z takim „szpicem", tak jakby był to wykres złożony z dwóch fragmentów wykresu funkcji liniowej.

Emilka uważa, że dzięki stosowaniu matematycznych programów komputerowych uzyskała z klasówki z działu funkcje kwadratowe ocenę dobrą, jakiej nie udało się jej uzyskać przez cały rok szkolny, co potwierdza poniższa wypowiedź (E – Emilka, B – Badacz):

E: Może dokładnie tego nie rozumiem wszystkiego, ale staram się

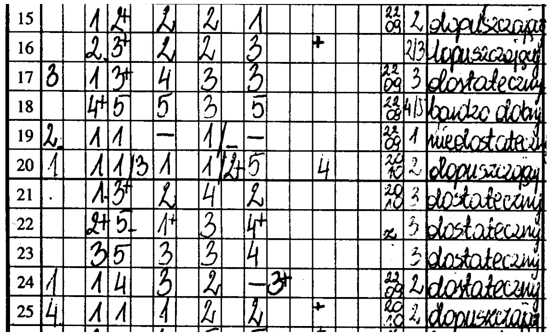
B: Ale czego nie rozumiesz, programów czy matematyki?

E: Matematyki w ogóle nie rozumiem, a programy? Jakby to powiedzieć... Lubię tam tak szperać. Może nie znam się tak dobrze, ale lubię poznawać.

B: Ale powiedz mi, uważasz, że komputer w pracy w domu może się przydać?

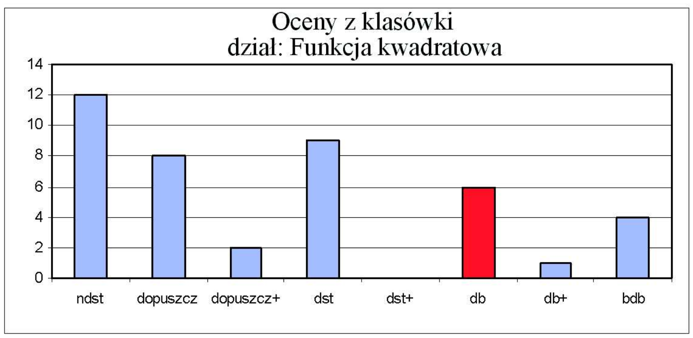
E: **Przydaje się**, np. w tamtym semestrze robiliśmy coś z funkcjami i dzięki temu dostałam 4, bo tak to ja z matematyki nie jestem dobra, ale wtedy dostałam 4 i byłam bardzo zadowolona.

Rysunek poniżej (Rys. 7) przedstawia fragment tabeli z dziennika lekcyjnego z ocenami z matematyki klasy II d. Osoba z numerem 21 to Emilka.



Rysunek 7.

Wyniki sprawdzianu, z którego Emilia uzyskała ocenę dobrą kształtowały się w jej klasie następująco (Wykres 1).



Wykres 1.

Analizując wykres można stwierdzić, że zadania z klasówki nie były dla uczniów łatwe, przeważały oceny niedostateczne (29%), 14% uczniów zostało ocenionych na ocenę dobrą, 12% — uzyskało oceny wyższe niż dobre.

Uczennica poprawnie rozwiązała powyższe zadanie, które większości klasy sprawiło problem.

4.2 Marcin

Marcin — uczeń klasy ogólnej, zdolny, często zabiera głos w dyskusji. Jednak mało pracuje w domu, gubi się na sprawdzianach, jest mało systematyczny i nie wytrwały w podejmowanych działaniach. Realizacją jego długoterminowej pracy, o której wspominałam, była prezentacja multimedialna na temat „Przekształcenia wykresów funkcji”.

Napisał:

„Powodem, dla którego postanowiłem zająć się tym tematem, jest moja ogólna wiedza na temat funkcji. Bardzo mało korzystałem z różnego rodzaju źródeł, jednak najbardziej pomocny okazał mi się program do robienia wykresów, bez którego byłoby mi bardzo trudno osiągnąć końcowy efekt.”

Zapytany o to, w jaki sposób pomógł mu program odpowiedział: „Korzystałem z programu Wykresy3. Chciałem mieć ładne rysunki do mojej prezentacji. Wpisywałem wzór jakiejś funkcji, a potem inne: $f(x)+a, f(x+a)$ itp. Zmieniałem a i obserwowałem wykresy. Teraz już wiem jak należy sporządzać wykres funkcji metodą przekształceń”. W I klasie ze sprawdzianu z przekształceń funkcji Marcin uzyskał ocenę dopuszczającą. Sprawdziłam, czy po wykonaniu długoterminowej pracy przy pomocy programów matematycznych uczeń potrafi przekształcać wykresy funkcji. Przeprowadziłam indywidualny sprawdzian, na którym Marcin poprawnie rozwiązał wszystkie zadania. (Rys. 8, Rys. 9)

Prawidłowo podał ciąg kolejnych przekształceń, jakie należy wykonać, by sporządzić wykresy funkcji: a) $f(x) = 3(x+2)^2$, b) $f(x) = -\sqrt{x+1}+2$, c) $g(x) = \frac{1}{x} - 4$. Na przykład w rozwiązaniu zadania z punktu b) wykonał następujące przekształcenia:

- przesunięcie wykresu funkcji $\sqrt{x}$ o wektor $\vec{v} = [-1, 0]$ — otrzymał wykres funkcji $f_1(x) = \sqrt{x+1}$
- symetria osiowa otrzymanego wykresu względem osi OX — skonstruował wykres funkcji $f_2(x) = -\sqrt{x+1}$
- translacja o wektor $\vec{u} = [0, 2]$ — narysował wykres funkcji $f(x) = -\sqrt{x+1}+2$

W zadaniu 2 dany był wykres funkcji $f(x)$. Należało wykonać wykres funkcji $y = -f(x+2)+1$. Marcin najpierw przekształcił dany wykres funkcji przez symetrię względem osi OX otrzymując wykres funkcji $-f(x)$, a następnie ten wykres przesunął o wektor $\overrightarrow{u} = [-2, 1]$.

Marcin wykonał poprawnie wszystkie polecenia. Można więc wnioskować, że przy pomocy matematycznego programu komputerowego opanował umiejętność poprawnego sporządzania wykresów funkcji z wykorzystaniem przekształceń geometrycznych.

Komputer pomógł Marcinowi w uczeniu się. Obserwując zmiany położeń wielu wykresów funkcji w stosunku do wykresu wyjściowego uczeń sam odkrył, „przeżył” i dzięki temu zapamiętał reguły rządzące przekształceniami wykresów funkcji.

1) Podaj kolejne przekształcenia jakie należy wykonać, aby sporządzić wykresy poniższych funkcji Sporządź wykres jednej z nich w zamieszczonym poniżej układzie współrzędnych

a) $f(x)=3(x+2)^2$

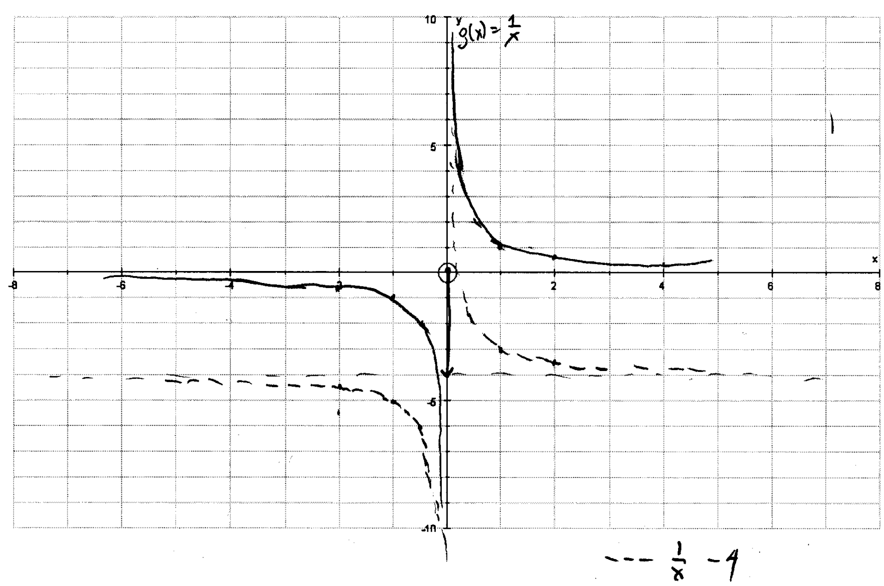
$~~f(x)=3(~~ \quad f(x) = 3x^2 \xrightarrow{\vec{v}=[-2,0]} 3(x+2)^2$

b) $f(x)=-\sqrt{x+1}+2$

$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\vec{v}=[-1,0]} \sqrt{x+1} \xrightarrow{S_{OX}} f(x) = -\sqrt{x+1} \xrightarrow{\vec{v}=[0,2]} -\sqrt{x+1}+2$

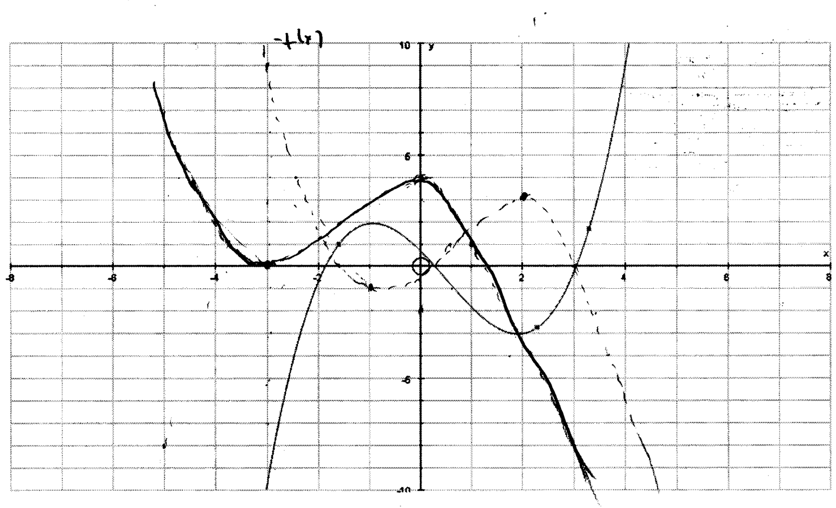
c) $g(x)=\frac{1}{x}-4$

$g(x) = \frac{1}{x} \xrightarrow{\vec{v}=[0,-4]} g(x) = \frac{1}{x}-4$



Rysunek 8.

2) Rysunek przedstawia wykres pewnej funkcji f. Naszkicuj wykres funkcji określonej wzorem $y = -f(x+2)+1$



Rysunek 9.

4.3 Kasia

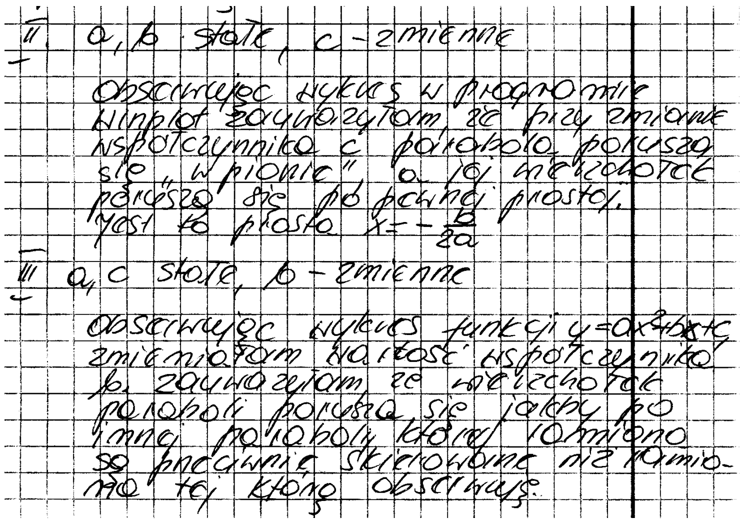
Kasia rozwiązała zadanie z części II długoterminowej pracy domowej:

Zbadaj jak zmienia się wykres funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ *w zależności od współczynników* a, b, c.

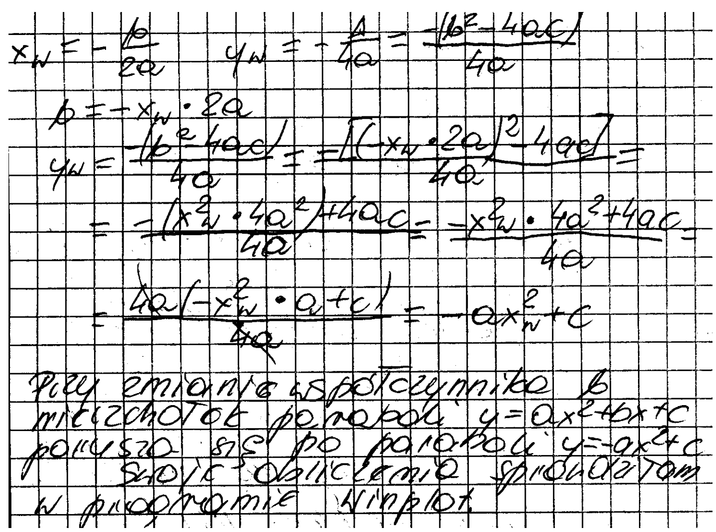
Opracowując zadanie uczennica posługiwała się programem Winplot. Rozważała przypadki położenia wykresu w zależności od współczynnika a i wyróżnika trójmianu kwadratowego, następnie kolejno przypadki, gdy współczynnik $a = 0, a > 0, a < 0$.

Następnie obserwowała zachowanie wykresu funkcji zmieniając tylko jeden ze współczynników (pozostałe dwa ustalone). Poniżej przedstawiam fragmenty jej pracy (Rys. 10, Rys. 11).

Opracowując zadanie uczennica posługiwała się programem Winplot. Wykorzystała głównie jego graficzne możliwości. Komputer poprawnie i w krótkim czasie sporządzał za nią wykresy funkcji kwadratowych, a ona dzięki temu zyskiwała czas i mogła się skupić na rozwiązywanym zadaniu. Dzięki dynamicznym, płynnym zmianom położenia wykresu funkcji $y = ax^2 + bx + c$ zaobserwowała kształt krzywej, po której porusza się wierzchołek paraboli,w zależności od współczynnika b. Wykonała obliczenia, a następnie przekonała się o ich prawidłowości sporządzając w programie Winplot wykres znalezionej funkcji $y = -ax^2 + c$. Zmieniała wartość współczynnika b i widziała, że wierzchołek paraboli $y = ax^2 + bx + c$ porusza się po $y = -ax^2 + c$.



Rysunek 10.



Rysunek 11.

Gdyby rozwiązywał to zadanie uczeń pracujący metodą „kartki i ołówka”, to musiałby poświęcić o wiele więcej czasu na sporządzenie wykresów funkcji przy różnych wartościach współczynnika b, ponadto wykresy te musiałby bardzo precyzyjnie wykonać. Komputer wyeliminował ten problem.

Realizacji omawianego zadania podjęły się 24 osoby. Poza Kasią tylko w jednym przypadku (u ucznia klasy o profilu matematyczno-informatycznym) pojawił się wniosek jak zachowuje się wierzchołek paraboli, gdy zmieniamy wartość współczynnika b. Pozostali uczniowie, w tym także ośmiu wspomnianych wyżej, którzy wykorzystywali program Excel, nie dostrzegli takich własności.

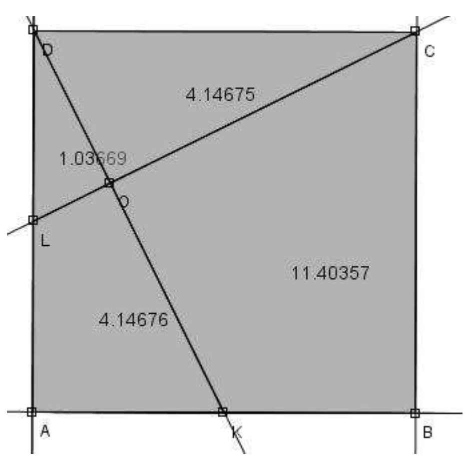
4.4 Gosia

Gosia, jako jedyna rozwiązywała poniższe zadanie z części II długoterminowej pracy domowej:

Kwadrat $ABCD$ podzielono na cztery części prostymi DK i CL, gdzie K i L są odpowiednio środkami boków AB i DA. Znaleźć zależność między polami tych części.

Na początku próbowała zadanie rozwiązać tradycyjnie, metodą kartki i ołówka. Nie udało się jej, nie poddała się jednak, postanowiła wykorzystać program C.a.R.

Sporządziła odpowiedni rysunek w programie C.a.R. (Rys. 12), a następnie zmieniała długości boku kwadratu i obserwowała zmiany wielkości pól badanych figur.



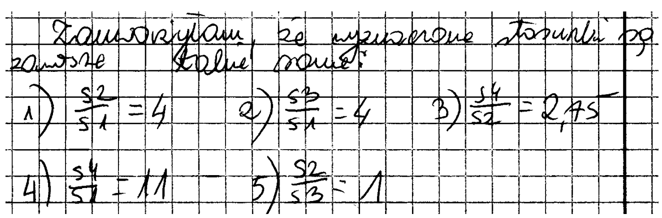
Rysunek 12.

Wyniki zapisywała w programie Excel, a następnie wyznaczyła stosunki wielkości poszczególnych pól (Tabela 4). Tabelka ta jest oryginalną, którą otrzymałam od uczennicy. Pragnę zwrócić uwagę na to, że dane na rysunku są liczbami z pięcioma miejscami po przecinku, a w tabeli znajdują się dane zaokrąglone do 4 miejsc. Zapytana o tą różnicę uczennica odpowiedziała, że nie zwróciła uwagi na ten fakt, wpisywała dane takie jak pokazywał jej program C.a.R., a zaokrąglenie musiało zostać spowodowane sformatowaniem liczb w komórkach Excela na pokazywanie ich z 4 miejscami o przecinku.

DOL(S1)	AKOL(S2)	BKOC(S4)	COD(S3)	S2/S1	S4/S1	S3/S1	S4/S2	S2/S3	S4/S3
1,0367	4,1468	11,4036	4,1468	4,0000	11,0000	4,0000	2,7500	1,0000	2,7500
1,2253	4,9013	13,4787	4,9013	4,0000	11,0000	4,0000	2,7500	1,0000	2,7500
1,6023	6,4091	17,6252	6,4091	4,0000	11,0000	4,0000	2,7500	1,0000	2,7500
1,4022	5,6089	15,4245	5,6089	4,0000	11,0000	4,0000	2,7500	1,0000	2,7500

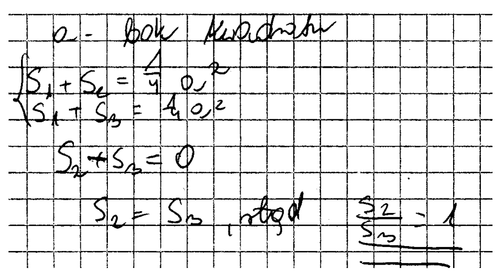
Tabela 4.

Przeprowadzone obserwacje pozwoliły jej na sformułowanie wniosków (Rys. 13).



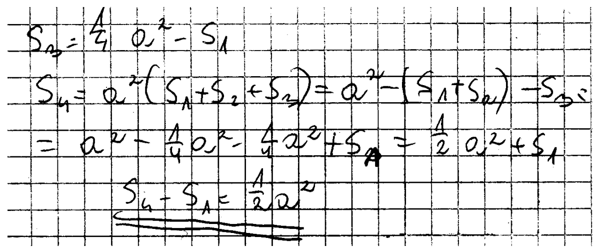
Rysunek 13.

Powyższe spostrzeżenia chciała udowodnić. Udało się jej wykazać prawdziwość wniosku 5) (Rys. 14).



Rysunek 14.

Nie znalazła matematycznego uzasadnienia innych zależności. Jednak odkryła inny związek: $S4 - S1 = \frac{1}{2}a^2$ (a – bok kwadratu) (Rys. 15)



Rysunek 15.

Chcąc utwierdzić się w słuszności przeprowadzonego rozumowania postanowiła sprawdzić go na danych zapisanych w Tabeli 4.

Wykonała przekształcenie

$$\begin{array}{c} S4 - S1 = \frac{1}{2}a^2 / \times 2 \\ (S4 - S1) \times 2 = a^2 \end{array} .$$

Do tabeli, w której zapisywała wyniki swoich doświadczeń dodała kolumny „suma pól”, „S4S1”, „S4-S1*2” (Tabela 5). W odpowiednie komórki wpisała formuły liczące:

- sumę pola figur DOL, AKOL, BKOC, COD
- różnicę pól figur S4 (BKOC) i S1(DOL)
- iloczyn (S4-S1) przez 2.

Suma pól	S4-S1	(S4-S1)*2
20,7338	10,3669	20,73376
24,5067	12,2533	24,50668
32,0457	16,0229	32,04572
28,0446	14,0223	28,04456

Tabela 5.

Porównała odpowiednie liczby i przekonała się o prawdziwości znalezionej zależności.

Pragnę zwrócić uwagę na nierówność liczb w dwóch kolumnach: „suma pól” i (S4-S1)*2 w poszczególnych wierszach. Liczby te różnią się od siebie (niewiele), a zgodnie z odkrytą własnością powinny być takie same. Gdy zwróciłam Asi uwagę na ten fakt, ona sama była zaskoczona. Wyjaśniła, że jest pewna, że przy wykonywaniu obliczeń w Excelu liczby te były takie same, ale skoro wynikły różnice w sprawozdaniu, to są one spowodowane zaokrąglaniem liczb lub dodawaniem miejsc po przecinku.

Komputer dostarczył Małgosi wielu przykładów, zilustrowanych odpowiednimi, dynamicznymi rysunkami, obliczeniami, które mogła zobaczyć na ekranie monitora. Analiza rysunków, a następnie wykonanie obliczeń w Excelu, pozwoliła jej na częściowe rozwiązanie zadania[2], którego uczennica bez użycia komputera nie rozwiązałaby w ogóle. Programy C.a.R. i Excel pomogły w sytuacji, w której uczennica nie potrafiła poradzić sobie z napotkanym problemem. Istotny, moim zdaniem, jest również fakt, że możliwość „zobaczenia" w Excelu udowodnionego przez siebie wniosku przekonała uczennicę o słuszności prowadzonych rozważań.

Wnioski

Opisane w niniejszym artykule sposoby rozwiązania wybranych zadań pozwalają na stwierdzenie, że samodzielne korzystanie z komputera przez uczniów poza lekcją matematyki pozytywnie wpłynęło na rozwój ich aktywności i umiejętności matematycznych, twórcze rozwiązywanie problemów. Jeden z nauczycieli stwierdził: „U uczennic, które wykorzystywały komputer w uczeniu się matematyki zaobserwowałem znaczny wzrost aktywności na lekcji, zwłaszcza w dziale dotyczącym funkcji kwadratowej i wielomianów. Dziewczyny przygotowały lekcję z wykorzystaniem komputera na temat „Wykresy wielomianów". Uczennica (Marta, o której nie wspominam w tym artykule), która NIGDY nie zgłaszała się na lekcji, teraz zaczęła w niej aktywnie uczestniczyć. U jednej z uczennic poprawiły się oceny z matematyki." Pozostali nauczyciele zaobserwowali przejściowy wzrost aktywności na zajęciach (również w działach dotyczących funkcji i wielomianów), a także większe zainteresowanie zagadnieniami z zakresu geometrii. Zgodnie twierdzą jednak, że najwięcej ciekawych zastosowań komputera w rozwiązywaniu zadań zaprezentowali uczniowie realizując długoterminową pracę domową.

Myślę, że istotne jest, iż komputer daje uczniom poczucie swobody i autonomii, niezależności od nauczyciela, możliwości dopasowania tempa i rytmu uczenia się do własnych potrzeb i możliwości.

Analiza zgromadzonego materiału związanego z wykorzystaniem przez badanych uczniów matematycznych programów komputerowych poza lekcją matematyki pozwala na wyciągnięcie następujących wniosków:

- Sporządzanie i obserwacja wykresów funkcji w matematycznych programach komputerowych pomogła w odkrywaniu własności funkcji i przekształcaniu wykresów.

[2]Wszystkie postawione przez uczennicę hipotezy zostały udowodnione na lekcji matematyki

- Komputer odegrał ważną rolę, bowiem nie tylko sporządzenie wykresu było celem uczniów, ale odczytywanie z niego informacji oraz ich interpretowanie.
- Komputer stworzył większą możliwość eksperymentowania. Wygenerował wiele przykładów, które pomogły lepiej zrozumieć rozwiązywany problem.
- Komputer był doskonałym narzędziem do wizualizacji problemów.
- Komputer pomógł uczniom w stawianiu hipotez.
- Komputer przekonywał o poprawności przeprowadzanych obliczeń.
- Komputer pomógł w prowadzeniu wnioskowania empirycznego. Wykonywał szereg prób matematycznych, dzięki czemu uczniowie mogli zaobserwować pewne prawidłowości i sformułować hipotezy matematyczne, które następnie starali się udowodnić.
- U 4 uczniów (spośród 11), którzy systematycznie wykorzystywali programy w procesie samodzielnego uczenia się, poprawiły się oceny z matematyki, w szczególności oceny końcoworoczne.

Należy jeszcze raz podkreślić, że badani uczniowie nie mieli żadnego kontaktu z komputerem w trakcie ich edukacji matematycznej. Na pytanie, „Co mogłoby wpłynąć, byś częściej uczył się (poza lekcją) przy pomocy matematycznych programów komputerowych?”, 86% uczniów odpowiedziało, że korzystanie z programów przy udziale nauczyciela na lekcji matematyki.

Wydaje się więc, że stosowanie tego środka na lekcji mogłoby spowodować częstsze wykorzystanie komputera w pozalekcyjnym procesie nauczania, uczenia się matematyki, a konsekwencją tego mógłby być, jak pokazują opisane przykłady, rozwój aktywności i umiejętności matematycznych uczniów.

Obecnie, w roku szkolnym 2006/2007 prowadzę kolejny — **II Etap** badań właściwych w klasach I i II liceum, w których nauczyciel wykorzystuje komputer i odpowiednie programy na lekcji matematyki. Wyniki tych badań zostaną opublikowane.

Literatura

A r t i g u e, M.: 1997, Le logiciel ‘Derive’ comme revelateur de phénomènes didactiques liés a l’utilisation d’environments informatiques pour l’apprentissage, *Educational studies in mathematics* **33**, 133-169.

A s s u d e, T.: 2005, Time management in the work economy of a class, a case study: integration of Cabri in primary school mathematics teaching, *Educational studies in mathematics* **59(1-3)**, 287-312.

B o g a j, A., Z e g a d ł o, E.: 1971, Informatyka w nauczaniu matematyki, *Matematyka* **6**, 354-360.

C a t e r, R. M., J o h n s t o n e, H. W.: 1975, A computer language for teaching introductory logic, *Educational Studies in Mathematics*, **6(1)**, 87-91.

G a l l o w a y, C h.: 1988, *Psychologia nauczania i uczenia się*, PWN, Warszawa.

G a n g u l i, A.: 1992, The effects on students' attidudes of the computer as a teaching aid, *Educational studies in mathematics* **23(6)**, 611-618.

G o l d b e r g, A., S u p p e s, P.: 1972, A computer-assisted instruction program for exercises on finding axioms, *Educational studies in mathematics* **4(4)**, 429-449.

G o l d b e r g, A., S u p p e s, P.: 1976, Computer-assisted instruction in elementary logic at the university level" *Educational Studies in Mathematics*, **6(4)**, 447-474.

G u z i c k i, W.: 1993, Komputery w matematyce i matematyce szkolnej, *Matematyka* **4**, 204-211.

H a j ł a s z, R.: 1989, Badanie zbieżności ciągu za pomocą komputera, *Matematyka* **3**, 144-146.

H a j ł a s z, R.: 1991, Wykorzystanie komputera do sporządzenia wykresów pewnych funkcji, *Matematyka* **4**, 212-216.

H i l l e l, J., K i e r a n, C., G u r t n e r, J. -L.:1989, Solving structured geometric tasks on the computer: the role of feedback in generating strategies, *Educational studies in mathematics* **20(1)**, 1-39.

K ą k o l, H.: 1987, Rozumowanie matematyczne a komputer, *Matematyka* **2**, 145-148.

K ą k o l, H.: 1990, Przykłady wykorzystania komputera w procesie kształtowania pojęć statystycznych i probabilistycznych, *Matematyka* **3**, 191-195.

K ą k o l, H., R a t u s i ń s k i, T.:2004, Rola komputera w procesie rozwiązywania matematycznych zadań, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **26**, 119-142.

K o r d o s, M.: 2006, Informatyka — czego i kogo uczyć, *Matematyka* **2**, 100-103.

K r y g o w s k a, Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. I*, WSiP Warszawa.

L a b o r d e, C.: 2000, Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving, *Educational studies in mathematics* **40**, 151-161.

L e ż a j s k i, J.: 2005, Platforma e-learningowa jako narzędzie wspomagające proces nauczania – uczenia się matematyki, *Matematyka i Komputery*

22, 9-12.

M a r i o t t i, M. A.: 2000, Introduction to Proof: the mediation of a dynamic software environment, *Educational studies in mathematics* **44(1-2)**, 25-53.

M o r e i r a, C., N o s s, R.: 1995, Understanding teacher's attitudes to change in logomathematics environments, *Educational studies in mathematics* **28(2)**, 155-176.

M o s t o w s k i, K.: 1988, Zabawa w 153, Przykład dowodu z mikrokomputerem, *Matematyka* 2, 96-98.

O l i v e r o F., S u t h e r l a n d, R. (red.): 2005, *Vision of Mathematics Education, Embedding Technology in Learning — Proceedings of the 7th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*, Graduate school of Educational, University of Bristol.

P a j ą k, W.: 2006, Cabri i przekształcenia, *Matematyka* **6**, 357-361.

P a r c i a, K.: 2004, Prowadzenie rozumowań matematycznych a komputer — analiza pracy uczniów nad rozwiązywaniem pewnego zadania (fragment badań wstępnych), *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **26**, 143-163.

P r z y b y ł o, S.: 1969, Programowanie obliczeń numerycznych jako pomoc dydaktyczna, *Matematyka* **4-6**, 192-198.

R a t u s i ń s k i, T.: 2003, *Rola komputera w procesie rozwiązywania zadań matematycznych*, Nieopublikowana rozprawa doktorska, Akademia Pedagogiczna, Kraków.

R u t h v e n, K., H e n e s s y, S.: 2002, A practitioner model of the use of computer-based tools and resources to support mathematics teaching and learning, *Educational studies in mathematics* **49(1)**, 47-88.

S m i t h, D.: 1970, A calculus-with-computer experiment, *Educational Studies in Mathematics*, **3(1)**, 1-11.

S u t h e r l a n d, S.: 1989, Providing a computer based framework for algebraic thinking, *Educational studies in mathematics* **20(3)**, 317-344.

T a l l, D., T h o m a s, M.: 1991, Encouraging versatile thinking in algebra using the computer, *Educational studies in mathematics* **22(1)**, 125-147.

T r i a n d a f i l l i d i s, T., H a t z i k i r i a k o u, K. (red.): 2003, *Technology in Mathematics Teaching, Proceedings of the 6th International Conference*, University of Thessal, Volos.

U l m a n, J.: 2006, Gdzie jest miejsce zerowe, *Matematyka* **4**, 228-232.

V a l e, C. M., L e d e r, G. C.: 2004, Students vievs of computer-based mathematics in the middle years: does gender make a difference?, *Educational studies in mathematics* **56(2-3)**, 287-312.

W a l k e r, R. J.: 1968, Student use of a computer, *Educational Studies in Mathematics*, **1(1-2)**, 111-117.
W e i n z w e i g, A. I.: 1987, Mikrokomputery w klasie, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **26**, 159-191.
Y o u n g G.: 1968, The computer and the calculus, *Educational Studies in Mathematics*, **1(1-2)**, 105-110.

Computer in after-school student activities — fragment of researches

S u m m a r y

In the article I submit partial results of three years lasting researches, which relate to the use of mathematical software in the process of mathematics teaching and learning, particularly in independent, after-school student activities.

The aim of my researches is to solve the following problem:

What is the role of computer in the independent work of the student?

The following issues are the most interesting for me:

1. Do students, during their independent after-school work, notice the necessity of using a computer software?
2. In what situations students use computer programs in their after-school activities?
3. Does applying a computer software influence learning results, development of activeness, and mastering mathematical skills?
4. Does applying a computer software change the students' attitude toward solving mathematical problems?

My researches were carried out in grade 2 of senior secondary schools among volunteering students. They received computer software ("Compass" and "Ruler and Winplot") with instructions. During the first two years of the study (I present partial results of these stages in the article) the observed students did not use computer during classes; they did not have any experience in working with mathematical computer programs. My observations made during these studies let me conclude that the application of computer in independent after-school work of the students favorably influenced the process of mathematics learning, development of mathematical activeness and creative attitude to problems. It was also noticed that majority of the students were not interested in using the computer in their independent work, despite the fact, that

all of them would like it to be applied as didactic means in the lessons. In my opinion the reasons of this outcome are as follows:

- No experience in work with the programs,
- Insufficient reason for learning and using computer programs (this work was voluntary and not assessed),
- Attachment to the traditional learning methods,
- No possibilities to utilize experiences from work with computer on the exams.

Those students who were learning with the support of mathematical computer programs most often applied it to the following:

- Searching for an idea to solve the problem,
- Visualization of the situation described in the problem,
- Quickly making correct function graphs,
- Reading properties of a function,
- Comparing their own graphs to the computer ones,
- Discovering properties,
- Visualization of theorems.

In the article I submit four examples of mathematical computer programs utilization in after-school student work relating to: quadratic function, transformation of function graphs, areas of plane figures.

By analyzing results of the researches carried out I deduct, that utilization of the computer in independent after-school work of students can contribute to:

- Formation of active and creative attitude of the students to problems,
- Formation of the research attitude,
- Stimulating own initiative,
- Building students' confidence of their mathematical possibilities,
- Critical estimation of data and results (thanks to the possibility of observing many examples and counterexamples),
- Development of visualization, modeling, reasoning and interpretation skills.