

Zbigniew Semadeni
Uniwersytet Warszawski

Zjawisko zastępowania obiektów matematycznych przez inne obiekty o tej samej nazwie

1. Wstęp. Celem tej pracy¹ jest systematyczna analiza ważnego i stosunkowo częstego zjawiska (w nauczaniu uniwersyteckim, a pośrednio także i w szkolnym) polegającego na tym, że *zastępuje się jakieś podstawowe pojęcie przez nowe pojęcie o tej samej nazwie, utożsamiane z poprzednim, choć jest to już inny obiekt matematyczny*, inny w tym sensie, że jest określony przez nierównoważną definicję. Czasem towarzyszy temu jawne zadeklarowanie tej zmiany, a czasem przeciwnie, nie ma żadnej wzmianki ani wyjaśnienia.

Tak więc np. *punkt* może zostać zastąpiony *ciągami liczb*; w innej sytuacji punkt staje się *wektorem* (lub, odwrotnie, wektor staje się punktem); sinus *kąta* staje się sinusem jego *miary* (by z kolei zostać zastąpionym przez sinus *liczby rzeczywistej*). Bywa to związane z przechodzeniem do ujęcia bardziej zaawansowanego, w szczególności od szkolnego do uniwersyteckiego, ale może to być też jedynie wyrazem różnic między koncepcjami autorów poszczególnych podręczników. Wprawne oko osoby, która się z tym już wielokrotnie spotykała, szybko wyłowi te różnice między definicjami, z góry wiedząc, gdzie można się ich spodziewać, ale student (lub uczeń) nic nie zauważa lub stwierdza zmianę, której sensu nie rozumie.

Należy podkreślić, że nie chodzi tu bynajmniej o przeoczenia czy usterki, lecz o zmiany dokonywane przez wybitnych autorów, których zamierzeniem było bardziej nowoczesne ujęcie materiału, trafniejsza, dojrzała jego prezentacja lub ulepszenie dydaktyczne, a efektem jest *zamiana jednego obiektu matematycznego na inny o tej samej nazwie*, który ma go teraz zastąpić.

¹Praca naukowa wykonana w ramach projektu badawczego finansowanego ze środków Komitetu Badań Naukowych w latach 2003–2006.

Tego typu zastąpień nie należy traktować jako anomalii. Są ważną cechą matematyki, choć nie odpowiada to stereotypowi matematycznej ścisłości. Podejmowano wprawdzie próby takiej modyfikacji określeń, aby odpowiedniość

$$(1) \quad \langle \text{pojęcie matematyczne} \rangle \longleftrightarrow \langle \text{nazwa} \rangle$$

była zawsze wzajemnie jednoznaczna, ale *pełnej zgodności nie ma i nie należy jej oczekiwać*. Propozycje bardziej precyzyjnej terminologii nieraz okazywały się w efekcie sztuczne, niezręczne i utrudniały posługiwanie się tymi pojęciami, zamiast je ułatwiać. Co więcej, w wielu przypadkach możliwość elastycznej zmiany zakresu nazwy lub symbolu dobrze funkcjonuje w praktyce (aby jednak móc czynić z tego użytek, trzeba właściwie rozumieć związane z tym pojęcia).

Praca dotyczy pewnych trudności mających swe źródło w niejednoznacznościach (1) specyficznych typów, które opiszemy poniżej. Tematyka ta znajduje się na styku kilku dziedzin: matematyki, filozofii, lingwistyki i dydaktyki matematyki.

Obiekty matematyczne, którymi będziemy się zajmować w tej pracy, są bądź (a) zdefiniowane w terminach teorii mnogości, bądź (b) są pojęciami takimi jak: punkt i prosta (przykład 1), kąt (przykład 2), liczba naturalna, suma i iloczyn liczb naturalnych (przykłady 4a, 4b, 5), liczba rzeczywista (przykład 6), zbiór, para uporządkowana (przykłady 1, 10, 11), przyporządkowanie, odpowiedniość, relacja (przykłady 1, 8b, 9, 11). Nie wnikając w formalny status obiektów typu (b), ograniczamy się do stwierdzenia, że są one powszechnie przyjętym przedmiotem rozważań matematyki².

Ponadto w rozwoju historycznym obiekty te osiągnęły poziom *epistemicznych idei głębokich* (Semadeni, 2002a, s. 80). W przypadkach wymienionych w (b) idea głęboka epistemiczna jest zgodna z tym, co zwyczajowo w tym kontekście matematycy nazywają *intuicją*: intuicją liczby naturalnej, intuicją punktu, intuicją pary uporządkowanej itd. Słowo „intuicja” używane w tej pracy należy rozumieć w tym właśnie sensie (por. Semadeni, 2002a, s. 71–77).

Przyjmujemy, że jeżeli obiekty X_1 i X_2 są zbiorami, to zwrot typu „różne obiekty” lub „ X_2 jest innym obiektem niż X_1 ” znaczy, że zbiory X_1, X_2 są różne w zwykłym sensie (tzn. $X_1 \subset X_2$ i $X_2 \subset X_1$). W pozostałych przypadkach równość/różność rozumiemy zgodnie z kryterium *Leibniza*: dwa obiekty nazywamy równymi, jeśli każda własność, przysługująca jednemu z nich, przysługuje też drugiemu i na odwrót (Mostowski, 1948, s. 110; por. Quine, 1999, s. 138).

W 2.1–2.7 wprowadzimy kluczowe pojęcia pracy, mianowicie wyjaśnimy, co rozumiemy przez *zastąpienie ontyczne* typu (α), typu (β) i typu (γ), obja-

² Należy podkreślić, że nie traktujemy tu obiektu matematycznego jako tworu psychicznego, obrazu pojęcia czy reprezentacji pojęcia w umyśle jakiejś indywidualnej osoby.

śniając je na przykładach rozmaitych obiektów matematycznych. W 3.1–3.5 i w 4.1–4.3 analizujemy rozmaite przykłady takich zastąpień.

W 5.1–5.6 pokażemy związki zastąpienia ontycznego z lingwistycznym pojęciem *metonimii* i naszkicujemy kryteria służące odróżnianiu tych zjawisk. Podejmiemy tam też próbę ukazania, gdzie w praktyce w takich sytuacjach przebiega granica między:

- (i) zmianą polegającą jedynie na używaniu innego *wyrażenia językowego*,
- (ii) zmianą obiektu matematycznego na inny.

Dotyczy to więc szeroko diskutowanego związku między pojęciami matematycznymi a używanymi formami językowymi.

Omówimy też krótko związki zastąpień ontycznych z pewnymi kwestiami na styku filozofii i dydaktyki matematyki, a mianowicie z tendencjami *redukcyjnymi* w nauczaniu (6.1–6.2), z *platonizmem* w matematyce (7.1–7.2), a wcześniej nawiążemy też do postulatu *naiwnego platonizmu* dydaktycznego (3.2–3.5).

Zwrócimy ponadto uwagę, że pewne zastąpienia ontyczne wiążą się z istotną zmianą samego pojęcia, podczas gdy inne polegają jedynie na zmianie *modułu formalnego* tego pojęcia (w sensie omawianym w Semadeni, 2002a).

2. Pojęcie zastąpienia ontycznego. Aby pojęcie to przybliżyć czytelnikowi, wprowadzimy je teraz etapami — stopniowo i spiralnie.

2.1. Jako przygotowanie ogólnych określeń, które sformułujemy i rozwinie w 2.3–2.7, rozpatrzmy najpierw następujący przykład.

PRZYKŁAD 1. Każdy punkt P na **płaszczyźnie kartezjańskiej** jest jednoznacznie wyznaczony przez parę swoich współrzędnych (x, y) . Takie stwierdzenie ujmuje P i (x, y) jako dwa różne obiekty: punkt P (twór geometryczny, pojęcie pierwotne, niedefiniowane) i twór arytmetyczno-algebraiczny (x, y) . Dla celów naszych rozważań bardzo ważne jest wyraźne podkreślenie zasadniczej różnicy między dwoma następującymi ujęciami tej metody.

- (*) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ujęcie klasyczne (od którego z reguły rozpoczyna się nauczanie, a czę-} \\ \text{sto też się do niego ogranicza): obiekty geometryczne (punkty, proste} \\ \text{itp.) traktuje się jako o d m i e n n e od obiektów algebraicznych (któ-} \\ \text{rymi są pary liczb, równania itp.); mówi się jedynie o istnieniu bardzo} \\ \text{ważnej o d p o w i e d n i o ś c i wzajemnie jednoznacznej między jednym} \\ \text{a drugim.} \end{array} \right.$
- (**) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Deklaruje się wyraźnie, jednoznacznie, że punkt } P \text{ jest parą } (x, y), \\ \text{i zapisuje się to w postaci równości } P = (x, y). \end{array} \right.$

Metoda geometrii analitycznej, którą wyraża (*), polega na tym, że pojęcia geometryczne (punkt, prosta, przynależenie punktu do prostej itd.) są przetłumaczone na język algebry i w rozważaniach można wykorzystywać zarówno argumenty czysto geometryczne, jak i rachunek algebraiczny. Natomiast w (**) punkt staje się parą liczb. Nazwa „punkt” jest nadal używana, ale oznacza już inny obiekt niż w (*). Chodzi tu nie tylko o to, że zbiór par (x, y) reprezentuje nie płaszczyznę euklidesową, lecz *płaszczyznę z wyróżnionym układem współrzędnych*. Istotne teraz dla nas jest to, że podstawowe intuicje związane z euklidesowym pojęciem „punkt” są zasadniczo odmienne od algebraicznego znaczenia pojęcia „para liczb” (na przykład punkt to obiekt geometryczny mający szerokość 0, natomiast algebraiczna para liczb (x, y) nie ma szerokości).

Mamy tu przykład zmiany pojęcia na inne przy zachowaniu dotychczasowej nazwy. Takie zjawisko będziemy nazywać *zastąpieniem ontycznym*; używać będziemy symbolicznego zapisu $P \rightsquigarrow (x, y)$.

Opisana tu zmiana pojęcia ma poważne konsekwencje dydaktyczne. W szkole średniej dominuje (*), natomiast w szkole wyższej na ogół mamy do czynienia z częstym przechodzeniem od (*) do (**), a pojęcia: punktu, prostej i inne stają się stopniowo swoistą syntezą obu ujęć: geometrycznego i algebraicznego. Przy właściwym nauczaniu student powoli wchodzi w ten dwoisty świat pojęć, który staje się dlań zrozumiały i swojski; oba ujęcia pojęcia punktu dojrzejają w jego umyśle jako pojedyncza idea głęboka. Proces ten bywa tak naturalny, że student może nie być nawet świadomy dokonującej się zmiany w jego myśleniu. Wrócimy do tej kwestii przykładzie 12 w 5.5.

Dodajmy, że bywa też niestety również tak, że w umyśle wykładowcy algebry liniowej omawiane pojęcia mają dwoisty charakter geometryczno-algebraiczny, ale u części studentów aspekt geometryczny bywa niezauważony lub zapomniany, pozostają tylko fragmenty algebry³, a oczekiwane zastąpienie ontyczne nie ukształtuje się w umyśle studenta.

2.2. Gdy będziemy opisywać w 2.4 jeden z wyróżnionych typów zastąpiień ontycznych, użyjemy pojęcia *konglomeratu*. Termin ten dotyczy niejednoznaczności (1) pewnego specjalnego typu (Semadeni, 2002a, s. 70). Dobrym przykładem konglomeratu jest *kąt*. Ta wspólna nazwa obejmuje wiele rodzajów kątów. Rozróżniamy *kąty postaciowe*, tzn. kąty zdefiniowane jako pewne figury geometryczne, oraz *kąty miarowe*, które liczbowo (w stopniach lub radianach) określają *miary rozwarcia* (określone w różnorodnych sytuacjach geometrycznych). Miara kąta postaciowego jest oczywiście kątem miarowym, ale rozważa się również takie kąty miarowe, którym nie odpowiadają żadne wyraźnie określone kąty postaciowe (np. kąt między dwoma wektorami swo-

³ Sugestywnie obrazują to wyniki badań (Bugajska-Jaszczołt i Drygała, 2006).

bodnymi lub kąt między wektorami w przestrzeni liniowej z aksjomatycznie określonym iloczynem skalarnym). Ponadto każdy z tych rodzajów kątów może być zdefiniowany w przeróżnych sytuacjach geometrycznych, płaskich i przestrzennych, w tym np. kąt dwuścienny, kąt między krzywą a powierzchnią lub kąty w przestrzeniach o większej liczbie wymiarów. Rozróżniamy wreszcie *kąty skierowane* i *kąty nieskierowane*. Kombinując te rodzaje, otrzymujemy kilkanaście czy nawet kilkadziesiąt różnych pojęć kąta, jednakże wszystkie je wyraźnie łączy jedna wspólna idea.

Ogólnie mówimy o konglomeracie wówczas, gdy rozpatrujemy pojęcie złożone, które cechuje: bliskość sensu pojęć składowych, używanie tej samej (lub niewiele różniącej się) nazwy oraz brak jednej definicji, która obejmowałaby wszystkie pojęcia składowe⁴.

PRZYKŁAD 2. Kilkadziesiąt lat temu powszechne było (w szkole średniej i w nauczaniu uniwersyteckim) zastąpienie ontyczne

$$\langle \text{kąt } \varphi \rangle \rightsquigarrow \langle \text{miara kąta } \varphi \rangle.$$

Zarówno kąt jak i jego miara oznaczane były tym samym symbolem φ . Od czasu reformy programu liceum w 1967 r. w polskiej szkole średniej starannie rozróżnia się kąt i jego miarę. Podkreśla się, że są to różne obiekty. Jednakże w praktyce bywają nieraz używane zamiennie przez matematyków. Przykładem tego jest wyraźne zastąpienie ontyczne w zaawansowanym podręczniku akademickim:

Oznaczając przez α kąt między dodatnim kierunkiem osi x a wektorem $\overrightarrow{OP}$, mamy w mierze łukowej $\alpha = |\widehat{P_0P}|/r$, więc $\omega = \alpha/t$, a stąd $\alpha = \omega t$.

(H. i J. Musielakowie, 1993, tom I, część 2, s. 18).

Najpierw α oznacza tu kąt, a potem — w tym samym zdaniu — symbol α oznacza miarę tego kąta. Kąt jest więc bądź zdefiniowany jako liczba, bądź utożsamiony z liczbą. Nieraz też określenia np. „kąt prosty”, „kąt $\frac{\pi}{2}$ ” oraz „ $\frac{\pi}{2}$ ” są używane zamiennie, traktowane jak synonimy.

Rozpatrzmy dla przykładu funkcję sinus (por. notkę 23). Przejście

(2) $\langle \text{funkcja sinus na zbiorze kątów} \rangle \rightsquigarrow \langle \text{funkcja sinus na zbiorze miar kątów} \rangle$

jest zastąpieniem ontycznym. W Encyklopedii Szkolnej (Bryński et al., 1997) znajdują się nawet dwa osobne hasła: „funkcje trygonometryczne kąta skierowanego” i „funkcje trygonometryczne liczby rzeczywistej”, co nie wyczerpuje

⁴ Przykładami konglomeratów są też *wielościann* oraz *szyk szeregowo-kolumnowy* (Semađeni, 2002a, s. 78). Innego typu niejednoznacznością (1) jest *agregat* (Semađeni, 2002a, s. 68) — ogólne pojęcie określone wspólną definicją, obejmującą pojęcia wywodzące się z bardzo różnych intuicji (a nawet z różnych światów w sensie Talla, 2004); typowym przykładem agregatu jest ogólne pojęcie funkcji ze zbioru w zbiór.

wszystkich takich pojęć, jak choćby „funkcje trygonometryczne kąta nieskierowanego”; ponadto można by jeszcze uwzględnić inne typy kątów.

Nie ma wprawdzie potrzeby nadmiernego rozmnażania pojęć i nazw, ale warto być świadomym tego, że jest tu wiele możliwych zastąpień ontycznych, mniej lub bardziej subtelnych. Niektóre z nich prowadzą do trudności poznawczych i te warto analizować. (Do funkcji sinus, jako wygodnego reprezentanta szerszej klasy funkcji, wrócimy jeszcze parokrotnie.)

2.3. Przez *zastąpienie ontyczne*⁵ lub krótko *zastąpienie* rozumiemy zmianę obiektu matematycznego o nazwie X na jakiś inny obiekt, który również nazywany jest X (a więc jest to zmiana bytu przy zachowaniu nazwy). Nowy obiekt ma przy tym pełnić rolę poprzedniego. Eliminuje to m.in. typowe uogólnienia (por. 2.6).

Użycie słowa „ontyczny” ma podkreślić kluczową cechę takiego zastąpienia, a mianowicie to, że *istotna jest tu zmiana obiektu, a nie zmiana opisujących go wyrażen językowych*.

⁵ W pierwotnej wersji tej pracy użyłem tu słowa „ontologiczne”. Ontologia to dziedzina filozofii — teoria *bytu* (greckie słowo *on*, w dopełniaczu *ontos*, znaczy: byt). Byty rozważane w tej pracy to obiekty matematyczne. Są to *byty idealne* czy też *rozumowe* (*entia rationis*), ograniczone tu do pojęć oraz ich reprezentacji i ich modeli.

Po namyśle uznałem jednak, że trafniejsza od przymiotnika „ontologiczny” jest tu jego modyfikacja „ontyczny”, coraz częściej pojawiająca się w publikacjach filozofów. Zgodnie z określeniami słownikowymi, *ontyczny* — to odnoszący się do bytu (Aduszkiewicz, 2004), bądź związany z bytem (Hartman, 2004). W tym drugim słowniku znajduje się uwaga: *Jako że teorią bytu jest ontologia, to „ontologiczny” znaczy: odnoszący się do ontologii; często jednak „ontologiczny” używany jest w znaczeniu „ontyczny”, choć nie odwrotnie*.

Opozycja „ontologiczny–ontyczny” jest podobna do opozycji „epistemologiczny–epistemiczny” oraz „psychologiczny–psychiczny”, co wskazuje, że słowo „ontyczny” odnosi się do pojedynczych bytów, a słowo „ontologiczny” — do całej dziedziny filozofii. Termin „ontyczny” ma podkreślać, że chodzi o pojedyncze zastąpienia.

W grę wchodzi też termin „przesunięcie ontyczne”, utworzony analogicznie do zwrotów „przesunięcie znaczenia”, „przesunięcie referencji”, użytych w (Polański, 1993, s. 331); byłby jednak trudny do zaakceptowania w przypadku stosowania go w odniesieniu do matematycznego pojęcia przesunięcia (przykład 8b). W angielskim streszczeniu używam terminu *ontic shift*; słowo „shift” można tłumaczyć zarówno jako „zmiana”, jak i „przesunięcie”, np. *a shift in meaning* to zmiana znaczenia, a w analizie funkcjonalnej *shift operator* to operator taki jak np. przyporządkowanie ciągowi $(a_1, a_2, \dots)$ ciągu przesuniętego $(0, a_1, a_2, \dots)$. Termin *reference shift* używany jest w wielu znaczeniach. W lingwistyce oznacza przesunięcie odniesienia referencyjnego (por. notkę 22). Wprawdzie zastąpienie $X' \rightsquigarrow X''$ jest zmianą referencji, jednak przyjęcie terminu „zmiana referencji” i związanego z nim lingwistycznego punktu widzenia nie byłoby zgodne z podstawową tezą tej pracy, że istotą zastąpienia ontycznego jest *zmiana obiektu matematycznego*, a nie zjawisko językowe. Dodajmy, że Pautz (2007) przez *reference shift* rozumie zmianę odniesienia zdania z przedmiotów na pojęcia, a więc zupełnie inne zjawisko. W technice *reference shift* to przesunięcie punktu referencyjnego (np. punktu zerowego urządzenia).

Rozróżniamy następujące trzy typy zastąpień ontycznych.

(α) Obiekt X' o nazwie X zostaje zastąpiony przez różny od niego obiekt X'' o tej samej nazwie X ; wiąże się z tym domniemanie, że to nowe X'' będzie lepsze (w jakimś istotnym sensie) od poprzedniego X' .

(β) Obiekt X' o nazwie X zostaje zastąpiony przez *konglomerat* $X' \sqcup X''$, będący parą dwóch różnych, alternatywnie używanych obiektów X' i X'' , nazywanych również X .

(γ) Obiekt X' o nazwie X zostaje zastąpiony przez *syntezę* $X' \& X''$ obiektu X' i utożsamionego z nim obiektu X'' , którą też nazywamy X , choć $X' \& X''$ różni się istotnie od każdego z obiektów wyjściowych X' , X'' i od $X' \sqcup X''$.

Warunki te będziemy uszczegółowiać i objaśniać na przykładach w 2.4–2.7.

2.4. *Zachowanie nazwy jest istotnym warunkiem uznania jakiejś zmiany za zastąpienie ontyczne*; bez tego mamy po prostu zwykłą zmianę jednego obiektu na inny. Jednakże rozróżnić należy zastąpienia jawne i ukryte.

Zastąpienie ontyczne nazywamy *jawnym*, gdy fakt zmiany obiektu na inny jest oczywisty, rzuca się w oczy, w szczególności, gdy *explicite* zadeklarowana jest zmiana definicji na nierównoważną.

W przeciwnym przypadku zastąpienie jest *ukryte* czyli *niejawne*. Może ono wynikać ze zmiany sposobu ujmowania danego obiektu, którą wykrywa się, dokładnie analizując sens tekstów i wypowiedzi oraz stosowane przy tym wyrażenia językowe. Osoby posługujące się zmodyfikowanym obiektem mogą być nieświadome tego faktu.

Zdarzają się też zastąpienia *częściowo jawne*. Są one jawne lub ukryte, zależnie od sytuacji. Większość zastąpień ontycznych (ukrytych lub jawnych) pozostaje niezauważona lub jest na tyle nieistotna, że nie warto się nimi zajmować. Istotne są tylko te, które mogą prowadzić do dysonansów poznawczych.

2.5. Nawiązując do przykładu 1, zauważmy, że jeżeli punkt P i parę (x, y) traktujemy tak, jak w (*), tzn. jako różne obiekty, to żadnego zastąpienia ontycznego nie ma.

W przypadku jawnym zastąpienie $P \rightsquigarrow (x, y)$ jest typu (α), gdy ograniczamy się wyłącznie do par liczb, formalnie uznając parę (x, y) za punkt i odrzucając lub pomijając jej euklidesowy pierwowzór P .

Drugą możliwością jest sytuacja typu (β), w której używa się obu obiektów, tworząc konglomerat $X' \sqcup X''$ będący bądź alternatywą logiczną $\vee$ obiektów składowych X' i X'' , bądź ich sumą $\cup$, bądź też jakimś wariantem $\vee$ i $\cup$, zależnie od okoliczności i języka użytego do opisanie danej sytuacji. Prowadzi to do zastąpienia $X' \rightsquigarrow X' \sqcup X''$ typu (β). Przykładem tego jest modyfikacja zastąpienia (2) prowadząca od funkcji sinus na zbiorze kątów (obiekt X') do funkcji sinus interpretowanej rozmaicie: raz na zbiorze kątów, innym razem na

zbiorze liczb (obiekt X''), elastycznie, zależnie od potrzeby⁶. Obiekty X' i X'' są ujmowane łącznie jako „funkcja sinus”, ale każdy z osobna nie ulega przy tym zmianie i w razie potrzeby są wyraźnie rozróżniane.

Trzecią możliwością jest sytuacja typu (γ) , w której utożsamiamy X' z X'' . Powstaje wówczas nowy, bardziej złożony obiekt $X' \& X''$ będący syntezą obiektów X' i X'' . Przykładem jest pojęcie: „punkt & para”, łączące w sobie geometryczne intuicje punktu z formalizmem par, przy zachowaniu nazwy „punkt”. Nie jest to po prostu para alternatywnie używanych pierwotnych obiektów jak w (β) , bowiem sens pojęć wyjściowych X' i X'' wzbogaca się istotnie pod wpływem tej syntezy. Punkt zyskuje interpretację arytmetyczną, para liczb zyskuje interpretację geometryczną; łączy je teraz bogatsza sieć więzów w innych pojęciach. Oczywiście granica między (β) i (γ) jest bardzo delikatna i trudna do doprecyzowania.

Z kolei tendencja redukcjonistyczna może prowadzić do zastąpienia odwrotnego: od obiektu $X' \& X''$ do jednego z jego składników z jednoczesnym zadeklarowaniem, że odtąd przez X rozumie się tylko ten składnik, a pomija się drugi.

2.6. Zastąpienia ontyczne mogą mieć różny charakter i różnym celom mogą służyć, zależnie od pojęć, których dotyczą, i okoliczności, w jakich się pojawiają. Pewne zastąpienia sprawiają trudność osobom uczącym się i warto je badać. Inne zaś nie są zauważane i wówczas próby zwracania uwagi na dokonaną zmianę mogą być bezcelowe. Świadomość zastąpienia ontycznego i jego znaczenia wymaga doświadczenia i dojrzałości.

W pewnych sytuacjach *zastąpienie ontyczne połączone jest z przejściem od jednej idei głębokiej do idei uważanej za różną*, w innych zaś sytuacjach *idea głęboka zachowuje swą tożsamość* (pomimo wzbogacenia jej o nowe więzy i znaczenia), *zmianie zaś ulega jej model formalny* (w sensie przedstawionym w Semadeni, 2002a). Na przykład, zmiany mnogościowych modeli liczby naturalnej na inne (a także modeli liczby rzeczywistej) to zastąpienia ontyczne, ale idea głęboka liczby nie ulega przy tym zmianie.

Należy jeszcze podkreślić, że jakkolwiek zastąpienie ontyczne $X' \rightsquigarrow X''$ dotyczy pojedynczych obiektów X', X'' , jednakże ma charakter systemowy. Według tej samej zasady zmianie ulegają wszystkie obiekty pewnego typu.

2.7. Wspomnimy teraz o kwestii ewentualnych zastąpień ontycznych w przypadku uogólniania pojęć. Wnikliwe studium (Lubomirski, 1983) ujawnia

⁶ Gray i Tall (1994) podkreślają znaczenie elastyczności związanej z dwuznacznością symboli takich, jak np. $7+5$, oznaczających: (a) proces lub (b) obiekt będący wynikiem tego procesu. Jednakże przejście proces $\rightarrow$ obiekt nie jest zastąpieniem ontycznym, bowiem zastąpienie musi mieć postać obiekt $\rightarrow$ obiekt.

wielkie bogactwo możliwych typów uogólnień w rozmaitych *sytuacjach matematycznych*. Najprostszy typ polega na zwykłym rozszerzeniu (w sensie relacji $\subset$) klasy rozpatrywanych obiektów, np. przy przejściu od trójkątów do wielokątów. Nazwa „trójkąt” nie jest tu zachowana, nie ma więc zastąpienia ontycznego. Przyjrzyjmy się innej, równie typowej sytuacji.

PRZYKŁAD 3. Gdy przechodzimy od pojęcia „punkt w przestrzeni trójwymiarowej” do pojęcia „punkt w przestrzeni n -wymiarowej”, rozszerza się zakres ogólnego pojęcia „punkt”. Pojęcie „punkt w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ” jest istotnie różne od pojęcia „punkt w $\mathbb{R}^n$ ”, bowiem inny jest zbiór desygnatów tego pojęcia. To szersze pojęcie obejmuje m.in. punkty (x, y) w $\mathbb{R}^2$ i punkty (x, y, z, t) w $\mathbb{R}^4$. Dowolny konkretny punkt, będący obiektem jednostkowym, indywiduum, np. punkt $(3, 0, -2)$ w $\mathbb{R}^3$, zachowuje tu swą tożsamość i pozostaje tym samym obiektem również w kontekście nowej, szerszej klasy, ale samo pojęcie „punkt” ulega zmianie, zostaje zastąpione przez inne, nierównoważne, o szerszym zakresie i o tej samej nazwie. Nie ma tu jednak żadnej próby utożsamiania pojęć „punkt w $\mathbb{R}^3$ ” i „punkt w $\mathbb{R}^n$ ”, nie ma więc zastąpienia ontycznego.

Natomiast poniżej w 3.1–3.5 (w przykładach od 4a do 7b, dotyczących arytmetyki teoretycznej) za każdym razem idea głęboka rozpatrywanego pojęcia zachowuje swą tożsamość (jakkolwiek ulega istotnemu wzbogaceniu). Przy zastąpieniu $n \rightsquigarrow \tilde{n}$ w przykładzie 4b i w przykładzie 5 stabilność całej formalnej konstrukcji opiera się właśnie na stałości idei głębokiej liczby naturalnej (bądź całkowitej). Zastąpienie ontyczne polega tam na zmianie *modelu formalnego* na inny.

3. Konstrukcje arytmetyki teoretycznej. Znane, stale cytowane powiedzenie L. Kroneckera głosi, że „liczby naturalne stworzył Pan Bóg, wszystkie zaś pozostałe liczby są dziełem człowieka”. Istotą tego aforyzmu jest postulat, by liczby naturalne traktować jako pojęcia pierwotne, nie wymagające definicji, wszystkie zaś pozostałe typy liczb powinny być definiowane, a ich własności dowodzone.

3.1. Kronecker i jego następcy szukali sposobów, aby w drodze formalnej konstrukcji⁷ określić wszystkie typy liczb, wychodząc od liczb naturalnych. Obejmuje to formalne konstrukcje coraz bardziej zaawansowanych typów liczb (całkowitych, wymiernych, rzeczywistych, zespolonych), za każdym razem wy-

⁷ Słowo „konstrukcja” używane jest w dydaktyce matematyki w dwóch sensach. Może to być konstrukcja *obiektywistyczna* (wyrażona wyłącznie w terminach matematyczno-logicznych) lub konstrukcja *mentalistyczna*, umysłowa, czyli pewien wytwór aktu myślowego. To pierwsze rozumienie jest bliższe platonizmowi, drugie zaś jest bliższe konceptualizmowi (por. Murawski, 2001, s. 123). W pracy tej używamy słowa „konstrukcja” w pierwszym sensie.

rażanych w terminach liczb poprzedniego etapu. Kompletny, pedantycznie drobiazgowy opis takiego przejścia od aksjomatów Peano aż do liczb zespolonych zawiera książka (Landau, 1930); są tam 73 definicje, 301 twierdzeń i tyleż dowodów podstawowych (szkolnych) własności czterech działań arytmetycznych i potęg o wykładnikach całkowitych. Kiedyś wierzono, że tego typu wiedza jest niezbędna dla przyszłego nauczyciela; arytmetyka teoretyczna była obowiązująca na studiach.

Obecnie panuje raczej przekonanie, że kształtowanie pojęć arytmetycznych u ucznia powinno wywodzić się z konkretnych, z wykonywanych czynności i z refleksji nad nimi. Znajomość konstrukcji arytmetyki teoretycznej nie tylko nie pomaga nauczycielowi w doborze właściwych metod, ale może być wręcz szkodliwa, bowiem naturalny rozwój tych pojęć u dzieci wcale nie jest zgodny z formalnymi konstrukcjami, które naszkicujemy poniżej.

Liczyby naturalne od pozostałych typów liczb odróżnia to, że są to liczby kardynalne zbiorów skończonych (a w każdym razie jest to ich najważniejsza interpretacja, nie mająca bezpośredniego odpowiednika ani dla liczb ujemnych, ani dla ułamków). Ponadto w rozwoju umysłowym dziecka, liczby naturalne wywodzą się z procedury *liczenia* przedmiotów, a ułamki — z procedury *mierzenia*.

PRZYKŁAD 4a. Ongiś w polskiej tradycji wprowadzania **liczb ujemnych** (sięgającej czasów przed I Wojną Światową i trwającą co najmniej do reformy z roku 1946) nauczyciele na początku kursu algebry odróżniali dwa rodzaje liczb: *liczby bezwzględne* (np. liczba 5), nie mające znaku, oraz *liczby względne*⁸, opatrzone znakiem $+$ lub $-$. Liczby względne dzieliły się na liczby *dodatnie* (np. $+5$) i *ujemne* (np. -5); ponadto była jeszcze liczba 0.

Zgodnie z tą koncepcją, przez kilka pierwszych tygodni nauki w II klasie gimnazjum liczby 5 i $+5$ były uważane za różne obiekty. Pamiętam, że po opanowaniu przez naszą klasę dodawania i odejmowania liczb względnych, pewnego dnia nauczycielka oświadczyła, że skoro działania na liczbach dodat-

⁸Łukasz Böttcher, docent c.k. Szkoły Politechnicznej we Lwowie, pisał tak: *Zasadniczy materiał Arytmetyki stanowią liczby: 1, 2, 3, 4, 5, Liczby te nazywamy liczbami bezwzględnymi. Utwórzmy sobie sumy $0+1, 0+2, 0+3, 0+4, 0+5, \dots$ znaczone krótko: $+1, +2, +3, +4, +5, \dots$ oraz różnice: $0-1, 0-2, 0-3, 0-4, 0-5, \dots$ znaczone krótko: $-1, -2, -3, -4, -5, \dots$. Liczby te nazywamy liczbami względnymi. (...) Ponieważ suma $0+a$ znaczy to samo, co liczba a , przeto nie odróżniamy liczby dodatniej od jej bezwzględnej wartości. Przed pojedynczą liczbą dodatnią nie stawiamy znaku $+$ (lecz go domyślamy się)* (Böttcher, 1911, s. 66–67). Wcześniej (str. 55) pisał: *Liczby zatem a i b tylko wtedy posiadają arytmetyczną różnicę $a-b$, gdy odjemna a jest większa niż odjemnik b . Algebra tem zastrzeżeniem się nie krępuje.* (...) Analiza tekstu pokazuje wyraźnie, że w obu tych wypowiedziach Böttcher stara się uniknąć zastąpienia ontycznego typu $+5 \rightsquigarrow 5$ i stara się od razu przyjąć, że $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Ponadto liczby ujemne zaliczał on do algebry, a nie do arytmetyki.

nich i działania na liczbach bezwzględnych są w pełni zgodne, można utożsamić te dwa rodzaje liczb. Zamiast $+5$ można pisać 5 i odwrotnie. Po latach, już jako student, zrozumiałem lepiej, o co jej chodziło. Starła się ona (zapewne opierając się na standardowym wówczas podejściu metodycznym) w jakiś poglądowy sposób wytłumaczyć nam to, co w języku uniwersyteckim można dziś ująć tak: ponieważ istnieje naturalne zanurzenie izomorficzne (homomorfizm iniektywny) $i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ półgrupy $\mathbb{N}$ liczb naturalnych w grupę $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych, deklaruje się zawieranie zamiast uprzedniego zanurzenia, tzn.

(3) zastępujemy $i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ przez $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Istotne w tym podejściu było początkowe traktowanie liczb względnych dodatnich i liczb bezwzględnych jako różnych obiektów, aby po jakimś czasie zadeklarować, że będzie się je uważać za tożsame. Później na szczęście wycofano się z tego zbędnego zastąpienia ontycznego i dzisiejsi matematycy są zdziwieni, gdy słyszą o owym starannym odróżnianiu liczb względnych dodatnich od liczb bezwzględnych przed laty w szkole.

3.2. Obecne nastawienie polskich dydaktyków jest bliskie koncepcji przedstawionej przez Vinnera (1975), którą określił on jako *naiwny platonizm*.

Nie angażując się w spory filozoficzne, proponował on, parafrazując Krockera, by w nauczaniu szkolnym oprzeć się na zmodyfikowanym aforyzmie: „Pan Bóg stworzył wszystkie liczby”, tzn. by podchodzić do sprawy następująco: wszystkie szkolne liczby istnieją, a dzieci poznają stopniowo coraz to nowe ich typy.

Nowe liczby należy więc wprowadzać, zachowując bez zmiany liczby dotychczasowe. Aby to było skuteczne, nie należy, zdaniem Vinnera, mówić uczniom, że nie wolno odejmować liczby większej od mniejszej (np. $5-7$) lub że niemożliwe jest podzielenie np. 5 przez 3 ; lepiej powiedzieć, że takiego odejmowania czy dzielenia będą uczyć się później⁹. Vinner postulował też, by nie mówić uczniom, że nie istnieje $\sqrt{-1}$; wrócimy do tego w przykładzie 7b.

3.3. Niektóre dawniejsze zastąpienia ontyczne — które były zbędnym, niezrozumiałym utrudnieniem — brały się stąd, że próbowano jakoś dostosować szkolną prezentację pojęć do postulatu, by wszystkie typy liczb (prócz naturalnych) były definiowane.

⁹ Kwestia, że np. liczbę 18 można podzielić przez 3 , a liczby 19 nie można, musi wypłynąć w klasie II przy nauce dzielenia. Z drugiej strony, gdy pojawi się kwestia dzielenia z resztą (której nie da się uniknąć, jeśli chce się wprowadzić algorytm dzielenia pisemnego), należy dać uczniom przykłady, w których ułamki w oczywisty sposób nie wchodzi w grę, np. gdy zadanie dotyczy pewnej liczby żarówek, samochodów czy osób. Później — w odpowiednich momentach — należy dbać o to, by każdorazowo uczniowie byli świadomi, czy oczekujemy w danym zadaniu dzielenia z resztą czy wyniku ułamkowego. Najlepiej, gdy wynika to niejako automatycznie z kontekstu odpowiednio dobieranych zadań.

PRZYKŁAD 4b. **Liczby całkowite** można zdefiniować jako klasy równoważności par (a, b) liczb naturalnych względem relacji $(a, b) \sim (a', b')$ określonej warunkiem $a + b' = a' + b$. Na takich obiektach należy zdefiniować działania arytmetyczne i relację $<$ oraz udowodnić ich podstawowe własności (Birkhoff i Mac Lane, 1963, s. 62).

Kryje się za tym *intuicyjne tło*: rozumuje się wprawdzie czysto formalnie o parach, ale zarazem taką parę (a, b) interpretuje się po cichu jako różnicę $a - b$, która może być ujemna (gdy $a < b$). Definicja relacji $\sim$ jest formalnie poprawna, gdyż jest wyrażona jedynie za pomocą dodawania liczb naturalnych; po cichu myślimy (lub głośno wyjaśniamy studentom), że warunek $a + b' = a' + b$ powstał przez przekształcenie intuicyjnie pojmowanej równości $a - b = a' - b'$. Było to standardowe podejście w arytmetyce teoretycznej pierwszej połowy XX wieku.

Przy tej konstrukcji liczba naturalna n odpowiada klasie równoważności $\tilde{n}$ par (a, b) takich, że $a = b + n$. Liczba n jest oczywiście innym obiektem niż ta klasa, bowiem n to pojedyncza liczba, a $\tilde{n}$ to zbiór par liczb, toteż identyfikując n z $\tilde{n}$ dokonujemy tu wyraźnego zastąpienia ontycznego $n \rightsquigarrow \tilde{n}$ lub zastąpienia odwrotnego $\tilde{n} \rightsquigarrow n$, zależnie od punktu widzenia.

Rezygnacja z arytmetyki teoretycznej jako osobnego przedmiotu studiów spowodowała umieszczenie powyższej konstrukcji tam, gdzie jest jej właściwe miejsce: w kursie algebry (Lang, 1984, s. 49). Formuluje się to jako ogólną konstrukcję zanurzenia półgrupy przemiennej z elementem neutralnym 0, spełniającej *warunek redukowania* $(a + b = a + c) \Rightarrow (b = c)$, w grupę abelową; bywa to dawane studentom jako zadanie.

Pomimo nieprzydatności tej abstrakcyjnej konstrukcji do celów szkolnych, w latach 1960–1980 dydaktycy opracowywali bardziej pogładowe jej wersje. Jedną z nich było tzw. *ujęcie operatorowe*, drugą traktowanie liczb całkowitych jako *wektorów* na półosi dodatniej. Wiązało się z tym zastąpienie ontyczne, w którym liczbę naturalną n utożsamiano z wektorami o początku a i końcu $a + n$, w szczególności z wektorem od 0 do n .

Wdrażanie tych *koncepcji dydaktycznych* w szkole skończyło się fiaskiem. Próbowano bowiem wyjaśnić uczniom pojęcie liczby ujemnej, odwołując się nie do intuicji związanych z konkretnymi, lecz do matematycznie znacznie trudniejszych (nawet w wersji intuicyjnej) pojęć: funkcji lub wektora.

3.4. Najogólniej można stwierdzić, że *podstawowym błędem* owych *koncepcji* było *redukcjonistyczne dążenie do opracowania takiego ujęcia nowego typu liczb, które byłoby logicznie spójną propozycją dydaktyczną, opartą na jednej tylko zasadzie*; co więcej, miała to być zarazem jakaś edukacyjna namiastka konstrukcji z arytmetyki teoretycznej (w owych czasach słabo przebiła się świadomość, że właściwą drogą jest stopniowe kształtowanie pojęć

związanych z tymi liczbami jako syntezy rozmaitych ich aspektów, w całym ich bogactwie sytuacyjnym).

Chciano przy tym określić liczby (które mają przecież charakter *statycznych stanów*) jako twory o zupełnie innym charakterze: jako *dynamiczne działania* lub jako *wektory* (por. Semadeni, 2004b). Powoływano się błędnie na ustalenia psychologii, że dzieci przyswajają pojęcia arytmetyczne najpierw na poziomie czynności, a dopiero potem na poziomie statycznych obiektów. Zgodnie z teorią Piageta jest tak istotnie, ale pod warunkiem, że czynności te wykonywane są na konkretach. Niewłaściwość dydaktyczna owych koncepcji polegała więc na tym, że rozważane działania (operatory) były czynnościami wykonywanymi na obiektach *abstrakcyjnych*, jakimi są liczby naturalne. Operatory są obiektami na istotnie bardziej zaawansowanym poziomie pojęciowym niż liczby, które miano w ten sposób uczniom objaśniać¹⁰.

PRZYKŁAD 5. Konstrukcja **ułamków** jako klas równoważności par (n, m) liczb naturalnych ($m \neq 0$) względem relacji $(n, m) \sim (n', m')$ określonej warunkiem $nm' = n'm$, oparta jest tej samej ogólnej myśli co w przykładzie 4b.

Jeśli za n dopuścimy dowolne liczby całkowite, konstrukcja ta daje wszystkie liczby wymierne; opis jej można znaleźć w wielu podręcznikach (np. Birkhoff i Mac Lane, 1963, s. 50). Jest to szczególny przypadek ogólnej algebraicznej konstrukcji zanurzania pierścienia przemiennego z jedyneką i bez dzielników zera (zwanego też *pierścieniem całkowitym* lub *dziędziną*) w ciało. W obu przypadkach zastąpienie ontyczne polega na identyfikacji liczby naturalnej n (lub, odpowiednio, całkowitej) z klasą równoważności $\tilde{n}$ pary $(n, 1)$.

Niezależnie jednak od przyjętej koncepcji dydaktycznej pojęcia ułamka i od drobnych kłopotów terminologicznych (typu „czy $\frac{\pi}{2}$ jest ułamkiem?”), w samym pojęciu „ułamek” tkwi nieusuwalna dwuznaczność. Nie ma prostej odpowiedzi na pytanie: czy *ułamek* (taki jak $\frac{6}{8}$) to *pojedyncza liczba*, czy *para liczb*? W zapisie np. $\frac{6}{8} + \sqrt{2}$ symbol $\frac{6}{8}$ niewątpliwie oznacza liczbę rzeczywistą¹¹, bowiem znak $+$ musi odnosić się tu do liczb, nie do par. Natomiast w określeniu „licznik ułamka $\frac{6}{8}$ ” symbol $\frac{6}{8}$ oznacza parę liczb, bowiem zachodzi równość $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ i liczba wymierna określona tymi ułamkami nie ma jednoznacznie określonego licznika (z pewnością nie jest nim liczba 8; jedynym

¹⁰ Zależnie od sytuacji operatory można zaliczyć do poziom *inter* lub do poziomu *trans* w sensie Piageta i Garcii (1989), omówionym w (Semadeni, 2005, s. 163–167), a więc na drugim lub trzecim poziomie rozwojowym. Oczywiście nowe, trudne pojęcie ułamka należy wprowadzać na poziomie pierwszym, *infra*.

¹¹ W przykładzie tym celowo napisany został $\sqrt{2}$ (choć mogłaby też być np. liczba π), nie mógłby natomiast być inny ułamek, bowiem wyrażenie np. $\frac{6}{8} + \frac{3}{5}$ może odnosić się zarówno do dodawania liczb rzeczywistych, jak i do dodawania ułamków-par; bardziej szczegółowo omawia tę kwestię Mac Lane (1950); por. (Semadeni, 2002b, s. 102).

ewentualnym kandydatem jest mianownik nieskracalnego ułamka $\frac{3}{4}$). Próby systematycznego, starannego odróżniania pojęć „ułamek” (para) i „liczba wymierna dodatnia” nie mogły się udać nawet na zajęciach uniwersyteckich¹². W kontekście ułamków mamy stale do czynienia z zastąpieniami ontycznymi typu (α) : $\langle \text{liczba} \rangle \rightsquigarrow \langle \text{para} \rangle$ lub $\langle \text{para} \rangle \rightsquigarrow \langle \text{liczba} \rangle$ lub też — zależnie od sytuacji — z zastąpieniami typu (β) lub (γ) .

PRZYKŁAD 6. Przy konstrukcji Dedekinda **liczb rzeczywistych** zastąpienie ontyczne polega na identyfikacji liczby wymiernej w z odpowiadającym jej przekrojem, np. z parą zbiorów $\{x : x \in \mathbb{Q}, x < w\}$, $\{x : x \in \mathbb{Q}, x \geq w\}$. Interesujące jest prześledzenie zabiegów dydaktycznych, jakie czynili doświadczeni autorzy, aby zminimalizować negatywny efekt tego zastąpienia.

Fichtenholz (1978, s. 5 i s. 10–12) pisze o „dołączeniu liczb niewymiernych do liczb wymiernych”. Liczby wymierne są u niego dotychczasowymi liczbami. Jedynie liczby niewymierne są przekrojami, później jednak pisze on, że „dla jednolitości” odpowiednie przekroje będą też wyznaczać liczby wymierne.

Rudin (1982, s. 7–23) definiuje $\mathbb{R}$ aksjomatycznie, zakładając, że $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Problem zastąpienia ontycznego w ogóle się tam nie pojawia, został bowiem włączony w szczegóły dowodu istnienia takiego ciała $\mathbb{R}$ (ponadto dowód ten umieszczony został w specjalnym dodatku i w ten sposób odsunięty od głównego tekstu).

Drugą standardową metodą konstruowania liczb rzeczywistych z ciała $\mathbb{Q}$, alternatywną wobec metody Dedekinda, jest metoda Cantora. W zbiorze wszystkich ciągów (w_n) liczb wymiernych, spełniających warunek Cauchy’ego, wprowadza się relację równoważności $(w_n) \sim (v_n)$ określoną warunkiem $\lim(w_n - v_n) = 0$; szczegóły można znaleźć np. w (H. i J. Musielakowie, 1993). Zastąpienie ontyczne pojawia się w momencie utożsamiania liczby wymiernej w z klasą równoważności ciągu stałego $(w, w, \dots)$.

Przejście od intuicyjnego pojęcia π_{intuic} liczby rzeczywistej x do któregośkolwiek z jej formalnych modeli: do zbioru x_D (czyli liczby x w modelu Dedekinda) i do zbioru x_C (liczby x w modelu Cantora) jest zastąpieniem ontycznym, bowiem x , x_D i x_C to trzy różne obiekty¹³.

PRZYKŁAD 7a. Liczby zespolone wprowadza się jako pary uporządkowane (x, y) liczb rzeczywistych, z odpowiednimi definicjami relacji równości,

¹² Kwestię tę komplikuje jeszcze klasyczna konstrukcja arytmetyki teoretycznej, przy której liczba wymierna odpowiadająca ułamkowi $\frac{3}{4}$ to nieskończony zbiór $\{\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \dots\}$. Aby uniknąć nonsensownego związku $\frac{3}{4} \in \frac{3}{4}$, trzeba by używać różnych symboli na oznaczenie pary $\frac{3}{4}$ i odpowiadającej jej liczby wymiernej, co byłoby niecelowe i praktycznie niewykonalne.

¹³ Aby pokazać, że np. π_{intuic} różni się od π_D i od π_C wystarczy zastosować kryterium Leibniza z 2.1, pisząc warunek typu $x \in X$, który spełnia jeden ze zbiorów π_D i π_C , a którego nie spełnia ani π_{intuic} ani drugi z tych zbiorów.

dodawania i mnożenia. Dowodzi się wszystkich własności ciała $\mathbb{C}$ liczb zespolonych¹⁴. W pewnym momencie konieczne staje się utożsamienie liczby rzeczywistej x z liczbą zespoloną $(x, 0)$. Motywacja jest analogiczna do (3): ze względów praktycznych zanurzenie izomorficzne $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ trzeba zastąpić przez inkluzję $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Oto przykład takiego ujęcia:

Wzory te dowodzą, że zbiór wszystkich liczb zespolonych typu $(a, 0)$ jest ze względu na cztery działania arytmetyczne izomorficzny ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych. Wobec tego kwestią znakowania tylko będzie, jeżeli liczby zespolone $(a, 0)$ będziemy oznaczali wszędzie temi samymi symbolami, co odpowiednie liczby rzeczywiste a . Umówimy się więc pisać poprostu a zamiast $(a, 0)$, czyli kładziemy

$$(a, 0) = a$$

przy wszelkiem rzeczywistem a (Sierpiński, 1948, s. 181).

W (Sierpiński, 1951, s. 84) tekst jest niemal taki sam. Jednakże powyższa równość jest formalnie fałszywa; liczba a nie może być równa parze $(a, 0)$. Niezbędne jest więc tu zadeklarowanie zastąpienia ontycznego. Zapis $(a, 0) = a$ należy tu interpretować jako $(a, 0) \rightsquigarrow a$. Symbole a i $(a, 0)$ stosuje się zamiennie, zależnie od kontekstu, chociaż oznaczają różne obiekty.

Zauważmy, że opisane w powyższym cytacie utożsamianie jest bardzo podobne do szkolnego zastąpienia ontycznego $(x_0, 0) \rightsquigarrow x_0$ prowadzącego od punktu $(x_0, 0)$ przecięcia wykresu funkcji rzeczywistej z osią x do **miejsca zerowego** x_0 tej funkcji (kwestia ta była omawiana, z innego punktu widzenia, w Semadeni, 2002d, s. 155). Gdy myślimy o miejscu zerowym funkcji, nasuwają się pytania: Czy oś, na której leży ten punkt, to samodzielna, jednowymiarowa oś liczbowa, czy też oś x w prostokątnym układzie współrzędnych? Innymi słowy, czy oś, na której leży miejsce zerowe funkcji, jest zawarta w płaszczyźnie? Jeżeli uznamy, że ta oś jest częścią płaszczyzny, to miejscem zerowym funkcji jest para $(x_0, 0)$. Jeżeli uznamy, że miejscem zerowym funkcji jest pojedyncza liczba x_0 , to musimy traktować tę oś jako **rozłączną** z płaszczyzną, jest to bowiem konsekwencja tego, że formalnie x_0 i $(x_0, 0)$ są różnymi obiektami.

¹⁴ W podręczniku (Sierpiński, 1951, s. 81–91) prezentacja tego jest czysto formalna, w stylu DTD (Definicja, Twierdzenie, Dowód), bez najmniejszej nawet wzmianki dotyczącej celu wprowadzania takich liczb i bez żadnych uwag historycznych. Zdarzało, że równie formalnie, opierając się na tej książce, wykładano to początkującym studentom. Natomiast w (Sierpiński, 1948, s. 175–186) ponad trzy strony poświęcone są heurystycznym przygotowaniom wprowadzenia tej definicji. Być może w tej późniejszej książce autor zakładał znajomość wcześniejszej książki, ale nic o tym nie wspomniał. Dodajmy, że dydaktycznie bardzo pouczające są różne sposoby ujęcia tego zagadnienia w podręcznikach (Mostowski i Stark, 1955) i (Birkhoff i Mac Lane, 1963).

PRZYKŁAD 7b. W wielu podręcznikach liczby zespolone wprowadza się od początku w postaci $a + bi$. Jest to wprawdzie często uważane przez matematyków za niewystarczająco ścisłe, ale ma istotną zaletę: nie ma wtedy potrzeby zastąpienia ontycznego, bowiem z warunku $b = 0$ wynika, że $a + 0 \cdot i = a$.

Taką właśnie drogę proponuje Vinner (1975) w duchu naiwnego platonizmu (wspomnianego w 3.2). Postuluje, by oświadczyć uczniom lub studentom, że dotąd uczyli się tylko części pełnego systemu liczbowego: tylko liczb rzeczywistych. Teraz poznają dalsze liczby. Wśród nich jest pierwiastek z liczby -1 , oznaczany symbolem i . Tak więc $i^2 = -1$. Oczywiście i nie jest liczbą rzeczywistą. Każda z liczb, o których teraz będą się uczyć, powstaje przez pomnożenie i przez liczbę rzeczywistą b i dodanie tego do liczby rzeczywistej a ; daje to liczbę postaci $a + b \cdot i$. Na tych nowych liczbach rachuje się analogicznie do tego, co znamy już z rachunków na liczbach rzeczywistych. Z tego wynikają wzory na dodawanie liczb zespolonych, mnożenie itd.

Nasuwa się naturalne pytanie, jak uzasadnić tę obecność $\sqrt{-1}$ w pełnym systemie liczbowym. Uczniowie zapewne słyszeli wielokrotnie, że takiej liczby nie ma, nawet jeśli ich nauczyciel przestrzegał rady Vinnera (por. 3.2). Co ważniejsze, nie jest możliwe pokazanie im przykładu, w którym liczba i ma jakieś realne, codzienne, praktyczne znaczenie, a nie jest jedynie formalnym narzędziem zaawansowanych obliczeń. Jeżeli więc liczby zespolone miałyby być wprowadzane w szkole, najwłaściwsze byłoby ograniczenie się do poinformowania uczniów, że liczby zespolone są bardzo ważne w zaawansowanej matematyce i w zastosowaniach do fizyki¹⁵. Jednakże, aby móc zrozumieć te zastosowania, trzeba wpięrow opanować podstawowe działania na liczbach zespolonych.

Możliwe jest wprowadzenie liczb zespolonych jako wektorów i zdefiniowanie ich mnożenia za pomocą jednokładności i obrotów, ale takie podejście ma tę samą wadę co konstrukcje wspomniane powyżej: definiowanie nowych pojęć za pomocą pojęć bardziej zaawansowanych.

3.5. Paradoksalnie z czterech teoretycznych, klasycznych konstrukcji: liczb całkowitych, wymiernych, rzeczywistych i zespolonych (z przykładów 4b, 5a, 6b i 7a), ta ostatnia jest formalnie najprostsza. Jest jedyną (oprócz konstruk-

¹⁵ Jedynymi szkołami średnimi, w których stale uczono liczb zespolonych (zapisywanych $a + bj$), były technika elektryczne, bowiem wyrażenia typu $I(t) = I_0(a \cos \omega t + jb \sin \omega t)$ i $I_0 e^{j\omega t}$ są bardzo użyteczne we wzorach m.in. na natężenie I i napięcie U prądu przemiennego w obwodzie, w którym szeregowo włączone są: opór R (zwany rezystancją lub oporem omowym), pojemność C i samoindukcja L . We wzorze $U = IZ$ (który dla prądu stałego staje się prawem Ohma $U = IR$) mamy zespoloną *impedancję* (zwaną też *zawadą*) $Z = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})$ i $|Z| = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$. Wielkość $L\omega - \frac{1}{C\omega}$ to opór *urojony* w obu sensach tego słowa: jako fizyczny opór pozorny i jako część urojona impedancji.

cji Dedekinda), która nie wymaga klas równoważności. Nowo wprowadzane liczby (a, b) nie są zbiorami nieskończonymi, wystarcza pojęcie pary uporządkowanej. Główną natomiast trudnością związaną z liczbami zespolonymi jest brak ukształtowanej bezpośredniej intuicji tych liczb wywodzącej się z jakichś znanych zjawisk przyrodniczych lub społecznych.

Ta sama trudność wiązała się dawniej z liczbami ujemnymi (*numeri ficti infra nihil*, „liczby fikcyjne niższe niż nic”), które nie miały zrozumiałych odpowiedników w przyrodzie (por. Freudenthal, 1985, s. 9), jakkolwiek miały interpretację ekonomiczną jako opis długów. Dzisiaj, z uwagi na silny wpływ sytuacji życiowych, samo pojęcie liczby ujemnej nie wywołuje już oporów u dzieci (choć mają trudności z działaniami na takich liczbach). Widzą ujemne temperatury w TV, ujemne poziomy w windach (historycznie zapewne najwcześniejszym publicznym ich użyciem było u nas numerowanie poziomów: 0, -1 , -2 na makiecie Dworca Centralnego w Warszawie w 1972 r.).

Natomiast w powszechnej świadomości liczby zespolone pozostają nadal odległe od codziennego życia i stosuje się je wyłącznie na poziomie uniwersyteckim i w zastosowaniach technicznych. Piękne zastosowania geometryczne liczb zespolonych rzadko mogą pojawić się w szkole średniej i to raczej jedynie dla wybranych grup uczniów.

Zgodnie z postulatem Vinnera naiwnego platonizmu (por. 3.2) nauczanie szkolne powinno być tak pomyślane, aby kolejne uogólnienia *nie zmieniały liczb jako obiektów*, tj. by zachodziły inkluzje

$$(4) \quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Gdy więc rozszerza się w szkole pojęcie liczby, wprowadzając nowy typ liczb, niepożądane są zastąpienia ontyczne, o których była mowa w 3.1–3.4. W szczególności, zamiast deklarowania przechodzenia do klas abstrakcji (np. przy równości ułamków) powinno dążyć się do tego, by to w umyśle ucznia — *jako część procesu kształtowania się nowo wprowadzanych pojęć* — dokonywała się synteza pojęciowa, wiodąca do przekonania, że np. $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$ to różne zapisy tej samej liczby; podobnie $\frac{5}{1}$ i $\frac{10}{2}$ to dotychczasowa liczba 5, nie ulegająca żadnej zmianie.

4. Składanie zastąpień ontycznych. Przypuśćmy, że mamy parę zastąpień $X' \rightsquigarrow X''$ i $X'' \rightsquigarrow X'''$. Czy stąd wynika $X' \rightsquigarrow X'''$?

4.1. Pokażemy przykłady składania dwóch kolejnych zastąpień ontycznych, z których każde jest naturalne i nieraz stosowane, a mimo to złożone razem okazują się nieakceptowalne.

PRZYKŁAD 8a. Pokażemy, jak wzajemny stosunek pojęć: **punkt** i **wektor** ujęto w ważnych podręcznikach. W (Banach, 1949) punkty odróżnia się od

wektorów, ale położenie poruszającego się punktu M opisuje się za pomocą wektora wodzącego $\overline{OM}$, umiejscowionego w początku układu O . Współrzędne x, y, z punktu M wyznaczają składowe $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ odpowiadającego wektora. Punkt (x, y, z) i wektor wodzący $\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$ są używane zamiennie.

W (Borsuk, 1964) punkt (w $\mathbb{R}^n$) określa się jako ciąg $p = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Wektor umiejscowiony to uporządkowana para punktów p, q , a wektor swobodny to klasa równoważności $\overline{pq}$ wektorów umiejscowionych, reprezentowana przez ciąg współrzędnych $[a_1, \dots, a_n]$. Borsuk traktuje punkt i wektor swobodny jako różne obiekty.

Następujący cytat jest charakterystyczny dla wielu wykładowców analizy, nastawionych na przygotowanie studenta do kursu analizy funkcjonalnej:

Uporządkowany zbiór n liczb rzeczywistych $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nazywamy n -wymiarowym punktem lub wektorem o n składowych (Apostol, 1957).

Kryje się za tym wątek myślowy, który streścimy następująco: (a) przestrzeń euklidesowa to $\mathbb{R}^n$; (b) $\mathbb{R}^n$ to szczególny przypadek przestrzeni Banacha; (c) przestrzeń Banacha jest określona jako przestrzeń liniowa, a więc jej elementy są wektorami; (d) elementy przestrzeni Banacha są jej *punktami*.

Utożsamianie punktów i wektorów swobodnych opiera się na dwóch wzajemnie odwrotnych zastąpieniach ontycznych:

(5) $\langle \text{punkt} \rightsquigarrow \text{wektor swobodny} \rangle$ i $\langle \text{wektor swobodny} \rightsquigarrow \text{punkt} \rangle$.

Mamy tu sytuację typu (γ) opisaną w 2.1 i 2.3. Efektem tych dwóch zastąpień jest synteza pojęciowa: punkt & wektor¹⁶.

PRZYKŁAD 8b. Kontynuując powyższe rozważania, zajmiemy się pojęciami: **wektor** i **translacja** (przesunięcie). W polskich podręcznikach znajdujemy terminy: *wektor związany*, *wektor zaczepiony* i *wektor umiejscowiony* będące synonimami. *Wektor swobodny* to klasa równoważności, tj. rodzina wszystkich wektorów związanych (A', B') równych (równoważnych) wektorowi (A, B) .

W podręczniku (Krygowska i Maroszkowa, 1974) jednowyrazowy termin „wektor” oznacza wektor zaczepiony, zdefiniowany jako uporządkowana para punktów, a wektor swobodny to translacja, a więc przekształcenie geometryczne. Podana tam argumentacja jest mnogościowa. Wektor swobodny i odpowiadająca mu translacja to zbiór tych samych par punktów; co więcej, chwila zastanowienia wystarczy, by stwierdzić, że równość wektorów zaczepionych jest dokładnie tą samą relacją, która zachodzi między parami składającymi

¹⁶ Bugajska-Jaszczołt i Drygała (2006) proponują, by na wczesnym etapie kursu algebry liniowej wyraźnie przedstawić studentom trzy interpretacje geometryczne elementów przestrzeni $\mathbb{R}^3$: jako punktów, jako wektorów zaczepionych i jako wektorów swobodnych. Innymi słowy, proponują, by zastąpienia (5) były wyraźnie wyjaśnione i ugruntowane w $\mathbb{R}^3$ przed przejściem do pojęć ogólniejszych.

się na translację. Ta formalna, mnogościowa argumentacja staje się bardziej przekonująca, gdy uświadomimy sobie bliskość znaczenia pojęć: „wektor” i „translacja o ten wektor”. Nie usuwa to jednak w pełni wątpliwości dotyczących tego utożsamienia.

W książce (Białynicki-Birula, 1976, s. 32–36) wyraźnie odróżnia się punkty w przestrzeni euklidesowej E^n ($n = 1, 2, 3$) od wektorów, jednakże wektory związane nie są zdefiniowane jako pary punktów (por. 6.2). Każdej parze punktów (p, q) przyporządkowany jest *wektor związany* $\overrightarrow{pq}$ o początku w p i o końcu w q . To, że każdy wektor swobodny wyznacza pewną translację przestrzeni E^n , pozwala utożsamić wektory swobodne w E^n z translacjami i zdefiniować wektor swobodny jako translację.

Utożsamianie wektora swobodnego z translacją opiera się na parze zastąpień ontycznych:

(6) $\langle \text{wektor swobodny} \rightsquigarrow \text{translacja} \rangle$ i $\langle \text{translacja} \rightsquigarrow \text{wektor swobodny} \rangle$.

Powstaje nowe pojęcie: wektor & translacja, synteza typu (γ) (por. 2.3) dwóch utożsamionych pojęć. To, której z dwóch nazw użyjemy, zależy od kontekstu.

Porównując przykłady 8a i 8b, widzimy, że możliwe są bądź zastąpienia (5) bądź zastąpienia (6). *Nie jest jednak możliwe równocześnie przyjęcie zastąpień ontycznych (5) i (6), bowiem wzajemnie się one wykluczają*¹⁷.

Wynika to stąd, że wprawdzie punkt (np. w $\mathbb{R}^3$) może być utożsamiony z odpowiadającym mu wektorem swobodnym (czyli punkt i wektor mogą być uważane za ten sam obiekt) i również wektor swobodny może być uznany za tożsamy z odpowiadającą mu translacją, gdybyśmy jednak zadeklarowali równocześnie o b a utożsamienia: „punkt=wektor” i „wektor=translacja”, prowadziłoby to do konkluzji: „punkt i translacja są tym samym” (Semadeni, 2002b, s. 96).

Aby uzmysłowić sobie to, że takie stwierdzenie jest nieakceptowalne, warto zastanowić się nad hipotetyczną sytuacją, w której egzaminator pyta: *Jak definiuje się translację na płaszczyźnie?*, student zaś odpowiada: *Translacja to dowolny punkt płaszczyzny*.

Ten przykład uwypukla fundamentalną różnicę między sformułowaniami: „ X można utożsamić z Y ” i „ X jest tym samym co Y ”. Słowa „można utożsamić” znaczą, że w pewnych sytuacjach można zastąpić X przez Y .

¹⁷ Ścisłej mówiąc, możliwe są zastąpienia (5) i (6), jeśli interpretowane są w sensie (β) , tzn. jako konglomeraty; obiekty X' , X'' , X''' uważa się wtedy za różne (lub dwa z nich uważa się za tożsame, a trzeci za różny), ale używa się elastycznie tej samej nazwy na oznaczenie dowolnego z nich. Natomiast zastąpienia polegające na równoczesnych deklaracjach: $X' = X''$ i $X'' = X'''$ byłyby za daleko idące.

Nie znaczą jednak, że zawsze, w każdej sytuacji zamiast X można wstawić Y . *Utożsamienia dokonuje się lokalnie, w pewnym obrębie zagadnień. Natomiast zastąpienie ontyczne, jeśli jest jawne, jest zadeklarowane globalnie i ma obejmować całą określoną dziedzinę matematyki.*

4.2. Pokażemy teraz następne przykłady konfliktu kolejnych zastąpień.

PRZYKŁAD 9. Rozważymy ogólne pojęcie **funkcji** (przekształcenia, odwzorowania) $f: X \rightarrow Y$. Od czasów Weierstrassa i Dedekinda opierało się ono na idei głębokiej *przyporządkowania*, która funkcjonowała jako pojęcie pierwotne, zrozumiałe, choć niezdefiniowane (podobnie jak pojęcie zbioru).

Hausdorff (1914, s. 33) napisał, że jeśli A, B są zbiorami niepustymi i jeśli P jest zbiorem par (a, b) takich, że każdy element $a \in A$ jest połączony w parę z jednym i tylko jednym elementem $b \in B$ i ów jedyny element oznaczymy $b = f(a)$, to w ten sposób definiuje się pewną funkcję. Ponadto różnym zbiorom par P, P' odpowiadają różne funkcje f, f' (i na odwrót).

W ten sposób Hausdorff ustalił ważną odpowiedniość $P \mapsto f$. Później w teorii mnogości dokonano redukcji liczby pojęć, zastępując „odpowiada” przez „jest tym samym” i przyjmując, że $f = P$. Innymi słowy przyjęto, że funkcja f jest tym samym co jej wykres $\{(x, y) : y = f(x)\}$. To zaś pozwoliło zdefiniować funkcję jako zbiór par spełniających znane warunki i wyeliminować pojęcie przyporządkowania. Efektem tego było zastąpienie ontyczne

$$(7) \quad \langle \text{przyporządkowanie} \rangle \rightsquigarrow \langle \text{odpowiedni zbiór par} \rangle.$$

Aby przeanalizować to zastąpienie, dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że rozważaną funkcją jest $f(x) = \sin x$ na $\mathbb{R}$. Zbiór par $\{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y = \sin x\}$ to wykres funkcji. Wykresem funkcji sinus jest sinusoida. Sinusoida jest figurą geometryczną.

Mamy tu łańcuch identyfikacji, wiodących do konkluzji: funkcja $x \mapsto \sin x$ to figura geometryczna. Jeżeli czytelnik nie zaakceptowałby takiej odpowiedzi studenta na pytanie o definicję funkcji sinus, powinien spróbować ustalić, które ogniwo powyższego wnioskowania należy zakwestionować.

Podobne uwagi dotyczą pojęcia **relacji**, rozumianej w tradycyjnej logice jako *pozostawanie w pewnym stosunku*, który może zachodzić lub nie. W przypadku np. relacji $<$ nierówności liczb (np. rzeczywistych) istotą tej relacji jest to, że dla każdej pary liczb (a, b) na pytanie: „Czy $a < b$?” możliwa jest tylko jedna z odpowiedzi: *tak* lub *nie*. Relacja ta każdej parze (a, b) przyporządkowuje więc element zbioru $\{0, 1\}$, symbolizujący prawdę bądź fałsz. Zastąpieniem ontycznym jest tu

$$\langle \text{relacja} \rangle \rightsquigarrow \langle \text{jej ekstensja} \rangle,$$

czyli

$$\langle \text{relacja jako pozostawanie w pewnym stosunku} \rangle \rightsquigarrow \langle \text{zbiór par} \rangle.$$

PRZYKŁAD 10. Idea głęboka **pary uporządkowanej** $(a, b)_{\text{intuic}}$ wywodzi się z syntezy następstwa czasowego¹⁸: „najpierw a , potem b ” i następstwa przestrzennego: „na pierwszym miejscu a , na drugim b ”. Nie istnieje naturalna definicja pojęcia pary (a, b) . *Model mnogościowy Wienera*, zdefiniowany jako $(a, b)_W = \{\{a\}, \{b, \emptyset\}\}$, jest jedną z wielu opublikowanych definicji, od pozostałych różni się drugorzędnymi szczegółami konstrukcji (rozmaite aspekty zagadnienia pary omawia Quine, 1999, s. 292–297). Najbardziej znanym modelem pary uporządkowanej jest *para Kuratowskiego*: $(a, b)_K = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Ponieważ $(a, b)_{\text{intuic}}$ i oba modele: $(a, b)_W$ i $(a, b)_K$ — są trzema różnymi obiektami¹⁹, mamy zastąpienia: $(a, b)_{\text{intuic}} \rightsquigarrow (a, b)_W$ i $(a, b)_{\text{intuic}} \rightsquigarrow (a, b)_K$.

4.3. Zajmiemy się teraz zastąpieniami ontycznymi w osobliwym „zapętleniu ontycznym”, w specyficznej anomalii analizowanej w (Semadeni, 2002c).

PRZYKŁAD 11. Standardowa, oparta na teorii mnogości, precyzyjnie dedukcyjna prezentacja pojęć: *para*, *relacja*, *funkcja*, *ciąg* składa się z następujących sześciu kroków:

1° *para* (a, b) jest zdefiniowana sposobem Kuratowskiego jako $\{\{a\}, \{a, b\}\}$;

2° *iloczyn kartezjański* jest zdefiniowany jako zbiór wszystkich par (a, b) , tj.

$$A \times B = \{(a, y) : a \in A, b \in B\};$$

3° *relacja* jest zdefiniowana jako zbiór par, tj. podzbiór iloczynu $A \times B$;

4° *funkcja* jest zdefiniowana jako relacja spełniająca dwa znane warunki;

5° *ciąg* $(a_1, \dots, a_n)$ jest zdefiniowany²⁰ jako funkcja na $\{1, \dots, n\}$;

6° *iloczyn* $A_1 \times \dots \times A_n$ jest zdefiniowany jako

$$\{(a_1, \dots, a_n) : a_j \in A_j \text{ dla } j \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Stwierdzamy tu szereg kolejnych zastąpień ontycznych.

¹⁸ Tak uważał Hausdorff (1914, s. 32), który napisał, że pojęcie pary uporządkowanej jest psychologicznie pierwotniejsze od pojęcia pary nieuporządkowanej. Ta uwaga, pochodząca od autora najśłynniejszej książki z teorii mnogości, jest szczególnie znacząca, gdyż świadczy o wyraźnej inwersji. Definiuje się pary uporządkowane za pomocą par nieuporządkowanych, które w aksjomatycznych ujęciach teorii mnogości są przyjmowane jako dedukcyjnie wcześniejsze od par uporządkowanych, choć są późniejsze, zdaniem Hausdorffa, w naturalnym rozwoju pojęć.

¹⁹ Aby pokazać, że $(a, b)_{\text{intuic}}$ różni się od $(a, b)_W$ i od $(a, b)_K$ wystarczy zastosować kryterium Leibniza z 2.1, rozpatrując następującą własność: Czy dany obiekt ma jakąś inną parę jako swój element?

²⁰ Jest to standardowe ujęcie pojęcia ciągu jako przyporządkowania $1 \mapsto a_1, \dots, n \mapsto a_n$. Zauważmy, że określenie Apostoła (cytowane w przykładzie 8a) ciągu jako zbioru uporządkowanego $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, choć zrozumiałe, jest niezgodne z powszechnie zaakceptowaną definicją zbioru uporządkowanego, co jest wyraźnie widoczne w przypadku, gdy elementy a_j mogą się powtarzać.

- (a) $\langle \text{intuicyjnie rozumiane pojęcie pary uporządkowanej} \rangle \rightsquigarrow$
 $\rightsquigarrow \langle \text{zbiór } \{\{a\}, \{a, b\}\} \text{ jako jeden z modeli formalnych pojęcia pary} \rangle$;
- (b) $\langle \text{relacja jako pozostawanie w pewnym stosunku} \rangle \rightsquigarrow$
 $\rightsquigarrow \langle \text{jej ekstensja wyrażona jako zbiór par} \rangle$;
- (c) $\langle \text{funkcja jako przyporządkowanie} \rangle \rightsquigarrow \langle \text{zbiór par } (x, f(x)) \rangle$;

Efektom tych czterech zastąpień ontycznych jest konflikt definicyjny, polegający na tym, że jeśli podstawimy $n=2$ w iloczynie kartezjańskim zdefiniowanym w 6° , to otrzymany w ten sposób zbiór nie jest równy iloczynowi kartezjańskiemu zdefiniowanemu w 2° (Kuratowski i Mostowski, 1952, s. 56 i s. 73). Co więcej, tej niezgodności nie da się usunąć żadnymi zabiegami formalnymi²¹. Z konieczności trzeba więc dokonać jeszcze jednego zastąpienia ontycznego:

- (d) $\langle \text{iloczyn kartezjański zdefiniowany w } 6^\circ \text{ dla } n=2 \rangle \rightsquigarrow$
 $\rightsquigarrow \langle \text{iloczyn kartezjański zdefiniowany w } 2^\circ \rangle$.

Jest to jednak zastąpienie ontyczne innego typu niż poprzednie: uogólnienie z 2 na n , które miało być prostą inkluzją w sensie 2.7, jest niezgodne z wcześniejszą definicją. W praktyce matematycy nie korzystają nigdy z kroku 1° , bowiem w ogóle nie korzystają z żadnej definicji pary uporządkowanej, elastycznie operując ideą głęboką pojęcia pary. Jeśli to jest do czegoś potrzebne — dobierają odpowiedni model formalny, zależnie od okoliczności.

5. Zastąpienia ontyczne a metafory i metonimie²². Zastąpienia rozpatrywane w tej pracy w naturalny sposób kojarzą się z przesunięciami znaczeń lub przesunięciami referencji²³ wyrażen językowych, przeanalizujemy więc sto-

²¹ Definicja produktu $X_1 \times \dots \times X_n$ jako zbioru ciągów $(x_1, \dots, x_n)$ jest standardowa, jakkolwiek nie jest to jedyny możliwy formalizm. Gödel (1940) używał definicji rekurencyjnej: $(x_1, \dots, x_n) = (x_1, (x_2, \dots, x_n))$, skąd $X_1 \times \dots \times X_n = X_1 \times (X_2 \times \dots \times X_n)$. Prowadzi to do innych obiektów i innych zastąpień ontycznych, ale nie usuwa opisanych tu trudności, jedynie przesuwają je w inne miejsce. Dodajmy, że utożsamienie $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ z $\mathbb{R}^{n+1}$, wykorzystywane przy interpretowaniu wykresów funkcji $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jako pewnych podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^{n+1}$, nie jest zastąpieniem ontycznym, jeśli nie używa się wspólnej nazwy na określenie obu identyfikowanych obiektów.

²² Autor pragnie podziękować prof. Zygmuntowi Saloniemu za życzliwe przeczytanie tego fragmentu pracy i za krytyczne uwagi.

²³ Terminologia związana ze słowem *referencja* nie jest ujednolicona. Zgodnie z (Polański, 1993) termin *referencja* w szerszym znaczeniu jest równoznaczny z terminem *denotacja* w szerszym znaczeniu. Referencją *nazwy argumentowej* (której najbardziej typowymi przykładami są imiona własne, np. *Warszawa*) jest indywidualny przedmiot przez nią wskazany. Referencją *wyrażenia predykatywnego* jest klasa przedmiotów, o których można dane wyrażenie orzec zgodnie z prawdą. Przy tej interpretacji referencją *jednomiejscowego* wyrażenia predykatywnego jest więc zbiór przedmiotów; referencją *dwumiejscowego* wyrażenia np. *rektor* jest zbiór par (osoba, uczelnia), o których można orzec zgodnie z prawdą, że

sunek zastąpień ontycznych do pewnych podstawowych pojęć lingwistyki i pokażemy, na czym polegają różnice.

5.1. Zacniemy od zacytowania wybranych określeń dwóch pojęć ważnych dla dydaktyki matematyki.

Metafora (synonim: *przenośnia*) to występowanie wyrazu w nowym znaczeniu łączącym się ze znaczeniem realnym w sposób obrazowy, plastyczny i rozumianym poprzez odniesienie do znaczenia realnego (*Słownik języka polskiego PWN*).

Metafora to słowo, wyrażenie, obraz lub opis uzyskujące nowe znaczenie przez odniesienie ich do rzeczy, z którymi są kojarzone ze względu na jakieś podobieństwo (*Inny słownik języka polskiego PWN*).

Metafory formalnie definiuje się jako stwierdzenia, które w sensie dosłownym są fałszywe, ale które jednak jasno przekazują zrozumiałe znaczenie (Gleason i Ratner, 2005, s. 202).

Zwróćmy uwagę na różnice między powyższymi określeniami: w pierwszym metafora jest „występowaniem”, w trzecim jest „stwierdzeniem”; drugie określenie jest najogólniejsze.

Metonimia (synonim: *zamiennia*) to figura stylistyczna polegająca na oznaczeniu przedmiotu za pomocą nazwy oznaczającej inny przedmiot związany z poprzednim stosunkiem przyczyny do skutku, części do całości, zawartości do zawierającego itp. (*Słownik języka polskiego PWN*).

Metonimia to figura retoryczna tworzona *per immutationem*, czyli przez zastąpienie. Nie ma właściwie ścisłej definicji metonimii. Zastąpienie nazwy jednego przedmiotu nazwą innego odnosi się do wszystkich figur, u których podstawy leży mechanizm substytucyjny. Metonimia oparta jest na zależnościach między przedmiotami rzeczywistości pozajęzykowej, określanych jako różne rodzaje styczności. Metonimia w tym

ta relacja zachodzi. *Referencję w znaczeniu węższym* ogranicza się do nazw argumentowych (np. imię własne *Stefan Jackowski*) oraz do wyrażań takich, jak np. *Prezes PTM w 2006 r.*, tzn. wskazujących pojedynczą osobę czy wyróżniony przedmiot. Bańko (2000, s. XXXVI) objaśnia (w przypadku rzeczownika, np. *fajtlapa*) referencję jako odniesienie tego rzeczownika do konkretnej osoby lub rzeczy. W (Blackburn, 2004) znajdują się hasła: *odniesienie* (ang. *referent*) i *odniesienie referencjalne* (ang. *reference*), tam też wspomniana jest kwestia, czy odniesienie może dotyczyć przedmiotów abstrakcyjnych.

Ujmując rzecz oczyma matematyka, widzimy, że stosowane są dwie główne interpretacje: (a) referencja to pojedynczy *desygnat* danej nazwy, tzn. dowolna rzecz (osoba, zjawisko itp.), do której nazwa ta się stosuje; (b) referencja to zbiór desygnatów, czyli *denotacja*, *extensio*, *zakres*, *oznaczanie* (Bocheński, 1992, s. 61; Semadeni, 2002d, s. 165–167).

Na rozbieżności terminologiczne nakłada się różnorodność perspektywy poszczególnych dyscyplin. Filozofowie rozważają m.in. kwestię, czy w odniesieniu referencyjnym można dopuścić również przedmioty abstrakcyjne; wówczas referencją *nazwy* $\sqrt{2}$ jest ta liczba. W kontekście sporu o platonizm pojawia się pytanie, czy owa referencja istnieje i na czym polega związek odniesienia.

ujęciu jest użyciem wyrażenia niezgodnym z jego własną referencją. Metonimia nie powoduje zmiany czy przesunięcia znaczenia wyrażenia, lecz modyfikuje ich referencję, co odróżnia ją od metafory. Odmianą metonimii jest *synekdocha* (*ogarnienie*), polegająca na zastąpieniu wyrażenia o znaczeniu ogólniejszym przez mniej ogólne lub odwrotnie, a zwłaszcza wyrażenia oznaczającego całość przez wyrażenie oznaczające część (*pars pro toto*)²⁴ lub odwrotnie (*totum pro parte*). Metonimia jest odchyleniem modyfikującym strukturę ciągu składniowego. Powstaje ona w wyniku niewypełnienia pozycji syntaktycznej przez wyrażenie semantyczne zgodne z wyrażeniem pozycję tę otwierającym i przesunięcia do niej innego wyrażenia. Następuje pogwałcenie semantycznych reguł selekcyjnych: powstaje wyrażenie złożone, którego składniki są semantycznie niekompatybilne. Metonimia nie tylko nie jest przesunięciem znaczenia, ale nie jest także przesunięciem referencji wyrażenia. Przesunięcie następuje jedynie w płaszczyźnie formalnosyntaktycznej, co w tradycji retorycznej utożsamiano z modyfikacją sensu lub referencji. Metonimia jest jednym ze sposobów (obok elipsy i kondensacji) tworzenia wyrażenia o niepełnym sensie, a więc pozostawiających pewien luz informacyjny, który daje mniejszą lub większą swobodę interpretacji [skrót opisów zamieszczonych w encyklopedii (Polański, 1993, s. 330–331 i s. 532)].

Bauersfeld i Zawadowski (1987) podkreślili najważniejszą różnicę między omawianymi tu dwoma pojęciami (której może nie uświadomić sobie osoba czytająca przytoczone powyżej teoretyczne określenia, a nawet przykłady podane w owych publikacjach).

Otóż *metafory są na ogół tworzone świadomie*; zazwyczaj zarówno nadawca komunikatu, jak i odbiorca odczuwają, że tekstu nie należy rozumieć dosłownie²⁵. Metafory są nieraz tworzone z dużym wysiłkiem intelektu (np. w poezji), ale też także — odwrotnie — bywają tworzone w sytuacji, gdy nadawcy brak odpowiednich słów do przekazania swych myśli. Bywają też tworzone wówczas, gdy rozumienie tekstu u odbiorcy musi być dopiero budowane i przenośnia ma mu w tym pomóc, a więc w sytuacji dydaktycznej.

W słynnym zdaniu Galileusza, że wielka księga Wszechświata jest napisana językiem matematyki, a jej alfabetem są trójkąty, koła i inne figury geometryczne — metaforycznie użyte są słowa: „księga” i „alfabet”²⁶.

²⁴ W przykładach 2 i 9 funkcja sinus służy (w rozważanym tam kontekście) jako *pars pro toto* funkcji trygonometrycznych lub funkcji w ogóle.

²⁵ Dotyczy to tzw. *metafor sensu stricto*, zwanych też *metaforami aktualnymi* lub *metaforami żywymi*. Należy od nich odróżnić *metafory genetyczne*, które ongiś powstały jako metafory, ale obecnie nie są metaforami (Polański, 1993, s. 329).

²⁶ Oczywiście matematyki nie da się zredukować do roli języka nauki. Pogląd, że matematyka to jedynie narzędzie innych nauk, nazywa się *instrumentalizmem* lub *instrumentalizmem matematycznym* (por. Wójtowicz, 2003, s. 35).

Natomiast w przypadku *metonimii* nie ma na ogół świadomości ich użycia. Tworzy się je i odbiera zazwyczaj bezwiednie; zarówno mówiący jak słuchający nie są świadomi, że gdyby komunikat rozumieć dosłownie, nie miałby sensu (lub czasem zupełnie inny sens). Następuje *przesunięcie referencji*, tj. użyty symbol lub nazwa odnoszą się do innego obiektu; zarazem na ogół intencja komunikatu jest całkiem jasna jest dla obu osób. Na przykład, student mówi do drugiego: „Pożycz mi Białynickiego” (jest to przesunięcie referencji: autor → książka).

Bauersfeld i Zawadowski podają przykłady sytuacji, w których metonimie okazują się skuteczne dla przekazu jakiejś myśli matematycznej, potwierdzając znany fakt, że nie zawsze precyzyjne sformułowanie ułatwia zrozumienie.

5.2. Pojęcie metafory jest znane ogółowi wykształconych ludzi. Metafory często mają silne zabarwienie emocjonalne, jak np. przy porównaniu kobiety do kwiatu. Metonimie — to raczej domena specjalistów; są emocjonalnie obojętne, niezauważane. We współczesnej dydaktyce matematyki roli metafor poświęca się ogromnie dużo uwagi, metonimiom — stosunkowo niewiele, choć bywają zdradliwe — właśnie przez to, że są bezwiedne.

Terminologia matematyki zawiera liczne ślady wcześniejszego, metaforycznego pochodzenia wielu terminów.

Kiedy logicy zaczęli badać status liter, fakt, że pod taką literę można podstawić co tylko chcemy, mógł zasugerować termin *zmienna*, ale z zastrzeżeniem, że jest to tylko metafora, ponieważ nie ma w tym nic, co naprawdę się zmienia. Była to bardzo sugestywna metafora, jednak — przywłaszczając sobie termin „zmienna”, logicy poszli jeszcze krok dalej w odzieraniu go ze znaczenia: zmienna nie jest nawet nazwą, choćby wielowartościową. Jest tylko „pustym miejscem”, miejscem służącym do przechowywania nazw (Freudenthal, 1985, s. 18).

Owe pierwotne metafory często były związane z ruchem lub z czynnościami, co wskazuje na ruchowe korzenie pojęć matematycznych (zgodnie z teorią Piageta) i na czynnościowe aspekty matematyki (Krygowska, 1977, s. 81–128). Mówimy: „funkcja *rośnie*”, „prosta jest *styczna* do okręgu”, „obrót *przekształca* figurę *A* na *B*”, „ciąg *dąży* do ∞ ”, „liczby zespolone sprzężone *leżą* symetrycznie względem osi rzeczywistej”, „w tej sumie *odpadają* wyrazy zawierające czynnik a_{jk} ”. Również część terminów nie wyróżnionych w powyższych przykładach pochylą czcionką ma podobne źródło. Wystarczy zresztą otworzyć dowolny podręcznik, aby na każdej niemal stronie znaleźć terminy matematyczne, które mają źródło w dawniejszych określeniach metaforycznych, na ogół dziś zapomnianych lub niezauważanych (wywodzących się nieraz z greki lub łaciny). Większość terminów ma wprawdzie jednoznaczne definicje, ale sporo zwrotów spotykanych w publikacjach nie opiera się żadnej definicji, lecz

ma charakter zwyczajowy, utarty, są zrozumiałe jedynie dla osób obytych ze specyfiką języka matematycznego²⁷.

5.3. Wiadomo, że na ogół przy wielokrotnym powtarzaniu tego samego zwrotu człowiek ma naturalną tendencję do pomijania słów będących stałą częścią tego zwrotu, jeśli nie prowadzi to do nieporozumień. Zjawisko to lingwiści nazywają *elipsą* (czyli, używając polskiego synonimu: *wyrzutnią*). Polega ono na opuszczeniu pewnych słów w zdaniu, którego sens pozostaje oczywisty na podstawie kontekstu (przy zastrzeżeniu, że to niewypełnienie opuszczonej pozycji ma miejsce w strukturze zdania nie poddanej żadnym dodatkowym przekształceniom). Chodzi o pominięcie elementu, który występuje w kontekście poprzedzającym (lub w następującym), bądź pominięcie jakiegoś wykładnika treści, które jest oczywiste ze względu na *kontekst sytuacyjny*. Elipsa jest właściwa strukturze powierzchniowej zdania. Pojawia się w zdaniach zależnych od kontekstu, nie pozostawiając żadnego luzu informacyjnego.

Operacją odwrotną, stosowaną przy analizie takich sytuacji, jest *interpolicja*, polegająca na uzupełnieniu tekstu eliptycznego składnikami pominiętymi w wyniku usytuowania zdania w określonym kontekście (Polański, 1993).

Metonimie na ogół są poręczne, ułatwiają zwięzłe komunikowanie się; czasem są lepiej rozumiane niż precyzyjne sformułowanie, pod warunkiem jednak, że odbiorca zna kontekst. Słyszę matematyka mówiącego: „Wybieram się na Banacha” i odbieram to dwustopniowo: najpierw interpretacja zdania eliptycznego: „Wybieram się na ulicę Banacha”, a to z kolei jest skrótem myślowym zdania: „Wybieram się do Instytutu Matematyki Uniwersytetu Warszawskiego, który znajduje się przy ulicy Banacha”. Jednakże — w innej sytuacji — dana osoba mogłaby mieć na myśli IM Uniwersytetu Łódzkiego znajdujący się przy ulicy Banacha w Łodzi. Matematyk, który nie słyszał o tych adresach, w ogóle nie zrozumie sensu zdania „Wybieram się na Banacha”. Należy podkreślić, że w owym zdaniu skrócenie wypowiedzi nie prowadzi do żadnej zmiany pojęć; uczestnicy rozmowy świetnie wiedzą, że „Banach”, „ulica” i „Instytut” to różne obiekty. *Jest to więc zjawisko czysto językowe.*

Kwestia ta nie jest jednak bynajmniej tak jasna w przypadku pojęć matematycznych. Nawiązując do przykładu 1, rozważmy po kolei wyrażenia:

²⁷ W popularnej prezentacji (Lakoff i Johnson, 1988) przyjęta jest bardzo szeroka koncepcja metafory, wychodząca znacznie poza określenia podane powyżej. Szczególnie podkreślona jest tam rola dawnych metafor w naszym myśleniu i w tworzeniu wielu pojęć, takich jak np. „w górę”. Wyróżnili oni *metafory konwencjonalne*, na ogół nie dostrzegane, traktowane jak zwykłe zwroty, nadające strukturę systemowi pojęciowemu właściwemu naszej kulturze, oraz metafory, które powstały jako *wytwór wyobraźni i twórczości*. Owo metaforyczne źródło wielkiej liczby wyrażen językowych, stało się dla tych autorów podstawą kwestionowania m.in. „mitu obiektywności nauki”.

„punkt P , którego współrzędnymi są (x, y) ”, „punkt P o współrzędnych (x, y) ”, „punkt (x, y) ”. Pierwsze dwa są synonimiczne. Trzecie wyrażenie początkowo może być traktowane jako eliptyczna forma drugiego. Gdy staje się konstrukcją trwałą, ma już wyraźny charakter metonimii. Jednakże tak długo, jak długo jest to jedynie forma wypowiedzi osoby świadomej, że P i (x, y) są różnymi obiektami, można mówić jedynie o metonimii, a więc o zjawisku językowym. Natomiast pojawienie się zastąpienia ontycznego, tzn. przejście od (*) do (**) w przykładzie 1 to zmiana pojęciowa.

Nieporozumieniem byłoby wnioskowanie z podanego powyżej opisu, że zastąpienie ontyczne jest wynikiem zjawisk językowych. Źródłem tego zastąpienia jest doświadczenie setek (jeśli nie tysięcy) przejść od P do (x, y) (i odwrotnie) dokonywanych w trakcie najprzeróżniejszych aktywności matematycznych, rozwiązywania zadań oraz refleksja nad nimi. Nawyki językowe w tym przypadku sprzyjają zastąpieniu ontycznemu, ale nie są jej sprawcą. Znanych jest zresztą wiele sytuacji, w których nawyki językowe wpływają hamująco na przejście do nowszych pojęć matematycznych.

Metonimia może prowadzić do nieporozumień, gdy nadawca komunikatu nie jest świadomy przesunięcia referencji, a odbiorca nie spotkał się z takim zastąpieniem. W szczególności tak się zdarza w przypadku pojęć matematycznych, gdy coś zostaje określone myślowym skrótem uniwersyteckim, oczywistym np. dla studentów i niezrozumiałym dla uczniów.

5.4. Typowym przykładem skrótu eliptycznego było ongiś zastąpienie wyrażenia „wielkość²⁸ niewiadoma” przez pojedyncze słowo „niewiadoma”:

(8) „wielkość niewiadoma” $\longrightarrow$ „niewiadoma”

lub „liczba niewiadoma” $\longrightarrow$ „niewiadoma”. Słowa „wielkość”, „liczba” stały się domyślne, ich braku nie zauważa się²⁹. Nastąpiła stopniowa (w rozwoju historycznym) zmiana składniowa i zmiana leksykalna. Słowo „niewiadoma” pojawia się obecnie jako podmiot zdań matematycznych, takich jak: „niewiadoma występuje po obu stronach równania”.

Odwolujemy się tu do funkcji tego słowa w zdaniu, gdyż kryteria morfologiczne zawodzą: choć słowo „niewiadoma” przekształciło się w rzeczownik, odmienia się nadal jak przymiotnik. Zachowany został przy tym rodzaj żeński nawet w zdaniach takich jak „niewiadomą jest tu wektor”, choć samo słowo „wektor” jest rodzaju męskiego³⁰.

²⁸ Por. np. *Les grandeurs inconnues* u Cramera w 1744 r. (Juszkiewicz, 1977, s. 72).

²⁹ Nie dotyczy to szkoły podstawowej, a zwłaszcza nauczania początkowego, gdzie przez długi czas konieczne jest systematyczne używanie pełnych wyrażeń: „liczba niewiadoma”, „linia prosta”. Niestety już w podręcznikach dla III klasy zdarza się wprowadzanie terminu „prosta” od razu jako rzeczownika, bez dodania niezbędnego dla dziecka słowa „linia”.

³⁰ W *Słowniku języka polskiego PWN* hasło „niewiadoma” jest włączone w opis przymiotni-

Analogicznych terminów wywodzących się z pierwotnej elipsy można przytoczyć wiele: [funkcja] pochodna, [wielkość] zmienna, [linia] prosta (w nawiasach kwadratowych podajemy tu *interpolację*, wstawiamy opuszczone słowo). Słowo „prosta”, które początkowo określało pewien typ linii, stało się rzeczownikiem, synonimem wyrażenia „linia prosta”. Rzeczownik „linia” zanikł też w innych terminach geometrycznych takich jak „styczna”, „symetralna”, „dwusieczna”. O tym, czy takie terminy są traktowane jako rzeczowniki, jako przymiotniki czy są traktowane chwiejnie, świadczy ich miejsce w skorowidzu nazw umieszczanych na końcu podręcznika. Na przykład w (Stark, 1951) słowo „styczna” jest samodzielnym hasłem; nie ma go wśród rozmaitych przymiotników towarzyszących hasłu „prosta”. Słowo „potęgowa” nie występuje tam samodzielnie, znajdujemy jedynie hasło „prosta potęgowa” (wynika to zapewne stąd, że pojęcie prostej potęgowej jest rzadziej używane i matematycy nie czuli potrzeby stałego skracania tego wyrażenia). Natomiast słowo „biegunowa” występuje w owym skorowidzu dwukrotnie: raz samodzielnie, drugi raz przy hasle „prosta”.

Powyżej opisane zjawisko opuszczenia rzeczowników w sytuacjach typu (8) przeszło do struktury głębokiej zdania. Straciło swój eliptyczny charakter, na co wskazuje fakt, że wiąże się z trwałą zmianą znaczenia towarzyszącego przymiotnika (w określonym, specyficznym kontekście matematycznym). Wszystko te cechy tego zjawiska razem świadczą, że (8) nie jest metonimią.

Fraz eliptycznych w wypowiedziach matematycznych jest wiele. Rzadziej spotyka się je w podręcznikach, gdyż autorzy starają się pisać pełnymi zdaniami. Pojawiają się w mowie, na wykładzie, np. wyrażenie „funkcja ciągła na $[0, 1]$ ” jest skróconą formą wyrażenia „funkcja ciągła, określona na $[0, 1]$ ” (słowo „na” nie wiąże się tu z określeniem „funkcja z X na Y ”).

5.5. Rozważania z 5.1–5.4 służą jako wstęp do omówienia roli metonimii w powstawaniu zastąpień ontycznych. Chcemy zarazem uwypuklić różnice między tymi pojęciami i podjąć się *próby wytyczenia delikatnej granicy, po której przekroczeniu metonimia przekształca się w zastąpienie ontyczne*.

ka „niewiadomy”, z uwagą: „w użyciu rzeczownikowym”. W *Innym słowniku języka polskiego PWN* „niewiadoma” figuruje jako osobne hasło z informacją: rzeczownik żeński, odmieniany jak przymiotnik. Użycie przymiotnika w funkcji rzeczownika nazywa się *substantywizacją* przymiotnika (Polański, 1993), od łac. *substantivum* — rzeczownik.

Słowo „niewiadoma” przeszło z matematyki do języka potocznego i jest rodzaju żeńskiego nawet w zwrotach takich, jak „wynik głosowania pozostaje niewiadomą”, choć „wynik” jest rodzaju męskiego. Być może ma to związek z tym, że wszystkie trzy słowa: „wielkość”, „ilość” i „liczba” są rodzaju żeńskiego. W języku francuskim słowa „grandeur” i „quantité” są rodzaju żeńskiego, a „nombre” — męskiego; w kontekście potocznym występują dwa rzeczowniki: „inconnu” (męski) i „inconne” (żeński), analogicznie do polskich rzeczowników „chory” i „chora”, w matematyce zaś używa się jedynie żeńskiego rzeczownika „inconne”.

PRZYKŁAD 12. Przeanalizujmy zwrot „prosta $y = 2x + 5$ ” i kolejne etapy zmiany jego sensu, gdy tego typu zdania są wypowiedzane w rozmaitych kontekstach przez długi okres czasu, np. przez studenta. Ograniczamy się do planimetrii.

(I) W początkowej fazie powyższy zwrot jest po prostu skrótem językowym. Wynikiem interpolacji powyższego zdania jest pełne określenie np. „prosta opisana równaniem $y = 2x + 5$ ”, powstałe przez dodanie domyślnych słów „opisana równaniem” (lub np. „przedstawiona równaniem”). W rozwiniętym zdaniu słowa „opisana równaniem” można pominąć, jeśli słuchacz jest wystarczająco zorientowany. Dodajmy, że interpolację należy odróżniać od merytorycznego wyjaśnienia sensu zdania typu „*zbiór punktów (x, y) spełniających to równanie*”. Dyskutowane tu opuszczenie dwóch słów jest więc początkowo zjawiskiem czysto językowym.

(II) W efekcie systematycznego używania opisanej powyżej elipsy pojawia się metonimia. Równanie staje się jakby nazwą tej prostej.

(III) Systematyczne pojawianie się takiej metonimii może (ale nie musi) spowodować również modyfikację pojęć, których dotyczy. Po setkach powtórzeń w myśleniu studenta równanie może stopniowo, niezauważalnie stać się tożsame z geometryczną prostą. Wprawdzie gdy przegląda się polskie podręczniki algebry liniowej i analizy, nie zauważa się, by nastąpiło tu zastąpienie ontyczne, nie pojawia się (zadeklarowana lub ukryta) identyfikacja „prosta to równanie”, w praktyce tak się jednak nieraz mówi i zapewne nieraz tak też się (nie w pełni świadomie) myśli. Język podręczników jest przecież bardziej formalny niż spontaniczne myślenie, podlega też wolniejszym zmianom. Z drugiej strony, podręczniki algebry liniowej w znacznym większym stopniu wykorzystują język podprzestrzeni liniowych i funkcjonałów.

Tak więc wyraźnemu zastąpieniu ontycznemu „punkt $\rightsquigarrow$ para liczb” (opisanemu w przykładzie 1) nie towarzyszy równie wyraźne zastąpienie ontyczne „prosta $\rightsquigarrow$ równanie”, przynajmniej na poziomie standardowych kursów uniwersyteckich. Wyraźnym wyjątkiem jest tradycyjna geometria rzutowa, gdy przedstawiana jest we współrzędnych jednorodnych³¹.

W jakimkolwiek układzie współrzędnych rzutowych na płaszczyźnie każdą prostą można przedstawić równaniem

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \text{ gdzie } \sum_k |u_k| > 0.$$

³¹ Współrzędnymi jednorodnymi punktu (x, y) w $\mathbb{R}^2$ są: $(x, y, 1)$ oraz wszystkie trójki $(\lambda x, \lambda y, \lambda)$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$ i $\lambda \neq 0$. Są to punkty właściwe płaszczyzny rzutowej. W innym ujęciu współrzędnymi jednorodnymi nazywamy stosunki $x:y:1$ (Stark, 1951, s. 170). Punkty postaci $(\lambda x, \lambda y, 0)$ to punkty niewłaściwe, czyli punkty w nieskończoności, odpowiadające stosunkom $x:y:0$. Tych stosunków nie należy interpretować jako ilorazów, lecz jako skrót myślowy, stwierdzenie istnienia niezerowego mnożnika przeprowadzającego jedną trójkę na drugą.

Jeśli w tym równaniu współczynniki u_k zamienimy na liczby proporcjonalne do nich, to otrzymamy tę samą prostą. Równania tego kształtu określają więc odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna między prostymi na płaszczyźnie a stosunkami $u_1:u_2:u_3$. Stosunki te nazywamy *współrzednymi plückerowskimi prostej* (...)

Wobec tego równanie pierwszego stopnia względem współrzędnych prostej

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \text{ gdzie } \sum_k |u_k| > 0,$$

przedstawia zbiór prostych przechodzących przez punkt o współrzędnych $a_1:a_2:a_3$. Dlatego nazywamy je *równaniem punktu* (Stark, 1951, s. 423–424).

Jest to punkt wyjścia *dualizmu* między punktami płaszczyzny rzutowej o współrzędnych jednorodnych (x_1, x_2, x_3) a prostymi rzutowymi o współrzędnych (u_1, u_2, u_3) . Równanie $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ ma postać symetryczną. Spełnienie tego równania znaczy, że punkt (x_1, x_2, x_3) leży na prostej (u_1, u_2, u_3) i prosta (u_1, u_2, u_3) przechodzi przez punkt (x_1, x_2, x_3) . Interpretacja tego równania jako równania prostej bądź jako równania punktu zależy od tego, które z liczb x_1, x_2, x_3 i liczb u_1, u_2, u_3 uważa się za stałe, a które za zmienne. Dzięki tej symetrii każdemu twierdzeniu geometrii rzutowej można przypisać *twierdzenie dualne*, zastępując słowo „punkt” przez słowo „prosta” i odwrotnie, słowo „prosta” przez słowo „punkt”, oraz dokonując niezbędnych adiustacji stylistycznych.

Cały powyższy wywód ma tu jeden cel: pokazanie kontekstu, w którym Stark (1951, s. 432) i Borsuk (1964, s. 281–293) *explicite* używali zwrotu „prosta (u_1, u_2, u_3) ”, naturalnie u nich brzmiącego. Tak więc zastąpienie ontyczne $\langle \text{prosta rzutowa} \rangle \rightsquigarrow \langle \text{ciąg } (u_1, u_2, u_3) \rangle$ jest potencjalnie możliwe.

5.6. Podsumowując powyższe wywody, można stwierdzić, że *podstawowe rozróżnienie między metonimią a zastąpieniem ontycznym dotyczy tego, czy wyrażenie typu „prosta $y = 2x + 5$ ” jest uważane przez nadawcę (bądź odbiorcę) komunikatu za jedynie skrót pełniejszego wyrażenia (wówczas jest to elipsa lub metonimia, a więc zjawisko językowe), czy też jest skłonny identyfikować prostą z jej równaniem i wtedy mamy zastąpienie ontyczne, a więc zjawisko dotyczące pojęć, a nie tylko sposobu ich werbalizowania.*

6. Przesunięcia redukcjonistyczne i zmiana znaczenia. Kwestie dotyczące redukcjonizmu w matematyce były dyskutowane w (Semadeni, 2002b, s. 97–99). Obecnie ujmijmy to z perspektywy zastąpień ontycznych.

Przypomnijmy, że Freudenthal (1991, s. 20) wprowadził (na przykładzie czworościanu) pojęcie *struktur uboższych* i *struktur bogatszych* wyróżnionych w tym samym obiekcie. Ogólnie biorąc, przejście od struktury uboższej X' zidentyfikowanej w obiekcie o nazwie X do struktury bogatszej X'' w obiekcie X

(np. od „zbiór $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych” do „grupa $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych” lub do „pierścień $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych”), a także przejście odwrotne — to zastąpienia ontyczne, na ogół ukryte. Wydobyć ich na powierzchnię i zwerbalizowanie może niepotrzebnie zagmatwać sytuację i ma sens jedynie wtedy, gdy jest to do czegoś wyraźnie potrzebne. Najwłaściwsze jest trzymanie takich zastąpień gdzieś w tle.

6.1. Istotą redukcjonizmu jest dążenie do oparcia całej matematyki lub jakiejś jej części na możliwie małej liczbie pojęć wyjściowych lub na możliwie prostych zasadach ogólnych³². Na przykład idea Kartezjusza pozwoliła na zredukowanie geometrii do algebry. Nicią przewodnią konstrukcji opisanych w 3.1–3.5 było zredukowanie pojęcia liczby zespolonej do pojęcia liczby rzeczywistej, pojęcia liczby rzeczywistej do pojęcia liczby wymiernej itd. aż do liczb naturalnych. Z kolei pojęcie liczby naturalnej, a pośrednio całą klasyczną matematykę usiłowano zredukować do teorii mnogości. Przykłady te pokazują, że jedną z naczelných zasad redukcjonizmu jest *świadome stosowanie zastąpień ontycznych do pojęć teorii będącej przedmiotem takich zabiegów*. Za tendencję redukcjonistyczną można też uznać dążenie do sprowadzenia całej matematyki do teorii aksjomatycznych.

Wszystkie te programy badawcze odegrały bardzo pozytywną, fundamentalną rolę w rozwoju matematyki. Jednakże absolutyzowanie takich redukcji okazało się szkodliwe, zwłaszcza dla nauczania szkolnego.

Szczególną uwagę należy zwrócić na tę postać redukcjonizmu, która przyjmuje formalistyczny postulat *pozbawiania pojęć matematycznych ich znaczenia* i sprowadza je wyłącznie do wąsko interpretowanych definicji. Dobrym tego przykładem jest pojęcie liczby naturalnej, będące syntezą wielu różnych jej aspektów: kardynalnego, porządkowego, miarowego i innych (przegląd literatury z tym związanej można znaleźć w Semadeni, 2004a, s. 151–154). Wszystkie te aspekty należy odrzucić, jeśli się chce otrzymać „czyste”, pozbawione znaczenia pojęcie liczby naturalnej, np. w ramach aksjomatyki Peano. Nasuwa się pytanie, czy można mówić o zastąpieniu ontycznym $n_b \rightsquigarrow n_u$, gdzie nieformalny symbol n_b oznacza liczbę naturalną n wraz z jej aspektami, bogatą w znaczenie, a n_u oznacza tę samą liczbę naturalną n ubogą, pozbawioną znaczenia (rozdzielenie: bogate–ubogie pochodzi od Freudenthala, 1991, s. 20).

6.2. Wróćmy do pojęcia wektora (przykład 8a). Będziemy teraz rozważać wyłącznie wektory związane (umiejscowione). Można rzec, że pojęcie: „wektor”

³² Dydaktycznym odpowiednikiem takich tendencji były usiłowania stworzenia jednolitej koncepcji, na której opierałoby się całe nauczanie rozważanego działu (np. ułamków); przekonanie, że takie eleganckie podejście jest możliwe do zrealizowania, było iluzją (por. 3.4).

ma się tak do pojęcia: „odcinek”, jak „oś liczbowa” do „linii prostej”. W słynnej książce (Courant i Robbins, 1998, s. 109) *wektor to odcinek skierowany*. Stark (1951) pisze, że wektor to odcinek PQ z nadanym zwrotem i że to wymaga podania, który z punktów P, Q uważa się za początek, a który za koniec wektora; podobne określenie znajduje się w encyklopedii (Bryński et al., 1997).

Obiekty: *wektor* i *para punktów* wyznaczają się wzajemnie jednoznacznie, więc wielu autorów je utożsamia (jakkolwiek nie wszyscy, por. przykłady 8a–8b). Choć intuicje geometryczne związane z wektorem nie są identyczne z intuicjami związanymi z parą punktów, zastąpienie pierwszego z tych pojęć drugim redukuje liczbę rozpatrywanych pojęć. Zamiast dwóch mamy jedno. Stanowi to zastąpienie ontyczne $\langle \text{wektor} \rangle \rightsquigarrow \langle \text{para punktów} \rangle$, często pomijane milczeniem. Autorzy ograniczają się do formalnej deklaracji (bez komentarza, bez umotywowania), że wektor to para punktów (niektórzy przywiązują przy tym nadmierną wagę do precyzyjnej definicji wektora, nie zauważając, że w przypadku osi ten sam problem traktują oni jedynie intuicyjnie).

7. Zastąpienia a kwestia platonizmu³³ w matematyce. Nie należy interpretować faktu używania w tej pracy przymiotnika „ontyczny” jako akceptacji jakiegoś określonego stanowiska w kwestii natury i istnienia rozważanych bytów matematycznych. Analizujemy jedynie powszechnie przyjętą praktykę matematyków.

7.1. Przedstawione tu wywody mają sens zarówno w przypadku postawy *platonistycznej*, jak i innej. Można przyjąć, że owe byty są niezmiennie w czasie i istnieją obiektywnie, niezależnie od ludzkiej cywilizacji (bez względu na

³³ Termin *platonizm* w odniesieniu do matematyki wprowadził Bernays (1986); filozofowie używają raczej terminu *realizm*. Bernays omówił pewne tendencje tego typu. „Platonizm” jest terminem wieloznacznym. Ogólnie określa on koncepcje filozoficzne, których wspólną cechą jest to, że postulują jakieś bezczasowe, niezmiennie, niezależne od ludzkiej wiedzy istnienie idealnych obiektów matematycznych. Wiele osób zwracało uwagę, że poglądy tego typu mają ogromny wpływ zarówno na nauczanie matematyki, jak i na badania z dydaktyki matematyki (Sfard, 1998). Specyficznie ujął to Thom (1974b, s. 136): *Matematyk przypisuje sens każdemu zdaniu, co pozwala mu zapomnieć, jakie jest miejsce tego zdania w jakiegokolwiek istniejącej sformalizowanej teorii. Sens nadaje temu zdaniu status ontologiczny, niezależny od jakiegokolwiek formalizacji*. Znaczy to, że *sens* (*meaning*) jest źródłem dla ontologii matematyki. Mac Lane (1986, s. 447) krótko opisał cztery, znacząco różniące się wersje platonizmu (wymienione w Semadeni, 2005, s. 301). Piątą, skrajną wersją jest *platonizm mnogościowy*, zgodnie z którym a) całą matematykę można sprowadzić do teorii mnogości, b) wszystkie zbiory w hierarchii aksjomatycznej teorii Zermelo-Fraenkla istnieją obiektywnie. Mocne argumenty wskazujące na niewłaściwość a) i przykłady kłopotów z b) podał Mac Lane (1981). Argumenty za realizmem mnogościowym przedstawił Wójtowicz (1999), a Wójtowicz (2003) to próba podsumowania sporu realizm-antyrealizm w filozofii matematyki. Kluczowe znaczenie platonizmu dla rozwoju matematyki podkreśla Król (2006), który analizuje też wiele rodzajów platonizmu.

to, czy ktoś je odkrył lub nie). Można jednak równie dobrze przyjąć stanowisko *conceptualistyczne*, uważając, że obiekty matematyki są wyłącznie twory psychiczne i istnieją jedynie w umysłach ludzi (w tym duchu wypowiada się Białynicki-Birula, 2007). Można wreszcie przyjąć stanowisko Quine’a (2000), zwane *zobowiązaniem ontologicznym* lub *zaangażowaniem ontologicznym*, zgodnie z którym fakt użycia kwantyfikatora $\exists$ (lub jakiegoś jego słownego odpowiednika, jak np. w stwierdzeniu: istnieje liczba x taka, że $x^2 = 2$) to wprowadzenie do *ontologii danej teorii* postulatu istnienia danego obiektu (por. Wójtowicz, 1999, s. 22–25).

Analizy prezentowane w tej pracy pokazują, jak trudna jest obrona konsekwentnego platonizmu, jeśli chce się uwzględnić całe bogactwo niuansów rozmaitych potencjalnych bytów w szeroko rozumianej matematyce. Pomyślmy o przykładzie 1 i założmy, że X' oznacza dowolny punkt P na płaszczyźnie, a X'' — odpowiadającą mu parę (x, y) . Czy każdy z trzech obiektów: X' , $X' \sqcup X''$, $X' \& X''$ w (α) , (β) , (γ) (w 2.1) ma mieć osobne, obiektywne istnienie? Pomnożmy to przez liczbę sposobów konstruowania liczb rzeczywistych z liczb naturalnych oraz liczb naturalnych w języku teorii mnogości! Czy obiekty π_{intuic} , π_D i π_C (rozważane w notce 14) istnieją jako trzy różne byty? Czy w tym platońskim świecie istnieje tylko jedna liczba π , czy jest ich wiele, m. in. powyższe trzy?

7.2. W tych samych jednak wywodach platonicy mogą znaleźć argumenty za swoimi racjami, za potwierdzeniem istnienia abstrakcyjnych obiektów matematycznych, nie mających lokalizacji czasoprzestrzennej, nie oddziałujących przyczynowo, niezależnych od świata fizycznego i od działalności poznawczej ludzi. Coż bowiem nadawałoby jedność tylu wariantom pojęć i modeli dotyczących tego samego, ważnego pojęcia (np. liczby rzeczywistej x) i skąd brałaby się pewność, że owe utożsamienia są słuszne, pomimo wszystkich meandrów językowych i definicyjnych, jeśli za tym nie stałby idealny, obiektywny, doskonały byt: „liczba rzeczywista”, których ziemskimi reprezentacjami i modelami zajmują się matematycy?

Przedstawione w tej pracy rozważania nie pozwalają na wyciągnięcie wyraźnych wniosków za lub przeciw platonizmowi w matematyce. Trafniejsze wydaje się wyjaśnienie wspomnianej wyżej jedności pojęciowej w inny sposób: *wszelkie utożsamienie dwóch formalnie różnych obiektów i przekonanie o słuszności tego utożsamienia ma swe oparcie we wspólnej idei głębokiej, której one odpowiadają*.

8. Podsumowanie. Słynny, wielokrotnie cytowany aforyzm: *Matematyka jest sztuką nadawania tej samej nazwy różnym rzeczom* (Poincaré, 1911, s. 20) podkreśla jedną z najważniejszych cech matematyki. Jej siła, jej uniwersalność

biorą się stąd, że jedno i to samo pojęcie może być stosowane w bardzo różnorodnych sytuacjach. Jednakże aforyzm Poincarégo bywa rozumiany w sposób nadmiernie uproszczony, zniekształcający jego sens.

W zbliżonym kontekście Freudenthal podkreślił negatywne strony formalistycznej sztywności myślenia w zastosowaniach pozamatematycznych.

Wrzucanie do jednego worka pojęć różnego pochodzenia, używanie jednej nazwy dla rzeczy, które, pozbawione fałbanek, okazują się niczym się od siebie nie różnić, jest jedną z ważnych właściwości naszej działalności matematycznej. (...) większe ujednolicenie jest pierwszym warunkiem głębszego zrozumienia i ciągłego postępu (...) Matematyczny puryzm — wielce wartościowy w matematyce — jest wymuszonym i niezbyt zadowalającym językiem z chwilą, gdy wychodzimy poza matematykę (Freudenthal, 1985, s. 19–20).

Zastąpienia ontyczne mogą wystąpić zarówno w sytuacjach, w których dystans semantyczny³⁴ między X' and X'' jest znikomy, np. przy przejściu od miejsca zerowego funkcji f (rozumianego jako pojedyncza liczba x_0) do punktu $(x_0, 0)$ przecięcia wykresu tej funkcji z osią x (druga część przykładu 7a), jak i w sytuacjach, w których ten dystans jest bardzo duży, np. w zastąpieniu $P \rightsquigarrow (x, y)$ (przykład 1). Ciekawym zjawiskiem jest to, że niektórzy autorzy bardzo starannie odróżniają np. obiekty $(x_0, 0)$ i x_0 , których dystans semantyczny jest zaniedbywalny, i jednocześnie traktują punkt P za tożsamy z parą (x, y) , chociaż dystans semantyczny między tymi obiektami jest olbrzymi: P należy do geometrycznego continuum (i zarazem do świata *conceptual-embodied* w sensie Talla, 2004), natomiast para (x, y) wywodzi się ze świata wielkości dyskretnych i ich zbiorów (i zarazem ze świata *proceptual-symbolic* w sensie Talla).

W pracy staraliśmy się podkreślić zasadniczą różnicę między podejściem: obiekt X' można utożsamić z obiektem X'' a podejściem: obiekt X' jest identyczny z obiektem X'' (p. 4.1–4.2). Zwracaliśmy zarazem uwagę na lokalny charakter zastąpień ontycznych; dotyczą one na ogół pewnej części matematyki. Trudności dydaktyczne nieraz wynikają z absolutyzowania takiej konstatacji „jest identyczny”, ze zbyt schematycznej, sztywnej interpretacji tego, że $X' = X''$.

Zastąpienia ontyczne są ważną cechą matematyki, źródłem jej siły i skuteczności. Część z nich jest tak spontaniczna i naturalna, że jest niezauważalna, toteż fakt pojawienia się ich w rozwoju historycznym można stwierdzić dopiero z odpowiednio długiej perspektywy. Inne zaś mogą jawić się — zwłaszcza w przypadku rozwoju indywidualnego dziecka — jako coś sztucznego czy nawet jako przeszkoda poznawcza.

³⁴ Metaforycznego określenia „dystans semantyczny” użył Thom (1974a, s. 123).

Wiadomo, że wszelka zmiana sposobu reprezentacji pojęcia matematycznego na ogół sprawia osobom uczącym się poważne trudności. Podobne, a może jeszcze większe trudności mogą sprawiać zastąpienia ontyczne.

Nie należy jednak przywiązywać nadmiernej wagi do kwestii tych zastąpień. Nieunikniona w matematyce jest wieloznaczność pewnych terminów i symboli. Gdyby było to źródłem rzeczywistych trudności, wprowadzono by nieodzowne zmiany. Dzięki takim zastąpieniom pojęcia i twierdzenia mogą być elastycznie stosowane w różnorodnych kontekstach. Trzeba tylko zrewidować *mit*, że w matematyce wszystko da się określić jednoznacznie i precyzyjnie, czego — szczególnie w odniesieniu do materiału szkolnego — domaga się wiele osób.

Nie wynika stąd bynajmniej jakaś zawodność czy niepewność matematyki. Znaczy to tylko tyle, że jej obraz jest bardziej zawikłany, niż to, co prezentowali ongiś reformatorzy nauczania szkolnego i co silnie tkwi w świadomości wielu nauczycieli akademickich. Sztywne formalizmy nie usuwają trudności, nieraz piętrzą nowe. Jedynie należyte rozumienie właściwego *sensu* pojęć i operacji matematycznych pozwala na swobodne ich stosowanie pomimo niejednoznaczności i ujawniających się zastąpień ontycznych (a może właśnie dzięki nim).

Literatura*

A d u s z k i e w i c z, A. (red.): 2004, *Słownik filozofii*, Świat Książki, Warszawa.

A p o s t o l, T. M.: 1957, *Mathematical Analysis. A Modern Approach to Advanced Calculus*, Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Massachusetts.

B a n a c h, S. 1949 [1938], *Mechanika w zakresie szkół akademickich*, wyd. III, Czytelnik, Warszawa.

B a ń k o, M. (r e d.): 2000, *Inny słownik języka polskiego*, PWN, Warszawa.

B a u e r s f e l d, H., Z a w a d o w s k i, W.: 1987 [1981] Metafory i metonimie w nauczaniu matematyki, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **8**, 155–186.

B e r n a y s, P.: 1986 [1935], O platonizmie w matematyce, w: Murawski, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Wydawnictwo Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań, s. 309–322.

B i a ł y n i c k i – B i r u l a, A.: 1976, *Algebra liniowa z geometrią*, PWN, Warszawa.

B i a ł y n i c k i – B i r u l a, A.: 2007, Po co matematykowi nieskończoność? *Delta*, 5/2007. 10–11.

*W nawiasie [] podajemy rok ukazania się oryginalnej wersji.

- B i r k h o f f, G., M a c L a n e S.: (1963) [1954] *Przegląd algebry współczesnej*, wyd. II, PWN, Warszawa.
- B l a c k b u r n, S.: 2004 [1994], *Oksfordski słownik filozoficzny* (przekład pod redakcją J. Woleńskiego), Wyd. II, Książka i Wiedza, Warszawa.
- B o c h e ń s k i, J. M.: 1992 [1954/1989], *Współczesne metody myślenia*, W drodze, Poznań.
- B o r s u k, K.: 1964 [1950], *Geometria analityczna wielowymiarowa*, wyd. II, PWN, Warszawa.
- B ö t t c h e r, Ł.: 1911, *Zasady algebry elementarnej. Podręcznik i zbiór zadań dla szkół, opracowany według najnowszych wymagań pedagogicznych*, Wydawnictwo M. Arcta, Warszawa.
- B r y ń s k i, M. et al. (red.): 1997, *Encyklopedia szkolna. Matematyka*, wyd. III, WSiP, Warszawa.
- B u g a j s k a - J a s z c z o ł t, B., D r y g a ł a, D.: 2006, Jak uczyliśmy przyszłych nauczycieli algebry liniowej, w: M. Czajkowska i G. Treliński (red.), *Kształcenie matematyczne — tendencje, badania, propozycje dydaktyczne*, Wydawnictwo Akademii Świętokrzyskiej, Kielce, str. 153–169.
- C o u r a n t, R., R o b b i n s, H.: 1998 [1941], *Co to jest matematyka?*, Prószyński i S-ka, Warszawa.
- F i c h t e n h o l z, G. M.: 1978 [1948], *Rachunek różniczkowy i całkowy*, tom I, PWN, Warszawa.
- F r e u d e n t h a l, H.: 1985, Niejawna filozofia historii i dydaktyki matematyki, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **5** (1985), s. 7–25.
- F r e u d e n t h a l, H.: 1991, *Revisiting Mathematical Education. China lectures*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- G l e a s o n, J. B., R a t n e r, N. B. (red.): 2005 [1998], *Psycholingwistyka*, Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne, Gdańsk.
- G ö d e l, K.: 1940, *The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory*, Princeton.
- G r a y, E. M., T a l l, D. O.: 1994, Duality, ambiguity, and flexibility: A “proceptual” view of simple arithmetic, *Journal for Research in Mathematics Education* **25**, no. 2, 116–140.
- H a r t m a n, J. (red.): 2004, *Słownik filozofii*, Wydawnictwo Zielona Sowa, Kraków.
- H a u s d o r f f, F.: 1914, *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit, Leipzig.
- J u s z k i e w i c z, A. P. (red.): 1975 [1970], 1976 [1970], 1977 [1972], *Historia matematyki*, tomy 1–3, PWN, Warszawa.
- K r ó ł, Z.: 2006, *Platonizm matematyczny i hermeneutyka*, Wydawnictwo Instytutu Filozofii i Socjologii PAN, Warszawa.

- K r y g o w s k a, Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki*, część 1, WSiP, Warszawa.
- K r y g o w s k a, Z., M a r o s z k o w a, J.: 1974, *Geometria dla klasy I liceum ogólnokształcącego*, wyd. VIII, WSiP, Warszawa.
- K u r a t o w s k i, K., M o s t o w s k i, A.: 1952, *Teoria mnogości*, Monografie Matematyczne, PTM, Warszawa.
- L a k o f f, G., J o h n s o n, M.: 1988 [1980], *Metafory w naszym życiu*, Państwowy Instytut Wydawniczy, Warszawa.
- L a n d a u, E.: 1930, *Grundlagen der Analysis*, Lipsk.
- L a n g, S.: 1984, *Algebra*, wyd. II, PWN, Warszawa.
- L u b o m i r s k i, A.: 1983, *O uogólnianiu w matematyce*, Ossolineum, Wrocław.
- M a c L a n e, S.: 1950, Duality for groups, *Bulletin of the American Mathematical Society* **56**, 485–516.
- M a c L a n e, S.: 1986, *Mathematics. Form and Function*, Springer-Verlag, New York.
- M o s t o w s k i, A.: 1948, *Logika matematyczna*, Monografie Matematyczne, Warszawa.
- M o s t o w s k i, A., S t a r k, M.: 1953, *Algebra wyższa*, część I, PWN, Warszawa.
- M u r a w s k i, R.: 2001, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, wyd. II, PWN, Warszawa.
- M u s i e l a k, H., M u s i e l a k, J.: 1993, *Analiza Matematyczna*, tom I, część 1 i tom I, część 2, Wydawnictwo Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań.
- P a u t z, A.: (2007) An argument against Fregean that-clause semantics, *Philosophical Studies*, Springer, w druku.
- P i a g e t, J., G a r c i a, R.: 1989 [1983], *Psychogenesis and the History of Science*, Columbia University Press, New York.
- P o i n c a r é, H.: 1911 [1908], *Nauka i Metoda*, Warszawa 1911.
- P o l a ń s k i, K. (red.): 1993, *Encyklopedia językoznawstwa ogólnego*, Ossolineum, Wrocław.
- Q u i n e, W. v. O.: 1999 [1960], *Słowo i przedmiot*, Aletheia, Warszawa.
- Q u i n e, W. v. O.: 2000 [1953/1961], *Z punktu widzenia logiki*, Aletheia, Warszawa.
- R u d i n, W.: 1982 [1953], *Podstawy analizy matematycznej*, wyd. III, PWN, Warszawa.
- S e m a d e n i, Z.: 2002a, Trojaka natura matematyki: idee głębokie, formy powierzchniowe, modele formalne, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **24**, 41–92.

- S e m a d e n i, Z.: 2002b, Utożsamianie pojęć, redukcjonizm i równość w matematyce, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **24**, 93–117.
- S e m a d e n i, Z.: 2002c, Trudności epistemologiczne związane z pojęciami: pary uporządkowanej i funkcji, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **24**, 119–144.
- S e m a d e n i, Z.: 2002d, Rola znaczenia w rozumowaniach matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **24**, 145–174.
- S e m a d e n i, Z.: 2004a, Aspekty znaczeniowe i aspekty strukturalne pojęć matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **27**, 151–168.
- S e m a d e n i, Z.: 2004b, Stany i działania na stanach jako aspekty znaczeniowe pojęć matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **27**, 169–192.
- S e m a d e n i, Z.: 2005, O zasadzie właściwego ukierunkowania (rozwiniecie myśli Zofii Krygowskiej), *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **28**, 155–184.
- S i e r p i ń s k i, W.: 1948 [1916], *Działania nieskończone*, wyd. III, część I, Czytelnik, Warszawa.
- S i e r p i ń s k i, W.: 1951, *Zasady algebry wyższej*, Warszawa.
- S t a r k, M.: 1951, *Geometria analityczna*, Monografie Matematyczne, Warszawa.
- T h o m, R.: 1974a [1972], Matematyka „nowoczesna”: pomyłka pedagogiczna i filozoficzna?, *Wiadomości Matematyczne* **18**, 113–129.
- T h o m, R.: 1974b [1973], Modern mathematics: does it exist? w: *Proceedings of the Second Congress on Mathematics Education*, University Press, Cambridge, 1973, s. 194–209. Przekład polski: Czy istnieje matematyka nowoczesna?, *Wiadomości Matematyczne* **18** (1974), 130–142.
- T a l l, D. O.: 2004, Introducing three worlds of mathematics, *For the Learning of Mathematics* **23** (3), 29–33.
- V i n n e r, S.: 1975, The naive platonic approach as a teaching strategy in arithmetics, *Educational Studies in Mathematics*, **1**, 339–350.
- W ó j t o w i c z, K.: 1999, *Realizm mnogościowy. W obronie realistycznej interpretacji matematyki*, Wydział Filozofii i Socjologii Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa.
- W ó j t o w i c z, K.: *Spór o istnienie w matematyce*, Wydawnictwo Semper, Warszawa, 2003.

Replacing objects of mathematics by other objects with the same name

S u m m a r y

The purpose of the paper is to introduce and analyse the following conception: by an *ontic shift* $X' \rightsquigarrow X''$ we mean an (explicit or hidden) replacement of a mathematical object X' called X by a different object X'' which is also called X and is to play the role of X' . If X' and X'' are sets, then $X' \neq X''$ means that these sets are different in the usual sense. Otherwise X' and X'' may stand for basic concepts of mathematics such as, e.g., point, straight line, natural number, addition of natural numbers, (standard) real number, set, ordered pair, and then $X' \neq X''$ is interpreted in terms of the Leibniz principle of indiscernibility.

Several examples from secondary and college mathematics are discussed starting with the ontic shift $P \rightsquigarrow (x, y)$, where a point P of the plane is replaced by a pair (x, y) of real numbers, also called a point; an angle φ (thought of as a geometric figure) is replaced by its measure which is also denoted by φ ; a number (natural, integer, etc.) is replaced by a sophisticated set; a real number a is replaced by the complex number $(a, 0)$, and so on.

We distinguish three types of ontic shifts: (α) object X' is replaced by X'' , and X' is discarded; (β) object X' is replaced by a conglomerate $X' \sqcup X''$ of two alternatively and flexibly used objects X' and X'' ; (γ) object X' is replaced by a new object which is a mental synthesis $X' \& X''$ integrating features of X' and X'' .

What is crucial in ontic shifts is the change of approach: X' *may be identified with* X'' by declaring that: X' *is the same as* X'' . For example, “a function may be identified with a set of pairs” is replaced by “a function is the same as its graph”, i.e., a function becomes a set of pairs. In turn, a set of pairs of real numbers may be identified with a geometric figure. If such ontic shifts were composed, a function such as, say, $x \mapsto \sin x$ would be the same as a geometric figure.

Such arguments show that ontic shifts are often local in the sense that they apply only to a certain part of mathematics and composition of two identifications may be unacceptable. A point in $\mathbb{R}^3$ may be replaced by the corresponding vector and one may say: “A point is the same as a vector”. Also a vector may be replaced by the corresponding translation and then we may say that “A vector is the same as a translation”. This identification, however, is not transitive. To see that the statement “point is the same as translation” is unacceptable imagine a student who is asked “How do we define a translation of 3D-space?” and answers: “A translation is an arbitrary point of the space”.

The paper also deals with distinguishing between ontic shifts and metonymies and with the delicate border between two phenomena: (a) a change of the linguistic form, and (b) replacing one mathematical object by another.

Although labelling different objects with the same name does not fit the stereotypical image of mathematics, ontic shifts are its significant feature. They should be used in an elastic way, with proper understanding of the concepts involved. However, if such shifts are introduced prematurely, they cause serious didactical troubles.

**Konkurs im. Anny Zofii Krygowskiej
na najlepszą pracę studencką z dziedziny
dydaktyki matematyki**

Celem konkursu jest budzenie zapałów naukowych i ożywianie pracy naukowej w dziedzinie dydaktyki matematyki. Konkurs organizowany jest pod patronatem Polskiego Towarzystwa Matematycznego od roku 1990.

Regulamin konkursu:

1. Organizatorem konkursu jest Redakcja V Serii Roczników PTM *Dydaktyka Matematyki*.
2. Uczestnikiem konkursu może być
 - każdy student polskiej uczelni wyższej (lub kolegium nauczycielskiego), który w dniu złożenia pracy konkursowej nie miał ukończonych studiów wyższych;
 - każdy absolwent polskiej uczelni wyższej (lub kolegium nauczycielskiego), przedkładający na konkurs swą pracę magisterską (dyplomową) w terminie nie dłuższym niż 12 miesięcy od dnia uzyskania tytułu magistra (licencjata).
3. Przedmiotem konkursu są prace z dydaktyki matematyki, a także prace z innych dziedzin o istotnym znaczeniu dla dydaktyki matematyki.
4. Prace w dwóch egzemplarzach maszynopisu, opatrzone imieniem i nazwiskiem autora oraz nazwą uczelni, w której studiuje lub w której uzyskał tytuł zawodowy, należy kierować do Redakcji *Dydaktyki Matematyki* (WSP, 30-084 Kraków) do dnia 15 września każdego roku. Do pracy należy dołączyć zaświadczenie dziekana, potwierdzające fakty, o których mowa w punkcie 2, oraz oświadczenie autora pracy o zgłoszeniu jej na konkurs. W oświadczeniu należy też podać **adres, umożliwiający Jury skontaktowanie się z autorem po rozstrzygnięciu konkursu.**
5. Nagrody przyznaje Jury Konkursu, powoływane przez Komitet Redakcyjny *Dydaktyki Matematyki* na okres dwuletni. Jury może opierać się na opiniach zaproszonych do współpracy specjalistów.
6. Jury może zaprosić autora złożonej pracy do wygłoszenia 30-minutowego referatu na jej temat i udziału w dyskusji.
7. Jury przyznaje nagrody ufundowane przez PTM oraz przez stowarzyszenia naukowe, instytucje i osoby prywatne.