ANNALES OF THE POLISH MATHEMATICAL SOCIETY
5TH SERIES: DIDACTICA MATHEMATICAE 30 (2007)

CONFERENCES

Wacław Zawadowski
Warszawa

Wspólna sesja American Mathematical Society i Polskiego Towarzystwa Matematycznego na temat edukacji matematycznej
Warszawa, 31 lipca – 2 sierpnia, 2007

W czasie sesji mieli swoje wystąpienia w formie wykładów: Zbigniew Semadeni, Jeremy Kilpatrick, Gerald Goldin, Anna Sierpińska, Milan Hejny, William McCallum, Zbigniew Marciniak, Stefan Turnau, i Maciej Klakla. Omówię niektóre punkty z tych wystąpień. Te, które mi się wydają bardzo trafne i szczególnie warte podkreślenia.

Dwie społeczności i spór między nimi

Jeremy Kilpatrick wymienił w formie pytań trzy sprawy, które ciągle budzą kontrowersje i spory w Ameryce i dzielą z jednej strony społeczność matematyków, a z drugiej strony społeczność dydaktyków matematyki oraz nauczycieli matematyki. Są to:

1 Jakich algorytmów arytmetycznych należy uczyć w szkole i w jaki sposób?

(What arithmetic algorithms should be taught in school and how?)

2 Jaka powinna być rola kalkulatorów w matematyce szkolnej?

(What should be the role of calculators in school mathematics?)

3 Jaka powinna być rola nawiązywania do realnego środowiska w matematyce szkolnej?

(What should the role of real world context be in school mathematics?)

i postawił następne dwa pytania, związane z tymi trzema powyżej:

4 Jakie inne sprawy dzielą społeczność zainteresowaną szkolna matematyką?

(What other issues divide the community concerned with school mathematics?)

5 Jaka jest rola badań w godzeniu różnych stanowisk w tych sprawach?

(What is the role of research in dealing with these issues?)

(Uważam, że również w naszym kraju te pytania budzą kontrowersje, chociaż może nie było to tak u nas wyraźnie sformułowane. Mogę natomiast odpowiedzieć od razu, z mojej strony, na pytanie piąte. W naszym kraju nikt nie powołuje się na badania w takich dyskusjach. Jak to często bywa, górę biorą opinie tych, co mają władzę i wpływ na decydentów.)

Ale wróćmy do głównego wątku prezentacji Kilpatricka.

W czasach **Nowej Matematyki** w latach sześćdziesiątych ubiegłego stulecia motorem zmian były środowiska matematyczne w uniwersytetach. Przy początkowym entuzjazmie protestowały wtedy środowiska nauczycieli i rodziców oraz niektórzy matematycy. Nacisk był na pojęcia i obiekty abstrakcyjne oraz struktury w sensie bourbakistowskim, prezentowane w sposób formalny, z logiczną ścisłością.

W czasach **Standardów** w Ameryce, w późnych latach osiemdziesiątych ubiegłego stulecia, motorem było środowisko nauczycieli matematyki zrzeszonych w NCTM (National Council of Teachers of Mathematics, czyli Amerykańskie Stowarzyszenie Nauczycieli Matematyki).

Te standardy amerykańskie, o których się mówiło krótko „standardy”, to dość szczegółowo opisane **wzorce dobrej praktyki** i wynikające z tego zalecenia. Nacisk był położony na pobudzanie inicjatywy uczniów i ich czynnej postawy wobec matematyki, budowanie znaczeń, rozwiązywanie problemów i działania o charakterze badań. Wymienione były rzeczy, na które trzeba kłaść mniejszy nacisk, i te, które trzeba rozwijać staranniej. Protestowali matematycy, rodzice, niektórzy nauczyciele i politycy. Z biegiem czasu te potyczki nazwano „Math wars” czyli matematyczne wojny.

I w jednym i drugim przypadku był początkowy entuzjazm, a potem podnosiły się głosy protestu. Ale przyczyny tych protestów były różne. Ważną rolę grała i nadal gra rywalizacja tych dwóch środowisk o „rząd dusz”. Ta rywalizacja wzmocniona jest inną wizją matematyki w obu środowiskach. Matematycy, którzy kochają swoją dyscyplinę, rozumieją jej subtelności i jej znaczenie dla kultury, nie lubią wulgaryzacji i uproszczeń. Lubią też, gdy od czasu do czasu ktoś ich podziwia, co przyjmują jako hołd dla tej sztuki i nauki, niekoniecznie osobisty. I należy im się to. Z drugiej strony nauczyciele i ci, co kształcą nauczycieli, dobrze widzą, że do władania tą sztuką dochodzi się powoli, przez wiele etapów pośrednich i widzą, jak wielu ludzi odpada na tych etapach. Szkolna nauka matematyki to nie tylko proces równomiernego rozwoju, droga do celu wzdłuż jasno wytyczonej mapy drogowej. To raczej dzisiaj przypomina sztafetę, gdzie każdy następny etap zależy od podania z poprzedniego. Niestety, często to podanie zawodzi, wielu gubi się i bieg traci sens. Na każdym z tych etapów matematyka to język wizualny, który ma swoje zalety i daje pewną moc temu, kto nim włada, ale ma też swoje ograniczenia, których często zaawansowani w sztuce matematycy nie dostrzegają.

Jednak zdanie matematyków, szczególnie tych, co życzliwie interesują się szkolną matematyką, jest ważne. Szczególnie ważne byłoby ich zdanie o początkach drogi edukacyjnej w matematyce, na której stawiają pierwsze kroki wszystkie dzieci. Tam właśnie tworzy się i utrwala obraz matematyki na całe życie. Wiemy, że ten obraz zbyt często jest zniechęcający. Co zrobić, aby to zmienić? Potrzebna jest do tego niejedna dobra głowa, pewien szacunek dla sztuki nauczania i zrozumienie systemowych mechanizmów powstawania tych niepowodzeń.

Moje spostrzeżenie jest takie**: gdy różnice zdań są daleko posunięte, to dyskusje przeważnie prowadzą do umacniania się podziałów**. Co robić, jeżeli jest dobra wola z obu stron? Lepiej **przerwać dyskusje** a zacząć **wspólnie działać**.

W Polsce pierwsze wieści o standardach amerykańskich były rozpowszechniane już w pierwszych latach powołania do życia Stowarzyszenia Nauczycieli Matematyki. Pamiętam, jak na spotkaniu SNM obok mostu Dębnickiego w Krakowie niektórzy przeglądali pierwsze wersje tych standardów i zaglądali do słownika angielskiego i słownika wyrazów obcych, aby sprawdzić co słowo „standard” znaczy. To były wzorce dobrej praktyki w nauczaniu matematyki, gromadzone przez wiele lat przez zaangażowanych nauczycieli i nauczycieli nauczycieli. Opisane, skatalogowane według tematów, wieku uczniów i stylu nauczania. Dla wielu to opasłe tomisko wydawało się przegadane i przez to trudno dostępne, a jeszcze do tego w obcym języku. Pamiętam, że mieliśmy wtedy dwie wersje standardów: angielską od Amerykanów i świeżo przetłumaczoną potugalską, od kolegów nauczycieli matematyki z Portugalii. Wprawdzie pokazały się potem w NiMie, kwartalniku SNM, krótkie omówienia tych wzorców, ale wielu decydentom nie trafiło to do przekonania. Standardami zaczęli nazywać to, z czym mieli do czynienia przez wiele lat. Zaczęli sprowadzać standardy do listy tematów. I tak zaczęło się w Polsce to **wielkie nieporozumienie**, pomieszanie pojęć, które trwa do dziś.

Opis wzorców dobrej praktyki zawsze może być trochę poprawiony, a z biegiem czasu pewne wzorce trzeba uznać za nieodpowiednie. Wtedy zaczynają się spory. To jest nieuniknione, bo system edukacji musi ewoluować, uaktualniać swoje kanony postępowania, ze względu na zmiany w komunikacji, przetwarzaniu informacji, w dostępie do informacji, krótko mówiąc, w technologii informacyjnej. Wtedy właśnie potrzebne są wzorce dobrej praktyki w nauczaniu, które siłą rzeczy też muszą ewoluwać.

Co innego z listą tematów. Ta może trwać w nieskończoność. Każdy bowiem podkłada pod słowa swoje własne interpretacje. Kłopoty mogą się zacząć, gdy przyjdzie do testów i egzaminów. Wtedy lista tematów nie określa dobrze zakresu pojęć, ich wyrafinowania, poziomu trudnosci zadań, poziomu biegłości w ich używaniu. Tu pomocą mogą być wzorce, przykłady paradygmatyczne. Ale listę tematów podać jest łatwo, wzorce dobrej praktyki opracować trudno, a wzorce egzaminacyjne jeszcze trudniej. Sprawa się wiąże wtedy z jeszcze większą odpowiedzialnością za słowa.

Na przykład temat „ułamek" może pojawić się na każdym szczeblu nauczania i będzie to zawsze to samo słowo. Ale znaczenie będzie inne i inna realizacja tego tematu i inne konsekwencje w zależności od szczebla nauczania i innych okoliczności, co każdy nauczyciel dobrze rozumie, bo temat klasyczny. Formalna definicja ułamka nie budzi kontrowesji i każdy wie, że nie trzeba jej dawać za wcześnie. Gdy jednak mamy anonsować egzamin i nie podamy przykładów, to taki egzamin będzie albo trywialny, albo narażamy się na duże nieporozumienia. Egzamin stanie się loterią nawet wtedy, gdy ktoś się uczciwie do niego przygotuje. I to źle, i to niedobrze. Bez podania nowych dobrych wzorców nauczania o ułamkach i tego, co i kiedy będziemy sprawdzać na egzaminach, nie wyjdziemy z tego dołka.

Właśnie na przykładzie ułamka Kilpatrick podał przykład, że matematykowi wystarczy jedno zdanie do opisu istoty sprawy, a dla tego, kto ma do czynienia z konkretnymi uczniami w konkretnej sytuacji, takie ujęcie nie wskazuje sposobu postępowania.

Ciekawy był wynik pertraktacji między matematykami akademickimi, jak to nazwał Kilpatrick, a nauczycielami i edukatorami (mathematics educators, czyli po polsku dydaktykami matematyki, tj. tymi, co badają nauczanie matematyki i uczą, jak jej uczyć). O ile wiem, bo śledzę to, co się dzieje na scenie amerykańskiej, matematycy parli, aby standardy zamienić na listę tematów, a dydaktycy matematyki i nauczyciele praktycy starali się zachować przynajmniej część wzorców (czyli standardów). W rezultacie powstało coś, co nazwano „**Focal Points**" w nadziei, że pozwoli to się skupić na wybranych metodach i tematach i uniknąć tego, co było do tej pory z matematyką szkolną: rozdrobnienia. Mówiono, że matematyka szkolna w Ameryce jest „mile wide, inch deep" (szeroka na kilometry, a płytka na milimetry). Mówiono też, że jest rozmyta (fuzzy math). Dla mnie te Focal Points (Punkty Skupienia) mają podstawową wadę. Nie to, że zrezygnowano z wielu dobrych przykładów, bo standardy nadal są i można z nich korzystać, gdy kto chce. Podstawową wadą tych Punktów Skupienia jest to, że nie ma tam żadnej wzmianki o kalkulatorach. Według mnie to jest gorzej niż błąd. To kurza ślepota.

W pewnym momencie wystąpienia Kilpatricka pojawiło się hasło, które, jak napomknął, pochodziło od pewnego matematyka:

Ułamek to jest punkt na osi liczbowej

Ta metafora (A fraction is a point on the number line) wyraża bardzo ważną myśl: podstawowy związek arytmetyki z geometrią. Ten związek powinien być dzisiaj w nauczaniu matematyki podkreślany od początku. Liczby są na osi liczbowej, liczby „mieszkają" na osi liczbowej. Wartości ułamków - to są liczby. Więc ułamki są na osi liczbowej. Zajmujemy się nie tylko pojedyńczymi ułamkami i pojedyńczymi liczbami, ale patrzymy na wszystkie ułamki i na cały zbiór liczb, które są w naszym polu uwagi i widzimy miejsce pojedyńczej liczby w tym polu. Tym polem od samego początku nauki o liczbach powinna być oś liczbowa. Ale od czego zaczynać? Rozsądek wskazuje, że zaczynać od „ułamków dziesiętnych", czyli po prostu liczb dziesiętnych. Czy jesteśmy na to przygotowani?

Ten sposób traktowania liczb jest nowy. Ale jest ważny, bowiem ustanawia bardzo ważną semantykę dla liczb. Ta semantyka, niektórzy mówią ta metaforyka, jeszcze inni te głębokie zakotwiczenia znaczeń, trzeba budować od początku nauki o liczbach. Dla bardzo wielu ludzi to, od czego zaczynamy, zwykle utrwala się na całe życie i trudno jest to zmienić. Trwałość efektu przywiązywania się do wspomnienia pierwszego kontaktu z sytuacją i obiektem przypomina zjawisko **wdrukowania** (imprint) u ptaków.

Gdy nie było powszechnie dostępnych kalkulatorów czterodziałaniowych, wtedy nie było innej metody zapoznania się z działaniami na liczbach, jak tylko poprzez wyuczenie się algorytmów. Powszechnie dzisiaj znanych algorytmów pisemnego wykonywania działań na liczbach dziesiętnych i na ułamkach. To była i ciągle jest trudna sztuka. Wielu ludzi musiało się tego uczyć na pamięć bez zrozumienia całej „mapy drogowej", wyjaśniającej, do czego ta droga, po której się idzie, prowadzi. Bez wyjaśnienia, co trzeba osiągnąć.

Dzisiaj za pomocą kalkulatora możemy ukazać stosunkowo łatwo ten cel. Ten cel to struktura addytywna i struktura multyplikatywna liczb położonych na osi liczbowej. To powinno być opanowane wizualnie, ze stopniowym ukazywaniem szczegółów. Wprawa w posługiwaniu się kalkulatorem i ocenianiu sensowności wyniku jest równie ważna dzisiaj, jak pewna wprawa w radzeniu sobie z liczbami bez kalkulatora. Ale znaczenie mechanicznego wykonywania algorytmów dzielenia na dużych liczbach z bezbłędną biegłością i „z zamiłowaniem" nie ma dzisiaj już większego znaczenia. Ma natomiast sens **rozumienie** tych algorytmów. Również rozumienie algorytmów wykonywanych z kalkulatorem. Dużą rolę gra pewien porządek i pewna dyscyplina w zapisywaniu wykonywanych czynności z użyciem kalkulatora. Niestety, tego w szkole nikt nie uczy i myślę, że wielu ludzi to lekceważy, bo prostu tego nie potrafi. Dlatego tak wściekle przeciwstawiają się każdej próbie szerszego użycia kalkulatorów w szkole. Jest to znane zjawisko „Lisa w winnicy", znane od starożytności[1].

Tak jak w XVII wieku, gdy ludzie światli, tacy jak Samuel Pepys (Dziennik, 4 lipca, 1662) uczyli się z zapałem pisemnego wykonywania czterech działań, tak dzisiaj młodzi ludzie powinni się zapoznać ze strukturą osi liczbowej wizualnie, poznając najpierw sieć liczb dziesiętnych na osi, całkowitych i ułamkowych, coraz gęściej pokrywającą całą liczbową oś, pozostawiając odkrywanie luk w tej sieci na trochę później. Wtedy położenie ułamka na osi liczbowej łatwo może być wskazane za pomocą kalkulatora. Podziel licznik przez mianownik i będziesz wiedział, gdzie to jest, gdzie jest ten punkt na osi liczbowej, który wskazuje ułamek. Tu potrzebne jest tempo, **szkoda czasu na gołoręczne algorytmy.** Wytracanie czasu w szkole jest zjawiskiem nagminnym.

Powinniśmy tak uczyć algorytmów z użyciem kalkulatora, aby uczniowie poznali dobrze strukturę addytywną osi liczbowej i również strukturę mutyplikatywną. Struktury addytywnej uczymy dzisiaj w szkole stosunkowo nieźle. Ale dla struktury mutyplikatywnej brakuje nam już pary w płucach. Brakuje nam na to czasu i albo opuszczamy albo partaczymy ten temat. Mając do dyspozycji tylko gołoręczną arytmetykę, rzeczywiście nie mamy na to dobrego sposobu. Ale ten elektroniczny przyrząd może być bardzo pomocny, nie tylko w rozpoznawaniu struktury mutyplikatywnej liczb, ale może nam podsunąć, w jaki sposób to osiągnąć przeplatając poważne prace z zabawą z liczbami, z dostosowaniem się do możliwości dzieci i młodzieży.

Musimy rozszerzyć naszą znajomość całego obszaru liczbowego i umieć się w nim poruszać. Bez kalkulatora tego się zrobić nie da. Z kalkulatorem też nie będzie to łatwe, ale przynajmniej możliwe do osiągnięcia (viable, feasible). W Pracowni Dydaktyki Matematyki Akademii Podlaskiej w Siedlcach mamy opracowane odpowiednie projekty, a w związku z projektem unijnym PDTR, pewne szczegóły tych projektów uzyskały doświadczalne uwiarogodnienia. Potrzebne są oczywiście dalsze prace. Nie mam złudzeń, że to przekona tych, którzy przyzwyczaili się do innego poglądu i przekonania.

[1]Lis napotkał winnicę, która była ze wszystkich stron ogrodzona. W płocie była szczelina, próbował przez nią wejść do środka, ale na próżno. Co więc uczynił? Pościł przez trzy dni, aż schudł tak, że mógł się przecisnąć przez szparę. Potem podjadł sobie, aż utył, ale kiedy próbował wyjść na zewnątrz, znowu nie mógł się przecisnąć. Znów pościł przez trzy dni, aż schudł i stał się taki, jaki był przedtem. Gdy wyszedł, odwrócił się i przemówił: Winnico, winnico! Jakaś ty dobra i jakie dobre są twoje owoce, a wszystko, co w tobie, jest piękne i godne pochwały. Ale jaki z ciebie pożytek? Wychodzi się z ciebie takim, jakim się weszło.

Takie badania prowadzące do opracowania sposobów sensownego użycia kalkulatorów już od początków nauki szkolnej były prowadzone w różnych miejscach na świecie. Wynik jest wyraźny. To jest możliwe i daje dobre skutki. Ale nie jest łatwo przekonać do tego decydentów. Natomiast wprowadzenie tego na szerszą skalę wymaga odpowiedniego zapoznania się z tymi sposobami. Krótko mówiąc wymaga to szkolenia kadry nauczycielskiej.

To jest jak zwykle kosztowne i wymaga też pewnego organizacyjnego wysiłku. Ponieważ pozytywne efekty mogą być widoczne dopiero po wielu latach, ci decydenci, którzy potrzebują szybkich sukcesów, nie są zainteresowani. Kiedyś trzeba będzie przerwać to błędne koło.

Inne wystąpienia

Problem, który na spotkaniu AMS-PTN podnosiła **Anna Sierpińska** był nastepujący: matematyka nie uczy samodzielnego myślenia, raczej zawęża horyzonty. Tak jest dla około 70% uczniów. Co z tym zrobić? W przytoczonej ankiecie obejmującej prawie 100 studentów koledżu, 70 % odpowiedziało, że sami nie są pewni swoich rozwiązań w matematyce i pytają nauczyciela. A jednak ciągle przeważa pogląd, że matematyka uczy samodzielnego myślenia. Jak to interpretować? — zastanawia się Sierpińska. Może są jakieś inne ukryte cele nauczania matematyki takiej, jaką mamy w szkole, i w taki sposób? Czy można to zmienić? Czy nie grają tu roli jakieś inne potężne czynniki, takie jak władza, chęć dominowania pewnych ugrupowań nad pewnymi innymi?

Sierpińska przedstawiła też trzy podejścia do pewnego tematu z matematyki szkolnej
podejście proceduralne,
podejście teoretyczne, w zasadzie formalne,
i **podejście wizualne**.

Z grubsza mówiąc, okazało się, że najlepsze zrozumienie tematu i najmniej błędów na testach osiągnięto przy podejściu wizualnym. Ciekawe, że przy proceduralnym i teoretycznym podejściu uczniowie używali przede wszystkim podstawień konkretnych wartości liczbowych do sprawdzenia wyników, i to im wystarczało. Przy podejściu wizualnym stosowali w tym celu raczej analizę logiczną. Wnioski z tego jednak muszą być bardzo ostrożne.

Gerald Goldin prezedstawił szeroki wachlarz poglądów na edukację matematyczną i rolę badań nauczania matematyki w jego projektowaniu. Od Piageta do Wygodskiego i współczesnego konstruktywizmu. Brakowało mi w tym zestawie Brunera. Myślę, że idee Wygodskiego najlepiej przedstawił Bruner w swojej monografii „W poszukiwaniu teorii nauczania” (Toward a Theory of Instruction). Jest tłumaczenie na język polski tej księgi. Brakowało mi również jakiejś wzmianki na temat późnego Wittgensteina i jego ogólnych rozważań o języku. W końcu matematyka szkolna to jest język, tyle że wizualny, a nie akustyczny. W konkluzji wyczuwało się, że nauczyciele sami powinni stosować techniki zaczerpnięte z badań do rozwiązywania problemów występujących w ich praktyce nauczania. Nie powinni czekać, aż badania prowadzone przez nauczycieli akademickich rozwiążą ich problemy.

Piękna była, naprawdę odtańczona prezentacja, którą pokazał **McCallum**: „Matematycy i dydaktycy matematyki podzieleni przez wspólny język" (Mathematicians and Educators Divided by a Common Language). Ten stymulujący tytuł był oczywiście metaforą, a dokładniej oksymoronem, co znakomicie wzbudzało zainteresowanie. Pokazywał na dobrze dobranych przykładach, jak te same słowa mogą znaczyć co innego, i znaczą co innego, i są przyczyną nieporozumień. Matematycy lubią krótkie jędrne sformułowania o charakterze nawet metonimii. Dydaktykom to nie wystarcza. Projektowanie nauczania wymaga dopracowania wielu szczegółów. Już św. Tomasz z Akwinu wiedział o asymetrii dobra i zła. Dobry projekt musi być dobry we wszystkich szczegółach. Wystarczy jeden feler — i projekt jest zły. Jednak konkretne przykłady, które pokazał w tym wystąpieniu, były bardzo formalne i w stylu New Maths (Nowej Matematyki z lat sześćdziesiątych). Mówiąc matematycznie — sama algebra pierścienia wielomianów, ani śladu geometrii.

Milan Hejný przedstawiał, jak bardzo różni się wiedza od drogi nabywania wiedzy. („Knowledge vs. Knowledge Acquisition"). Przykłady z modelowaniem za pomocą grafów były jednymi, a może nawet jedynymi przykładami z geometrii. Bardzo mnie intrygował ten brak zainteresowania zwykłą szkolną geometrią w tematyce sesji.

Zbigniew Marciniak przedstawiał wyniki badań PISA i doświadczenia z tym związane oraz wskazania, które z tego wynikają. Polska była jednym z niewielu krajów, które poprawiły swoje wyniki najsłabszych uczniów przy porównaniach PISA. Jednak wyniki najlepszych uczniów nie poprawiły się. Zadania w stylu PISA sprawdzały umiejętność posługiwania się matematyką jako językiem do opisywania rozmaitych spraw pozamatematycznych. Np. dopasowywanie wykresu prędkości w zależności od czasu do toru wyścigu, gdzie trzeba było zauważyć, kiedy samochód musi zwolnić, a gdzie może pędzić „na złamanie karku". Badania PISA zwiększyły zainteresowanie matematyką w rozmaitych kręgach ludzi zainteresowanych edukacją. W Polsce zniesiono obowiązek zdawania z matematyki na maturze. Zrobiono to nagle i bez odpowiedniego przygotowania. Po kilku latach praktycznie wszystkie środowiska wypowiedziały się za przywróceniem tego obowiązku. Sprawa jednak nie jest tak prosta, jak mogłoby się wydawać. Te sprawy były dyskutowane w naszym kraju wielokrotnie w różnych miejscach.

Stefan Turnau podnosił niewykorzystaną możliwość wprowadzania zmian w edukacji poprzez **sterowanie egzaminami**. Słuszna idea i ważna sprawa. Ciekaw jestem, czy zainteresuje to Centralną Komisję Egzaminacyjną i jej dyrektora, Marka Legutkę.

Maciej Klakla przedstawił długą listę tematów, którymi zajmuje się ośrodek krakowski. Na pewno będzie to szczegółowo opisane i przedstawione gdzie indziej. Głównym punktem było położenie nacisku na walory wychowawcze matematyki i wykorzystanie tego aspektu matematycznego kształcenia (Universal Basic Mathematics Education) i kształcenie poprzez matematykę.