ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 29 (2006)

Maria Legutko
Akademia Pedagogiczna w Krakowie

Analiza porównawcza wyników badania matematycznych umiejętności 16-latków w programie PISA i w egzaminie gimnazjalnym z 2003 roku

Uwagi wstępne

W polskiej oświacie w 2003 roku zaistniała sytuacja niezwykła ze względu na zbieżność dwóch ważnych badań dotyczących tej samej populacji. Umiejętności tych samych, szesnastoletnich uczniów były badane w dwóch niezależnych, profesjonalnie przygotowanych badaniach: w Programie Międzynarodowej Oceny Umiejętności Uczniów (Programme for International Student Assessment, w skrócie PISA) inspirowanym przez Organizację Współpracy Gospodarczej i Rozwoju (OECD) oraz w egzaminie gimnazjalnym (w skrócie EG) przeprowadzonym przez Centralną Komisję Egzaminacyjną.

Badania PISA starają się opisać postawy uczniów, ich wiedzę i umiejętności w dziedzinach ważnych dla ich dalszej drogi życiowej niezależnie od systemów edukacyjnych, w jakich młodzi ludzie je zdobywają na etapie powszechnego obowiązkowego nauczania. Jako takie ważne domeny (kluczowe kompetencje) badano: czytanie ze zrozumieniem (reading literacy), umiejętności matematyczne (mathematical literacy), rozumowanie w naukach przyrodniczych (scientific literacy) i dodatkowo w 2003 roku rozwiązywanie problemów (problem solving)[1].W egzaminie gimnazjalnym badana jest wiedza i umiejętności matematyczne ściśle związane z systemem edukacji, z celami, treściami i oczekiwanymi osiągnięciami, które są określone w podstawie programowej i standardach wymagań edukacyjnych[2].

[1]Podstawowe informacje o badaniach PISA umieściłam w aneksie 1.
[2]Podstawowe informacje o egzaminie gimnazjalnym umieściłam w aneksie 2.

W artykule tym próbuję, w oparciu o oficjalnie dostępne informacje, odpowiedzieć na pytanie: **czego dowiadujemy się o wiedzy i umiejętnościach matematycznych naszych uczniów na podstawie tych badań?** Mam świadomość ograniczeń, które wynikają z różnicy w założeniach badań, ze zwięzłości oficjalnych danych, z tego, że nie wszystkie informacje są ujawniane (np. ze względu na kontynuację badań) oraz, że pytanie to dotyczy małego fragmentu obu badań. Jednak należy podkreślić, że zarówno w badaniach PISA, jak i w egzaminie gimnazjalnym:

- podjęto próbę określenia matematycznych umiejętności,
- sformułowano wnioski, w jakim stopniu te umiejętności są osiągane.

W odpowiedzi na postawione pytanie przedstawię, jak określone są w obu badaniach te umiejętności, jakie uzyskano wyniki i jakie sformułowano wnioski, a ich porównania dokonam w komentarzach i podsumowaniach.

1 Określenie poziomów matematycznych kompetencji uczniów

1.1 Umiejętności matematyczne w badaniach PISA

Równolegle z programem PISA, badającym umiejętności uczniów, powołany został w 1997 roku program DeSeCo (Definition and Selection of Competecies) do wypracowania zestawu *kluczowych kompetencji,* który pozwoliłby opisać wiedzę, umiejętności, postawy i aspiracje życiowe młodych ludzi opuszczających szkoły na etapie powszechnego nauczania. Wśród tych kluczowych kompetencji wskazano **mathematical literacy** tłumaczone na język polski jako **alfabetyzm matematyczny** albo **umiejętności matematyczne,** albo **kompetencja matematyczna.**

Alfabetyzm matematyczny (mathematical literacy) oznacza w ogólnym zarysie taki poziom indywidualnego zrozumienia matematyki i zrozumienia roli, jaką matematyka odgrywa we współczesnym świecie w formowaniu sądów opartych na matematycznym rozumowaniu oraz opanowania podstawowych umiejętności matematycznych, by jednostka mogła je skutecznie i z satysfakcją stosować w różnych sytuacjach, tam gdzie wymagają tego potrzeby życia codziennego, społecznego, zawodowego i politycznego. (DeSeCo, 1997, s. 16; Białecki, Haman, PISA 2000, Raport; Białecki 2003, s. 24; Sułowska, Marciniak, 2004, s. 6)

Alfabetyzm matematyczny to coś więcej niż powszechnie rozumiana wiedza i umiejętności matematyczne; to również przekonania i poglądy o matematyce i jej roli oraz taki poziom opanowania umiejętności, który pozwala na stwierdzenie, że „wiem jak i umiem w konkretnej sytuacji z tego skorzystać". Chodzi głównie o procesy myślenia związane ze zdolnością analizowania sytuacji: wnioskowaniem, stawianiem hipotez, formułowaniem i rozwiązywaniem problemów oraz prezentowaniem i redagowaniem ich rozwiązania.

W programie PISA 2000 „analizowano 8 podstawowych kompetencji matematycznych: (1) posługiwanie się pojęciami matematyki, (2) umiejętność matematycznego rozumowania i dowodzenia, (3) tworzenie modeli matematycznych realnych sytuacji, (4) formułowanie i rozwiązywanie problemów matematycznych, (5) posługiwanie się różnymi – najodpowiedniejszymi w danej sytuacji – reprezentacjami obiektów matematycznych, (6) sprawność rachunkową, (7) komunikowanie zagadnień matematycznych, (8) posługiwanie się narzędziami ułatwiającymi rozwiązywanie problemów matematycznych. (PISA 2000, Wyniki; Białecki i in., 2003, s. 24.)

Sprzeczne z zamiarami programu PISA było tworzenie w badaniach w roku 2000 zadań testujących pojedyncze umiejętności, bardziej chodziło o praktyczne kojarzenie i wykorzystywanie wiadomości z różnych dziedzin oraz o postawy sprzyjające samodzielności w zdobywaniu wiedzy. Ponieważ stosowanie matematyki w realnym życiu wymaga równoczesnego korzystania z kilku kompetencji wskazanych wśród tych podstawowych, dlatego w programie PISA w roku 2003 zaproponowano nieco inne podejście. Sformułowano mianowicie trzy wymiary oceny umiejętności matematycznych:

1. **Treści matematyki** określone zostały w kategoriach ogólnych pojęć matematycznych, stanowiących podstawę matematycznego myślenia: przestrzeń i kształt, (sytuacje geometryczne i związki przestrzenne między obiektami geometrycznymi) zmiana i związki (zależności funkcyjne i relacje reprezentowane w sposób symboliczny, algebraiczny, graficzny lub tabelaryczny), ilość (wielkości liczbowe w realnych sytuacjach, obliczenia, szacowanie i przybliżenia) oraz niepewność (zjawiska probabilistyczne i wnioskowania o charakterze statystycznym).

2. **Procesy myślenia matematycznego**, jakie należy uaktywnić, by skojarzyć dany problem z matematyką i znaleźć jego rozwiązanie. Chodzi tu o umiejętność używania języka matematycznego, budowania modeli matematycznych sytuacji realnej i rozumowania polegającego zwykle na abstrahowaniu i uogólnianiu. Ułożono je w trzech grupach, określając rodzaj niezbędnych umiejętności myślenia: odtwarzanie (obejmujące proste obliczenia lub podstawowe definicje, jakie najczęściej występują w tradycyjnych ocenach znajomości matematyki, dobrze wyćwiczone umiejętności i dobrze znane proste obiekty wykorzystywane w typowych zadaniach), powiązania (wymagające dostrzeżenia możliwych relacji między elementami występującymi w zadaniach, aby rozwiązać proste problemy lub mniej rutynowe zadania, które wymagają

większej liczby kroków, wybrania odpowiednich pojęć lub uzasadnienia odpowiedzi), rozumowanie (obejmujące twórcze podejście do problemu, niebanalną matematyzację, uogólnianie i taką analizę danej sytuacji, która pozwoli uczniom zidentyfikować matematyczne elementy, samodzielnie postawić problem, rozwiązać go, zinterpretować, wyjaśnić i zasadnić jego rozwiązanie).
3. Konteksty sytuacji, w których używa się matematyki. Wyróżniono następujące rodzaje sytuacji: osobiste (ściśle związane z codziennym życiem ucznia), edukacyjne (dotyczące uczenia się w szkole także innych przedmiotów), zawodowe (związane z pracą zawodową ludzi z otoczenia ucznia), publiczne (dotyczące życia społeczności lokalnej) związane z komunikacją, bankiem, wyborami, ochroną środowiska), naukowe (dotyczące fizyki, techniki, a także sytuacje czysto matematyczne). (Program PISA 2003; Wyniki badania 2003 w Polsce, Sułowska, Marciniak 2004, s. 6-7)

Do pomiaru umiejętności matematycznych zaproponowano **skalę umiejętności matematycznych**, która została skalibrowana tak, by średni wynik krajów członkowskich OECD wynosił 500 punktów przy odchyleniu standardowym 100 punktów oraz by około dwie trzecie uczniów z tych krajów miało wynik mieszczący się w zakresie 400-600 punktów. W opisie wyników badania z roku 2003 skalę podzielono na sześć poziomów i każdy z nich scharakteryzowano.

Punkty	Poziom	Umiejętności typowe dla danego poziomu
powyżej 667	**6**	Uczeń na tym poziomie potrafi przeanalizować i uogólnić informacje na podstawie badania samodzielnie zbudowanego modelu złożonej sytuacji problemowej. Umie łączyć różne źródła informacji i swobodnie przemieszczać się między nimi. Potrafi wykonywać zaawansowane rozumowania i umie wnioskować matematycznie. Umie połączyć rozumowanie z biegłością w wykonywaniu operacji symbolicznych i formalnych podczas twórczej pracy nad nowym dla siebie kontekstem. Potrafi precyzyjnie formułować komunikat o swoim rozumowaniu, uzasadniając podjęte działania.
606-667	**5**	Uczeń umie modelować złożone sytuacje, identyfikując ograniczenia i precyzując zastrzeżenia. Potrafi porównywać, oceniać i wybierać odpowiednie strategie rozwiązywania problemów związanych ze zbudowanym modelem. Umie używać dobrze rozwiniętych umiejętności matematycznych, z użyciem odpowiednich reprezentacji, w tym symbolicznych i formalnych. Potrafi krytycznie ocenić swoje działania oraz zakomunikować swoją interpretację oraz sposób rozumowania.

Tabela 1. (Ciąg dalszy na następnej stronie.)

544-605	**4**	Uczeń umie efektywnie pracować z podanymi wprost modelami złożonych sytuacji realnych, identyfikując ograniczenia i czyniąc niezbędne założenia. Potrafi wybierać oraz integrować różne źródła informacji, łącząc je bezpośrednio z kontekstem realnym. Umie w takich kontekstach stosować ze zrozumieniem dobrze wyuczone techniki. Potrafi konstruować komunikaty opisujące swoje interpretacje, argumenty i działania.
482-543	**3**	Uczeń umie wykonać jasno opisany algorytm, także wymagający sekwencyjnego podejmowania decyzji. Potrafi wybierać i stosować proste strategie rozwiązywania problemów. Potrafi interpretować i wyciągać bezpośrednie wnioski z danych pochodzących z kilku źródeł. Umie przedstawić wyniki nieskomplikowanych interpretacji i rozważań.
420-481	**2**	Uczeń umie rozpoznać i zinterpretować sytuację wymagającą tylko prostego kojarzenia. Potrafi wydobyć istotną informację z pojedynczego źródła i użyć na raz jednej formy reprezentacji danych. Umie zastosować prosty wzór lub przepis postępowania. Potrafi wyciągnąć bezpośrednie wnioski i dosłownie zinterpretować wyniki.
358-419	**1**	Uczeń umie rozwiązywać typowe zadania, w których wszystkie dane są bezpośrednio podane, a zadane pytania są proste. Potrafi wykonywać czynności rutynowe, postępując zgodnie z podanym prostym przepisem. Podejmuje działania oczywiste, wynikające wprost z treści zadania.
poniżej poziomu 1		Uczeń nie ujawnia badanych w PISA umiejętności.

Tabela 1. (OECD Raport PISA 2003, Sułowska A., Marciniak Z., 2004, s. 8)

Poziomy na tej skali wypracowano na podstawie wyników, jakie uzyskali uczniowie rozwiązując różnorodne zadania. I tak:

- Uczniowie najlepsi dochodzą na tej skali do 750 punktów. Potrafią rozwiązywać w nowym dla siebie kontekście złożone problemy matematyczne, wymagające wykonania wielu działań pośrednich i wykorzystywania różnorodnych narzędzi i technik. Samodzielnie potrafią zbudować model matematyczny tej sytuacji, przeprowadzić zaawansowane wnioskowania i rozumowania a także w pełni poprawnie formułować zdania generalizujące oraz uzasadniać uzyskane wyniki.
- Uczniowie o wynikach około 570 punktów radzą sobie zwykle z interpretowaniem, wiązaniem i integrowaniem informacji podawanych w różnych formach, są w stanie posługiwać się wyrażeniami algebraicznymi i symboliką matematyczną oraz dobierać odpowiedni dla danego problemu (znany sobie) schemat rozwiązywania i pracować z podanym modelem złożonej sytuacji realnej.

- Uczniowie osiągający wyniki ok. 380 punktów są w stanie rozwiązywać zadania wymagające jednoetapowych obliczeń bądź też odwołania się do pojedynczych, prostych twierdzeń oraz interpretować dane w postaci tekstowej lub graficznej w dobrze znanym kontekście, jeśli zadanie jest typowe i proste. (Białecki, Blumsztajn, Cyngot, 2003, s. 44)

1.2 Umiejętności matematyczne w egzaminie gimnazjalnym w zakresie przedmiotów matematyczno-przyrodniczych

Egzamin gimnazjalny w Polsce w części matematyczno-przyrodniczej bada umiejętności i wiadomości uczniów z zakresu matematyki, biologii, geografii, chemii, fizyki i astronomii. Umiejętności te, o charakterze ponadprzedmiotowym, „są ważne dla każdego człowieka i potrzebne w życiu codziennym" (Informator o egzaminie gimnazjalnym w 2002 r., s. 8). Zostały one opisane przez Centralną Komisję Egzaminacyjną (CKE) przy współpracy Okręgowych Komisji Egzaminacyjnych (OKE) w czterech standardach wymagań, zgodnie z *Rozporządzeniem Ministra Edukacji Narodowej* (z dnia 10 sierpnia 2001 r.) *w sprawie standardów wymagań będących podstawą przeprowadzenia sprawdzianów i egzaminów* a także z *Podstawą programową kształcenia ogólnego* (z dnia 15 lutego 1999 r.).

Oto **standardy wymagań egzaminacyjnych** ze wskazaniem czynności ucznia:

I. Umiejętne stosowanie terminów, pojęć i procedur z zakresu przedmiotów matematyczno-przyrodniczych niezbędnych w praktyce życiowej i dalszym kształceniu. Uczeń: 1. stosuje terminy i pojęcia matematyczno-przyrodnicze: czyta ze zrozumieniem teksty; wybiera odpowiednie terminy i pojęcia do opisu zjawisk, właściwości i zachowań obiektów, 2. wykonuje obliczenia w różnych sytuacjach praktycznych: stosuje prawa działań, operuje procentami, posługuje się przybliżeniami i jednostkami miar, 3. posługuje się własnościami figur: dostrzega kształty figur w otaczającej rzeczywistości, oblicza miary figur płaskich i przestrzennych, wykorzystuje własności miar w sytuacjach praktycznych.
II. Wyszukiwanie i stosowanie informacji. Uczeń: 1. odczytuje informacje przedstawione w formie: tekstu, mapy, tabeli, wykresu, rysunku, schematu, fotografii, 2. operuje informacją: selekcjonuje, porównuje, analizuje, przetwarza, interpretuje, czytelnie je prezentuje, wykorzystuje w praktyce.

Tabela 2. (Ciąg dalszy na następnej stronie.)

III. Wskazywanie i opisywanie faktów, związków i zależności, w szczególności przyczynowo-skutkowych, funkcjonalnych, przestrzennych i czasowych. Uczeń: 1. wskazuje prawidłowości w procesach, w funkcjonowaniu układów i systemów; wyodrębnia dane zjawisko z kontekstu, określa warunki jego występowania, opisuje jego przebieg w czasie i przestrzeni zgodnie z prawami, 2. posługuje się językiem symboli i wyrażeń algebraicznych do opisu wielkości, przekształca wyrażenia, opisuje związki i procesy za pomocą równań i nierówności, 3. posługuje się funkcjami: wskazuje zależności funkcyjne, opisuje funkcje za pomocą wzorów wykresów i tabel, analizuje je i wyciąga wnioski, 4. stosuje zintegrowana wiedzę do objaśniania zjawisk przyrodniczych.
IV. Stosowanie zintegrowanej wiedzy i umiejętności do rozwiązywania problemów. Uczeń: 1. stosuje techniki twórczego rozwiązywania problemów: formułuje i sprawdza hipotezy, kojarzy różnorodne fakty, obserwacje, wyniki doświadczeń i wyciąga wnioski, 2. analizuje sytuacje problemową: dostrzega i formułuje problem, określa wartości dane i szukane (określa cel), 3. tworzy model sytuacji problemowej: wyróżnia istotne wielkości i cechy sytuacji problemowej, zapisuje je w terminach nauk matematyczno-przyrodniczych, 4. tworzy i realizuje plan rozwiązania: rozwiązuje równania i nierówności stanowiące model problemu, układa i wykonuje procedury osiągania celu, 5. opracowuje wyniki: ocenia je, interpretuje i przedstawia.

Tabela 2. (DzU nr 92 poz.1020 załącznik nr 2)

Numery standardów nie wskazują uporządkowanego opisu umiejętności uczniów od najłatwiejszych (osiąganych przez największą część populacji uczniów) do najtrudniejszych. Opisane czynności ucznia nie odzwierciedlają także procesu uczenia (się) matematyki ani procesu rozwiązywania zadań. Za całość zadań sprawdzających umiejętności tych czterech standardów uczeń może maksymalnie uzyskać 50 punktów. Nie ma ustalonej liczby punktów za czynności w poszczególnych standardach, np. w 2003 roku punkty te były rozdzielone tak: standard I – 15 (30%) punktów, II – 12 (24%), III– 15 (30%), IV – 8 (16%) punktów.

1.3 Komentarze i wnioski wynikające z porównania określeń umiejętności matematycznych PISA i standardów wymagań egzaminacyjnych w zakresie przedmiotów matematyczno-przyrodniczych (EGMP)

1. **Utworzenie skali matematycznych umiejętności uczniów** i wyróżnienie na niej poziomów opisanych za pomocą typowych umiejętności

ucznia oraz przedziałów liczbowych w wyniku badań PISA, **jest podejściem nowym w dydaktyce matematyki**. Charakteryzując umiejętności matematyczne wskazano podstawowe pojęcia dla treści matematycznych: przestrzeń i kształt, zależności i związki, ilość i niepewność. Można skojarzyć te pojęcia z głównymi pojęciami w działach szkolnej geometrii, algebry, arytmetyki oraz rachunku prawdopodobieństwa i statystyki opisowej albo z liniami tematycznymi w niektórych programach nauczania matematyki (np. Matematyka 2001). Można też wśród celów nauczania matematyki wskazać umiejętności posługiwania się tymi samymi pojęciami na poziomie wyników nauczania (np. Turnau, 1990). Standardy wymagań egzaminacyjnych zostały opracowane teoretycznie, bez uwzględnienia wyników badań empirycznych. W standardach wymagań egzaminu gimnazjalnego nie wskazano podstawowych pojęć i terminów matematyczno-przyrodniczych, które mają w świadomości ucznia tworzyć zintegrowany system wiedzy, umiejętności i postaw, a ich rozumienie i umiejętność stosowania miałyby być sprawdzane na egzaminie. Treści i podstawowe pojęcia są określone oddzielnie dla poszczególnych przedmiotów w podstawie programowej. Jedynie dla matematyki wskazano: w standardzie I działania na liczbach, dostrzeganie i własności figur płaskich, a w standardzie III wyrażenia algebraiczne, równania, nierówności i funkcje. Podobnie również w PISA nie wskazano takich podstawowych pojęć dla nauk przyrodniczych. Wymieniono jedynie (kontekst) obszary nauki obejmujące: życie i promowanie zdrowia, Ziemię i środowisko oraz stosowanie technologii (Ostrowska, 2004, s. 21). To ogólne podejście do opisu umiejętności matematycznych uczniów skłania, do sformułowania następującego wniosku.

Wniosek 1. Wskazanie podstawowych pojęć w standardach wymagań egzaminu gimnazjalnego dla przedmiotów matematyczno-przyrodniczych mogłoby służyć integrowaniu wiedzy ucznia i przyczynić się do podniesienia jego umiejętności matematycznych. Chodzi o pojęcia trwale obecne w nauce, które nie są kontrowersyjne i mają odniesienie do sytuacji wziętych z życia. Wokół tych pojęć można by dobierać i rozwiązywać problemy w szkolnym nauczaniu.

2. W badaniach PISA proponuje się **„odtwarzanie"**, **„powiązania"** i **„rozumowanie"** jako **dominujące „procesy myślowe" w rozwiązywaniu zadań i problemów**. Odtwarzanie i powiązania scharakteryzowane zostały zwięźle przy użyciu „typowych dla ucznia zadań" „„dobrze wyćwiczonych umiejętności" i „dobrze znanych prostych obiektów" (matematycznych). Tych umiejętności bliżej jednak nie określono, a dobrze

znane proste obiekty należy chyba powiązać ze wskazanymi podstawowymi pojęciami. Na skali matematycznych umiejętności nie zostało użyte „odtwarzanie", ani „powiązania" w opisie poziomów. Jedynie na poziomie drugim użyto „kojarzenia" w sensie powiązania. Pojęcia te w literaturze są charakteryzowane następująco: „odtwarzanie" polega na przypominaniu, rozpoznawaniu, reprodukowaniu zapamiętanych informacji lub umiejętności i jest związane z procesami pamięci, a „kojarzenie" się zjawisk w świadomości to wytwarzanie związków między dwoma zjawiskami występującymi dotychczas oddzielnie. Gdy już powstanie związek skojarzeniowy, to wraz z wystąpieniem jednego ze zjawisk pojawi się skojarzone z nim drugie zjawisko (Tomaszewski, 1978, Kurcz,1978). Odtwarzanie i kojarzenie można odnieść do badania „przyswojenia wiadomości" (znajomości faktów, terminologii i umiejętności użycia algorytmów) „w sytuacjach typowych" (w zadaniach schematycznych, w rozpoznanych modelach wzorów (Szurig, 1978) lub do kategorii „zapamiętanie wiadomości" w taksonomii ABC celów poznawczych (Niemierko, 1990). Pozostaje jednak wątpliwość przy analizie skali matematycznych umiejętności – czy „powiązanie" i „kojarzenie" dotyczą procesów myślowych na pierwszych dwóch poziomach tej skali, czy występują na wszystkich poziomach. Dopiero na poziomie 5 skali matematycznych umiejętności pojawiają się „sposoby rozumowania" i umiejętności w zakresie ich komunikowania, a na poziomie 6 „zaawansowane rozumowania" i „wnioskowania matematyczne" w rozwiązywaniu problemów. To, że w opisie poziomów nie wskazano „procesów myślowych", świadczy o trudnościach w scharakteryzowaniu myślenia matematycznego. Potwierdza to także zmiana w podejściu do określenia umiejętności matematycznych PISA 2003 w stosunku do roku 2000. Duński matematyk, ekspert PISA, M. Niss (2002) stwierdził, że podstawą matematycznej kompetencji jest rozległa wiedza i techniczne umiejętności. Jest to, jego zdaniem, warunek konieczny, ale niewystarczający, bo potrzebne są jeszcze „umiejętność zadawania pytań i udzielania odpowiedzi na temat i przy użyciu matematycznych środków oraz rozumienie i stosowanie matematycznego języka i matematycznych narzędzi". Rozróżnił on i scharakteryzował myślenie matematyczne i rozumowanie matematyczne wśród ośmiu elementów kompetencji matematycznej: 1) myślenie matematyczne, 2) stawianie i rozwiązywanie problemów matematycznych, 3) modelowanie matematyczne, 4) rozumowanie matematyczne, 5) reprezentowanie bytów matematycznych, 6) posługiwanie się matematyczną symboliką i formalizmami,7) komunikowanie się w matematyce, o matematyce i z użyciem matematyki, 8) używanie środków pomocniczych i narzędzi.

W standardach wymagań EG w przedmiotach matematyczno-przyrodniczych nie opisano, jakich elementów myślenia matematycznego oczekuje się w wyniku kształcenia, mimo że w podstawie programowej wśród celów edukacyjnych matematyki wymienia się: „kształtowanie umiejętności myślenia", „rozwijanie myślenia abstrakcyjnego i logicznego wnioskowania", „rozwijanie myślenia analitycznego i syntetycznego". Zestawiając te elementy kompetencji matematycznej dotyczące myślenia matematycznego, opisane bardzo ogólnie i niekiedy wieloznacznie, nasuwa się następujący wniosek.

Wniosek 2. Opisanie procesów myślenia matematycznego i ich kształcenie pozostaje nadal problemem otwartym.

3. Wskazanie w PISA **kontekstu sytuacji,** w jakich używa się matematyki, jako trzeciego wymiaru umiejętności matematycznych, jest podejściem nowym. Można to interpretować jako uznanie faktu, że to od sytuacji zależy, jakich treści i jakich procesów myślowych użyjemy w odpowiedzi na pytania i problemy związane z tą sytuacją. Ważne jest także podkreślenie, że mają to być sytuacje „bliskie uczniowi, związane z jego życiem", „realistyczne", bo w takich sytuacjach dla wielu uczniów ma sens uczenie się matematyki. Zwracała na to uwagę A. Z. Krygowska (1977, s. 4-5) uważając, że – dobór takiej tematyki zadaniowej dostosowanej do możliwości przeciętnego i nawet tak zwanego „słabego" ucznia, który prowokowałby u tego ucznia postawę badawczą i prawdziwą aktywność matematyczną na miarę jego możliwości – jest bardzo pilnym i ważnym zagadnieniem dydaktyki matematyki. Te sytuacje wskazane w PISA mogą być: osobiste, edukacyjne, zawodowe, publiczne i naukowe (dotyczące także teoretycznych problemów matematyki). Jest to także wskazanie „sytuacji praktycznych", w jakich uczeń ma wykorzystywać obliczenia, własności figur i miar, (co zostało określone w I standardzie EG). Wynika stąd potrzeba sformułowania kolejnego wniosku.

Wniosek 3: Na poziomie powszechnego nauczania matematyki należy w większym stopniu uwzględnić kontekst sytuacji bliski życiu ucznia.

4. Alfabetyzm matematyczny zakłada „opanowanie podstawowych umiejętności matematycznych", ale w PISA **nie wskazano, jakie to są podstawowe umiejętności na skali matematycznych umiejętności.** W roku 2000 wymieniano wśród ważnych kompetencji „sprawność rachunkową", „narzędzia ułatwiające rozwiązywanie matematycznych problemów", lecz bliżej ich nie określono. Wskazano np., że uczniowie z punktacją około 380 punktów radzą sobie z jednoetapowymi oblicze-

niami, a osiągający poziom 570 punktów potrafią posługiwać się wyrażeniami algebraicznymi i symboliką matematyczną. To, że słabe opanowanie podstawowych umiejętności uniemożliwia uczniowi rozwiązanie zadań i problemów, jest znane i ma potwierdzenie w wynikach egzaminu gimnazjalnego: np. w 27. zadaniu prawidłowe podstawienie w równaniu ($y = -0,05x + 45$ dla $x = 200$) zastosowało 68% uczniów, a tylko 35% uczniów wykonało poprawnie potrzebne obliczenia; w zadaniu 30. rysunek (dwóch trójkątów podobnych) wykonało blisko 44% badanych uczniów, odpowiednią proporcję na podstawie tego rysunku zapisało 25% uczniów, a właściwe dane w proporcji podstawiło i wykonało obliczenia tylko 15% uczniów (porównaj Aneks 2). Dyskusji wymaga wskazana w PISA 2000 roku „sprawność rachunkowa". Jaka sprawność rachunkowa jest potrzebna, gdy kalkulatory są powszechnie dostępne? Jaki rachunek pamięciowy jest potrzebny do kształtowania ważnych pojęć matematycznych, takich np. jak liczby wymierne, działania? Czy szacowanie i rachunek przybliżony jest elementem sprawności rachunkowej? Czy do sprawności rachunkowej należy przekształcanie wyrażeń algebraicznych, itp.? W standardach EG (I.2) i (III.2) określono bliżej oczekiwane umiejętności uczniów w tym zakresie. Czy tak właśnie mamy rozumieć „sprawnością rachunkową"? Te rozważania nasuwają potrzebę bardzo ważnego i konkretnego wniosku.

Wniosek 4: Potrzebny jest konsensus w sprawie znaczenia terminu „podstawowe umiejętności matematyczne".

5. **Oczekiwane umiejętności w zakresie stosowanie zintegrowanej wiedzy i umiejętności do rozwiązywania problemów** opisuje standard IV w egzaminie gimnazjalnym. W programie PISA 2003 można takie umiejętności wskazać na 5. poziomie skali matematycznych umiejętności. Poziomy umiejętności rozwiązywania problemów przez uczniów zostały opisane oddzielnie w domenie *Rozwiązywanie problemów* PISA 2003 na trzech poziomach umiejętności. Zastosowano skalę, podobnie jak dla matematycznych umiejętności, ze średnim wynikiem 500 punktów przy założeniu, że 2/3 wyników będzie pomiędzy 400 a 600 punktów. Tabela 3 zawiera charakterystykę tych poziomów.

Rozwiązując zadania-problemy w badaniach PISA uczniowie mają się wykazać, że potrafią: „*zrozumieć problem, scharakteryzować problem, stworzyć reprezentację problemu, rozwiązać problem, podjąć refleksję nad rozwiązaniem, przedstawić rozwiązanie problemu*". Duży nacisk kładzie się na sprawdzenie **poprawności rozumowania**. „Aby zrozumieć sytuację problemową, osoba rozwiązująca dane zadanie musi niekiedy oddzielić fakty od opinii, czy przyczynę od skutku, zaś przy przedstawianiu wyników musi zazwyczaj uporządkować informacje w sposób logiczny. Takie działania wymagają posiadania umiejętności rozumowania różnego rodzaju: analitycznego, ilościowego, poprzez analogię oraz kombinatorycznego" (Ostrowska, 2004, s. 14). Powyższe rozważania uzasadniają wniosek.

Poziom 3 Powyżej 592 punktów	Uczeń potrafi nie tylko przeanalizować sytuację i podjąć decyzję, ale również wykazuje zdolność do refleksji i odpowiedniego wykorzystania informacji na temat zależności odnalezionych przez siebie w napotkanych sytuacjach problemowych. Potrafi skonstruować swoje własne reprezentacje problemów (stworzyć schemat rozwiązania problemu). Radzi sobie z wieloma wzajemnie powiązanymi warunkami, które wymagają nieustannego porównywania znalezionego rozwiązania z zasadami postawionymi w treści zadania. Umie porządkować i monitorować swoje procesy myślowe podczas pracy nad rozwiązaniem problemu. Potrafi wykorzystać informacje pochodzące z różnych źródeł i swobodnie poruszać się między nimi. Potrafi przedstawić swoje rozumowanie i uzasadnić podjęte działania.
Poziom 2 499-592 punktów	Uczeń potrafi wykonywać rozumowanie analityczne przy podejmowaniu decyzji wymagających porównania wielu możliwości. Umie łączyć różne formy prezentowania informacji. Potrafi połączyć i wykorzystać informacje pochodzące z różnych źródeł i swobodnie z nich korzystać. Umie wyciągać wnioski w kontekstach wymagających myślenia dedukcyjnego, indukcyjnego i kombinatorycznego.
Poziom 1 405-498 punktów	Uczeń rozumie charakter problemu i potrafi wydobyć informacje związane z głównymi cechami danego problemu. Umie dokonać prostych przekształceń danych. Zwykle potrafi wykorzystać dostępne informacje do weryfikacji niewielkiej liczby stwierdzeń dotyczących danego problemu sformułowanych wprost.
Poniżej poziomu 1 poniżej 405 punktów	Uczeń potrafi poradzić sobie z nieskomplikowanym i problemami, przedstawionymi w sposób klarowny i uporządkowany. Umie udzielić odpowiedzi w oparciu o fakty lub poczynić bezpośrednie obserwacje, niekiedy z wyciągnięciem bardzo prostych wniosków.

Tabela 3. (OECD Raport PISA 2003 (Ostrowska, 2004, s. 14.))

Wniosek 5: Należy uczyć matematyki przez rozwiązywanie dobrze dobranych i różnorodnych problemów, by uczniowie umieli ją stosować w sytuacjach trudnych, złożonych z nietypowych a także praktycznych.

2 Porównanie metodologii badań PISA 2003 i egzaminu gimnazjalnego

Porównanie badań obejmuje organizację, problemy badawcze, dobór i konstrukcję narzędzi badań oraz sposoby oceniania.

1. Z założenia badania PISA są prowadzone przez instytucje niezwiązane z systemem edukacyjnym i koordynowane przez konsorcjum naukowe, w którego skład wchodzą przedstawiciele instytutów badań oświatowych z pięciu krajów. Natomiast egzamin gimnazjalny prowadzony jest przez instytucje oświatowe specjalnie do tego celu powołane, które w polskiej oświacie stawiają „pierwsze kroki" w badaniu wyników procesu nauczania.
2. Egzamin gimnazjalny ma charakter doniosły, jest ważnym wydarzeniem w życiu młodego człowieka, określa wiedzę i umiejętności po trzecim etapie kształcenia, często od jego wyniku zależy wybór szkoły w dalszym etapie edukacji ucznia. Poddana temu egzaminowi została cała populacja 561 418 uczniów (w 2003 roku). Natomiast badania PISA przeprowadzono na losowo wybranej reprezentatywnej próbie 4383 uczniów, którzy (jak również ich rodzice) wyrazili zgodę na udział w badaniach. Wyniki tych badań nie są uczniowi znane i nie mają wpływu na jego osiągnięcia szkolne.
3. Ważne jest, że badania objęły tych samych uczniów w wieku 16 lat (urodzonych w1987 roku).
4. Badania PISA przeprowadzono w marcu i kwietniu 2003 roku, a EG w dniach 8 i 9 maja. W badaniach PISA czas wynosił 2 godziny i obejmował cztery badane umiejętności, a w zależności od zeszytu uczniowie rozwiązywali różną liczbę zadań matematycznych. Nie wszyscy rozwiązywali takie same zadania. Czas rozwiązywania zadań w EG części matematyczno-przyrodniczej wynosił 2 godziny i każdy uczeń rozwiązywał 34 takie same zadania (25 zadań zamkniętych[3] i 9 zadań otwartych[4]).
5. W badaniach PISA uczniowie wypowiadali się w ankiecie na temat swoich strategii i warunków uczenia się przez 30 minut, a w EG w 2003 roku nie kierowano tego typu pytań do uczniów.
6. Zarówno w badaniach PISA jak i w EG próbowano określić umiejętności stosowania zintegrowanej wiedzy z różnych dziedzin w rozwiązywaniu zadań i problemów, a jednym z celów obu badań było określenie matematycznych umiejętności uczniów.
7. W badaniach PISA opisano postawy uczniów wobec zadań i problemów: zachowania („umie rozpoznać, umie rozwiązać, umie wykonać jasno opisany algorytm, umie modelować sytuacje, itp.), emocjonalno-motywacyjny stosunek do matematyki (stres, niepokój, bezradność, wia-

[3] Tj. polegających na wyborze gotowej odpowiedzi; Red.
[4] Tj. polegających na utworzeniu odpowiedzi; Red.

ra we własne możliwości, „szukanie powiązań matematyki z innymi przedmiotami i/lub z codziennym życiem", satysfakcja z rozwiązania problemu) i strategie uczenia się (poprzez „podobne przykłady", „na pamięć", poprzez szukanie różnych rozwiązań).W EG badane są umiejętności określone w czterech standardach wymagań dla przedmiotów matematyczno-przyrodniczych ściśle powiązanych z podstawą programową kształcenia ogólnego w gimnazjum. Umiejętności te są jawne dla nauczycieli i uczniów, do ich osiągnięcia zmierza proces uczenia się i nauczania matematyki (jak i przyrody, fizyki, chemii, geografii). PISA zakłada badanie umiejętności niezależnie od programów i systemów oświatowych.

8. W obu badaniach uczniowie rozwiązywali zadania i problemy. W EG, około 70% wszystkich zadań stanowiły zadania zamknięte, w których uczeń wybierał jedną z czterech podanych odpowiedzi. W badaniach PISA zastosowano więcej (około 70%) zadań otwartych, w których uczeń sam formułował odpowiedź. W obu badaniach użyto zadań podobnie formułowanych; do przedstawionej sytuacji stawiano 1- 4 pytań lub poleceń. Zadania były przygotowywane przez komisje pozaszkolne. W badaniach PISA wstępnie opracowano 400 zadań, które przekazano międzynarodowemu zespołowi ekspertów. Po analizie tych zadań pod względem poprawności merytorycznej, treści matematycznych, rodzaju rozumowań i kontekstu sytuacyjnego oraz klarowności klucza odpowiedzi pozostawiono 200 zadań. Te poddano standaryzacji w dwóch etapach i ostatecznie do badań wybrano 85 zadań. Zestaw zadań egzaminu gimnazjalnego poddawany jest wstępnej weryfikacji w dwóch etapach, na populacji 100 i 300 uczniów. Przykłady zadań i problemów zawierają aneksy.

9. Prace uczniów były oceniane według szczegółowo opracowanych kodów w badaniach PISA przez specjalnie do tego przeszkolonych koderów. W egzaminie gimnazjalnym egzaminatorzy[5] specjalnie wyszkoleni i wpisani do rejestru egzaminatorów oceniali zadania otwarte według schematów punktowania czynności uczniów. Nieco inne są sposoby opisu oceny rozwiązań zadań. W EG punkty przyznawane są za wykonane czynności w kolejnych etapach rozwiązania zadania, a w PISA do rozwiązań pełnych lub częściowych przyporządkowane są punkty według kodów (rozwiązania ocenia się całościowo).

10. Inaczej opracowywane są wyniki. PISA oddzielnie analizuje wyniki w zakresie ujawnionych matematycznych umiejętności i globalnie opisuje

[5]Byli to nauczyciele różnych specjalności; Red.

je w punktach na sześciopoziomowej skali matematycznych umiejętności. Oddzielnie opisuje umiejętności: matematyzowania, czytania ze zrozumieniem, rozumowania w naukach przyrodniczych, w rozwiązywaniu problemów. W EG badane umiejętności opisywane są dla przedmiotów matematyczno-przyrodniczych i dla przedmiotów humanistycznych. Nie są oddzielnie analizowane umiejętności matematyczne.

11. W ocenie poziomu umiejętności uczniów w obu badaniach wykorzystano współczynnik łatwości/trudności zadań i liczbę rozwiązanych przez ucznia zadań. Przydatna tutaj może być jego charakterystyka, którą zacytuję:

> Łatwość zadania (lub grupy zadań) we wskazanej populacji uczniów jest to iloraz sumy punktów uzyskanych przez tych uczniów za to zadanie (grupę zadań) przez iloczyn liczebności populacji i maksimum punktów za zadanie (grupę zadań). Łatwość zadania jest równa zero, gdy żaden uczeń nie uzyskał punktu za to zadanie. Łatwość zadanie jest równa jeden, gdy wszyscy uczniowie uzyskali pełną liczbę punktów za to zadanie. (Niemierko,1990, s. 153).

12. Nie wszystkie zadania PISA (ze względu na kontynuację badań) i nie wszystkie wyniki są ujawnione. Natomiast w EG każdy uczeń zna zadania, a po egzaminie może poznać zasady przyznawania punktów za poprawne odpowiedzi i jest poinformowany pisemnie o swoich wynikach (a w niektórych OKE może korzystając z platformy internetowej SIEMA, porównać swoje wyniki, ze średnimi w swojej klasie, w swojej szkole a nawet ze średnią badanej populacji). Także każdy nauczyciel zna wyniki swoich uczniów, dyrektor zna wyniki uczniów w swojej szkole, a starosta w powiecie i kurator w swoim regionie.

3 Umiejętności matematyczne polskich uczniów – wyniki

3.1 Wyniki polskich uczniów w PISA w porównaniu z innymi krajami

Polscy uczniowie w 2003. roku uzyskali **średnią 490 punktów** i zajęli 24. pozycję wśród 40 krajów świata. Odnośnie treści matematycznych analizowano oddzielnie umiejętności uczniów dotyczące wskazanych podstawowych pojęć. I tak w zakresie:

- przestrzeń i kształt, polscy uczniowie uzyskali średnią 490 punktów i zajęli 21 pozycję wśród badanych krajów świata (najlepsi byli uczniowie z Hongkongu ze średnią 558 punktów).

- zmiana i związki, uzyskali 484 punkty i zajęli 27 pozycję i (najlepsi byli uczniowie z Holandii ze średnią 551 punktów).
- ilość (wielkości liczbowe) uzyskali średnią 492 punkty i zajęli 26 pozycję wśród badanych krajów świata, (najlepsi byli uczniowie z Finlandii ze średnią 549 punktów).
- niepewność, uzyskali średnią 494 punkty i zajęli 21 pozycję wśród badanych krajów świata (najlepsi byli uczniowie z Hongkongu ze średnią 558 punktów).

Ciekawy jest fakt, że w zakresie pojęć związanych z nauczaniem geometrii oraz elementów rachunku prawdopodobieństwa i statystyki opisowej nasi uczniowie osiągnęli wyższe wyniki niż w posługiwaniu się liczbami, które tradycyjnie uznawane są za ważne i poświęca się im wiele czasu w nauczaniu. Niski wynik w zakresie zmiennych i związków jest tylko potwierdzeniem powszechnej opinii, że jest to dla uczniów na poziomie gimnazjum zagadnienie trudne.

Średnie wyników dla poszczególnych krajów świata, które brały udział w badaniach, przedstawia tabela 4. Polscy uczniowie w 2003. roku zajęli 24. pozycję wśród 40 krajów świata. (Kolorem białym wyróżniono kraje, w których wynik nie różni się statystycznie od wyników Polski.)

W 2000. roku polscy uczniowie uzyskali średnią 470 punktów. W Europie niższe średnie wyniki uzyskali wówczas tylko uczniowie Grecji (447 punktów) i Portugalii (454). Najlepsze średnie wyniki uzyskali w 2000 roku uczniowie Japonii (557), Nowej Zelandii (537) i Finlandii (536).

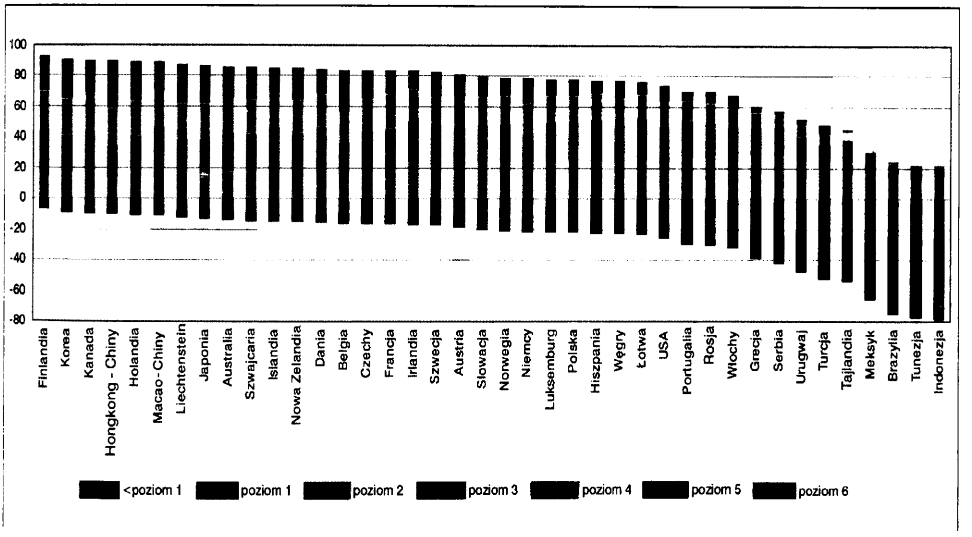
W Polsce w 2000. roku 25% uczniów (najsłabszych) nie przekroczyło 402 punktów, 25% uczniów (najlepszych) uzyskało wynik powyżej 542, a 5% najlepszych uczniów – wynik powyżej 632.

W stosunku do 2000. roku można stwierdzić, że w roku 2003. wyniki najsłabszych uczniów (w zadaniach dotyczących przestrzeni i kształtu oraz zmiany i związku) poprawiły się. Nie stwierdzono zmian w grupie uczniów najlepszych. (Sułowska, Marciniak, 2004, s. 10)

Hongkong-Chiny	550
Finlandia	544
Korea	542
Holandia	538
Liechtenstein	536
Japonia	534
Kanada	532
Belgia	529
Macao-Chiny	527
Szwajcaria	527
Australia	524
Nowa Zelandia	523
Czechy	516
Islandia	515
Dania	514
Francja	511
Szwecja	509
Austria	506
Irlandia	503
Niemcy	503
Słowacja	498
Norwegia	495
Luksemburg	493
Polska	490
Węgry	490
Hiszpania	485
Łotwa	483
USA	483
Rosja	468
Portugalia	466
Włochy	466
Grecja	445
Serbia	437
Turcja	423
Urugwaj	422
Tajlandia	417
Meksyk	385
Indonezja	360
Tunezja	359
Brazylia	356

Tabela 4.

Z z rysunku 1 poniżej można odczytać, jaki procent uczniów danego kraju osiągnął dany poziom matematycznej skali.



Rysunek 1.

Procent liczby polskich uczniów, którzy osiągnęli wyróżnione poziomy na skali umiejętności matematycznych, przedstawia poniższa tabela.

poziomy	**poniżej 1**	1	2	3	4	5	6
Polska	6,8	15,2	24,8	25,3	17,7	7,8	2,3
Świat	8,2	13,2	21,1	23,7	19,1	10,6	4,0

Tabela 5.

Z rysunku 1 i tabeli 5 możemy odczytać, że:

- najwyższy poziom 6 i poziom 5 osiągnęło mniej uczniów niż średnia dla badanych uczniów świata,
- na poziomie 1 i poniżej 1 (zaznaczony na rysunku 1 poniżej zera) znalazło się 22% polskich uczniów,
- poziomy umiejętności matematycznych do 2 włącznie osiągnęło 46,8% polskich uczniów.

Autorzy polskiego raportu badań PISA sformułowali następujące wnioski.

„W porównaniu z uczniami innych krajów, polscy uczniowie dobrze sobie radzili:
– z zadaniami, wymagającymi postępowania zgodnie z algorytmem znanym ze szkoły, albo explicite podanym w treści zadania; dotyczy to także zadań, które łatwo dało się rozbić na kilka prostych, dobrze wyodrębnionych kroków;
– z różnymi graficznymi formami prezentacji danych: diagramami, tabelami, wykresami; uczniowie potrafili odczytywać z nich dane, porównywać je, obliczać średnią;
– z zadaniami wykorzystującymi wyobraźnię i orientację przestrzenną, np. określanie stosunków przestrzennych, układanie deseni i klocków, posługiwanie się siatkami brył; z porównywaniem i szacowaniem odległości, obliczaniem długości łamanych;
– z zadaniami wymagającymi prostej optymalizacji (co wybrać, by w sumie było taniej; na ile pełnych kompletów wystarczy składników);
– z zadaniami, w których należy posłużyć się intuicją prawdopodobieństwa, losowości lub niezależności, osadzonymi w dobrze sprecyzowanym i bliskim matematyce kontekście; także z prostymi zadaniami kombinatorycznymi.
Na podstawie rozwiązań wielu zadań, niezależnie od ich tematyki, zauważono, że:
– nasi najsłabsi uczniowie są zwykle lepsi od najsłabszych uczniów świata;
– nasi najlepsi uczniowie są dość często słabsi od najlepszych uczniów świata („problem górnej ćwiartki");
– w porównaniu ze średnią światową, stosunkowo niewielu polskich uczniów potrafiło podać kompletne rozwiązanie zadania, natomiast wielu uczniów było w stanie rozwiązać je częściowo;
– istotną trudność sprawiało naszym uczniom samodzielne przeprowadzenie całego toku rozumowania: od stawiania hipotez przez projektowanie rozwiązania, aż po formułowanie własnych wniosków i opinii;
– niezależnie od działu matematyki, nasza młodzież gorzej radziła sobie z zadaniami wymagającymi abstrakcyjnego myślenia: analizy lub uogólnienia."
(Sułowska, Marciniak, 2004, w: Wyniki badania PISA 2003 w Polsce,s. 11)

Stosunek naszych uczniów do matematyki i strategie uczenia się jej

Niepokój i bezradność związane z uczeniem się matematyki deklaruje w ankietach, co najmniej 30% uczniów. Ponad 15% uczniów czuje się niepewnie w sytuacji, w której musieliby wykorzystać wiedzę i umiejętności matematyczne do rozwiązywania różnych problemów. Procent deklarowanej niepewności wzrasta w zależności od problemu i tak np.: 25% uczniów nie umiałoby obliczyć ceny telewizora po przecenie ani czasu trwania podróży; ponad 30% uczniów, czułoby się niezbyt pewnie obliczając, ile potrzeba terakoty na pokrycie podłogi, a prawie 50% uczniów nie potrafiłoby odczytać mapy, ani obliczyć zużycia paliwa.

Ma to także potwierdzenie w negatywnej ocenie: przygotowania, jakie daje szkoła (nie tylko matematyka) do dorosłego życia (przez 31,7% uczniów); pomocy szkoły w zdobyciu pewności siebie przy podejmowaniu decyzji (25,6%); przydatności zdobywanej wiedzy w przyszłej pracy zawodowej (19,7%).

Zastanawiające są wyniki dotyczące strategii uczenia się matematyki:

- ponad 60% uczniów stara się opanować jak najwięcej materiału pamięciowo (przy średniej 35% w badanych krajach),
- ponad 70% stara się wyćwiczyć przykłady podobne do tych podanych na lekcji (przy średniej 65% w badanych krajach),
- mniej niż 50% uczniów stara się wypracować nowe sposoby rozwiązania problemu (przy średniej 68% w badanych krajach),
- blisko 40% uczniów nie szuka powiązań wiedzy z zakresu matematyki z innymi przedmiotami,
- prawie 50% uczniów nie widzi, jak mogłoby wykorzystać wiedzę matematyczną w codziennym życiu.

„Wybór strategii uczenia się w połączeniu z pozytywnym stosunkiem do nauki, wiarą we własne siły i realną oceną swoich możliwości wpływa zasadniczo na wyniki uczenia się matematyki" (Romaniuk, 2004, s. 13).

Wyniki polskich uczniów w rozwiązywaniu problemów

Umiejętność rozwiązywania problemów wprowadzono jednorazowo do badań PISA w 2003 roku. Pomiaru umiejętności rozwiązywania problemów w programie PISA dokonano za pomocą zadań testowych, które obejmowały trzy typy problemów: *podejmowanie decyzji* (trzeba dokonać wyboru spośród alternatywnych możliwości przy uwzględnieniu szeregu ograniczeń), *analiza i konstruowanie systemów* (trzeba określić relację między poszczególnymi elementami lub/oraz zaplanować system uwzględniający występujące relacje) i *usuwanie nieprawidłowości* (trzeba naprawić wadliwie funkcjonujące urządzenie na podstawie informacji o usterkach).

W badaniach PISA polscy uczniowie uzyskali w umiejętności **rozwiązywania problemów** średnią **487 punktów** i zajęli 25.pozycję. Najwyższe wyniki uzyskały Korea (550), Finlandia (548), Hongkong (548).

Nasi uczniowie:

- w rozwiązywaniu problemów wypadli najsłabiej spośród badanych kluczowych umiejętności; w rozumowaniu w naukach przyrodniczych uzyskali 498 punktów, w czytaniu ze zrozumieniem 497 punktów, w umiejętnościach matematycznych 490 punktów,
- zazwyczaj gorzej radzili sobie niż ich rówieśnicy z zadaniami mierzącymi umiejętności rozwiązywania problemów na najtrudniejszym, trzecim poziomie. W tabeli 6 przedstawiono procent uczniów, którzy osiągnęli dany poziom w rozwiązywaniu problemów.

Kraj	Poniżej poziomu 1	Poziom 1	Poziom 2	Poziom 3
Polska	18	37	34	12
Świat	17	30	34	18
Korea	5	22	41	32
Finlandia	5	22	43	30
Honkong	8	21	36	35

Tabela 6. (OECD Raport PISA 2003)

- nie najlepiej radzili sobie z zadaniami, w których po zrozumieniu problemu należało zaplanować spójne, wielostopniowe rozwiązanie, a następnie odnieść się do ograniczeń zawartych w zadaniu,
- gorzej radzili sobie z pytaniami w nowym dla nich kontekście sytuacyjnym, niż z takimi, z którymi spotkali się w życiu lub na lekcjach,
- nie mieli problemu z odpowiedziami na proste pytania o wyszukanie informacji w treści wprowadzenia, spełniającej przedstawiony w pytaniu warunek (osiągnęli lepsze wyniki niż uzyskano średnio w świecie),
- nieźle radzili sobie w sytuacjach, kiedy należało podjąć decyzję biorąc pod uwagę kilka ograniczeń lub też łączyć proste informacje z różnych źródeł, ale podanych w raczej klarowny i znany sposób.

Chłopcy częściej niż dziewczęta uzyskiwali całkowite zaliczenie odpowiedzi, dziewczęta częściej zaliczenie częściowe. Uczniowie z rodzin o niższym statusie zawodowym i ekonomicznym, radzili sobie gorzej z rozwiązywaniem problemów.

W krajach, w których uczniowie osiągnęli wysokie wyniki we wszystkich dziedzinach, umiejętność rozwiązywania problemów wypadała najlepiej (Korea, Finlandia, Nowa Zelandia, Australia). Współczynnik korelacji między umiejętnością rozwiązywania problemów a pozostałymi badanymi umiejętnościami kluczowymi był najwyższy dla umiejętności matematycznych (0,904); dla rozumowania w naukach przyrodniczych wynosił (0,865), dla czytania ze zrozumieniem (0,862) (Ostrowska, 2004, s. 16-18).

3.2 Wyniki uczniów w części matematyczno-przyrodniczej egzaminu gimnazjalnego

W 2003 roku uczniowie w części matematyczno-przyrodniczej egzaminu gimnazjalnego uzyskali 51,5% możliwych do uzyskania punktów. Wyniki uzyskane w poszczególnych standardach, przedstawia poniżej tabela 7, sporządzona na podstawie wyników uczniów całej Polski. Dla porównania zestawione zostały wyniki z kolejnych lat, w których przeprowadzono egzamin.
(Dane dotyczą uczniów, którzy rozwiązywali podstawowy arkusz egzaminacyjny, i określają procent liczby punktów uzyskanych za wszystkie zadania sprawdzające umiejętności w badanym standardzie.)

Standardy wymagań i średnie uzyskanych wyników	2002 rok	**2003 rok**	2004 rok	2005 rok
I. Umiejętne stosowanie terminów, pojęć i procedur z zakresu przedmiotów matematyczno-przyrodniczych niezbędnych w praktyce życiowej i dalszym kształceniu	63,0%	**50,0%**	58,8%	52,8%
II. Wyszukiwanie i stosowanie informacji	67,3%	**70,7%**	52,3%	64,1%
III. Wskazywanie i opisywanie faktów, związków i zależności, w szczególności przyczynowo-skutkowych, funkcjonalnych, przestrzennych i czasowych	54,0%	**49,0%**	47,5%	38,6%
IV. Stosowanie zintegrowanej wiedzy i umiejętności do rozwiązywania problemów	34,0%	**29,5%**	30,3%	35,6%
Wynik ogółem (średnia punktów)	56,3%	**51,5%**	49,0%	48,5%

Tabela 7. (CKE, Wyniki egzaminu, sprawozdania 2002, 2003, 2004, 2005.)

Opanowanie umiejętności w kolejnych latach było zróżnicowane i wahało się od 29,5% do 70,7%. Średnia punktów jest bliska połowy możliwych do uzyskania punktów. Najlepiej opanowali uczniowie umiejętności w standardzie wyszukiwanie i stosowanie informacji w roku 2003. Najsłabiej uczniowie opanowali badane umiejętności w zakresie stosowania zintegrowanej wiedzy i umiejętności do rozwiązywania problemów.

Nasuwa się pytanie, kiedy można uznać, że dana umiejętność została przez uczniów opanowana?

Dana kategoria umiejętności została opanowana przez uczniów danej populacji, jeśli łatwość (p) danej części egzaminu gimnazjalnego powiązana z tą kategorią wynosi nie mniej niż 0,7 (uczeń uzyskał, co najmniej 70% punktów możliwych do zdobycia za te zadania). (Niemierko, 1990)

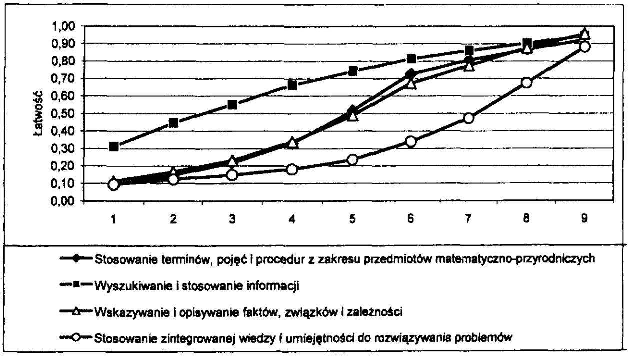
Dana aktywność odpowiada już rozwojowi przeciętnego dziecka danej klasy, jeśli procent poprawnych rozwiązań zadań ujawniających tę aktywność w badanej grupie przekracza 75; dana aktywność znajduje się w strefie najbliższego rozwoju, jeśli procent ten zawiera się w granicach 50-75; dana aktywność jest powyżej poziomu przeciętnego dziecka, jeżeli procent poprawnych rozwiązań zadań nie osiąga 50" (Siwek1990, 2005).

Jeśli przyjąć umowę za H. Siwek, to sprawdzane w 2003 umiejętności standardu I i II są w strefie najbliższych możliwości ucznia (uczeń nie opanował jeszcze tych umiejętności w takim stopniu, by mógł je wykonać samodzielnie, potrzebuje pomocy i współpracy osoby dorosłej). Natomiast umiejętności określone w III i IV standardzie są powyżej możliwości przeciętnego ucznia. Jeśli przyjąć umowę B. Niemierko, wówczas okaże się, że **tylko w roku 2003 uczniowie osiągnęli zadowalający poziom, i to w zakresie tylko standardu II.**

Szkoda, że w 2003 roku nie podano informacji o umiejętnościach uczniów w podpunktach standardów np. I. 2., czy III. 2. (Opracowano już w ten sposób wyniki w roku 2005.) Wówczas, z pewnym przybliżeniem można określić, w jakim stopniu osiągane są tradycyjnie ważne umiejętności w nauczaniu matematyki jak np. obliczenia w sytuacjach praktycznych, posługiwanie się procentami, mierzenie pól figur płaskich. Można byłoby też uzyskać potwierdzenie opinii, że tradycyjnie uznawane za trudne dla wielu uczniów posługiwanie się językiem symbolicznym we wzorach, wyrażeniach algebraicznych i równaniach jest trudne (z określeniem, dla jakiej części populacji uczniów).

Umiejętności uczniów osiągających najniższe i najwyższe wyniki w EG

Każdy uczeń uzyskał jako wynik egzaminu pewną liczbę punktów. Populację uczniów uporządkowano według uzyskanej liczby punktów od najniższych do najwyższych i podzielono na 9 grup, biorąc kolejno: 4%; 7%; 12%; 17%; 20%; 17%; 12%; 7%; 4% populacji uczniów. Dla każdej grupy standardowej dziewiątki (*standard nine*, stanin) obliczono łatwość zadań sprawdzających umiejętności danego standardu i zaznaczono w układzie współrzędnych. W ten sposób dla każdego z czterech sprawdzanych standardów wymagań sporządzono krzywe charakterystyczne z wykorzystaniem standardowej dziewiątki. Można z tych wykresów odczytać, że łatwość wszystkich sprawdzanych umiejętności uczniów wzrasta wraz ze wzrostem pozycji ucznia na skali standardowej dziewiątki.



Rysunek 2. (Dane OKE Kraków 2003, s. 32)

Statystyczny uczeń, którego wynik zajmuje pozycje do 4 staniny włącznie, nie opanował umiejętności z żadnego z czterech standardów wymagań na poziomie 0,70 (dotyczy to 40% populacji uczniów badanych przez OKE Kraków). Uczniowie na pozycji staninowej 7 i 8 opanowali na poziomie 0,70 umiejętności trzech standardów a tylko uczniowie 9 staniny opanowali umiejętności wszystkich czterech standardów.

Łatwe i trudne do opanowania umiejętności

Centralna Komisja Egzaminacyjna w sprawozdaniu z 2003 roku podsumowała umiejętności uczniów następująco:

„Uczniowie wykazali się przede wszystkim następującymi umiejętnościami (w nawiasach podano wartości wskaźnika ich łatwości):

- odczytywania (0,92) i przetwarzania (0,94) informacji podanych w formie procentowego diagramu kołowego, interpretacji informacji podanych w postaci diagramu słupkowego (0,82),
- odczytywania (0,81) i przetwarzania (0,77) informacji z mapy pogody, wskazywania związków przyczynowo-skutkowych przy wyjaśnianiu zróżnicowanego zasolenia wód Bałtyku (0,77),
- interpretowania informacji przedstawionych w tabeli (0,76), odczytywania i przetwarzania informacji przedstawionych na rysunku (0,74).

Najsłabiej opanowali uczniowie takie umiejętności, jak:

- stosowanie technik twórczego myślenia do rozwiązania zadania problemowego, łączącego wiedzę z zakresu fizyki i matematyki (0,22),
- interpretowanie własności funkcji (0,23), przekształcanie jej wzoru (0,29)
- wykorzystanie własności miar figur podobnych (0,29)".

Najwyższy wskaźnik łatwości zanotowano w przypadku zadań jednopunktowych, nie wymagających od zdającego skomplikowanych analiz ani obliczeń.

Zastosowane przez egzaminatorów zasady przyznawania punktów uczniom z dysleksją rozwojową, klasyfikacja błędów oraz wydłużenie czasu trwania egzaminu dla tych uczniów spowodowały, iż dysleksja rozwojowa nie wpływała w istotny sposób na wyniki uzyskane przez uczniów. Uczniowie z dysleksją wykazali się podobnymi osiągnięciami jak uczniowie bez tej dysfunkcji. Przy dostosowaniu zasad punktowania do specyfiki wynikającej z dysleksji uzyskiwali nawet wyniki wyższe".

(CKE, Warszawa, Egzamin gimnazjalny 2003, Sprawozdanie, s. 23.)

Opracowana w OKE Kraków analiza badanych umiejętności według współczynnika łatwości zadań standardowego arkusza części matematyczno-przyrodniczej egzaminu z 2003 roku pozwala zobaczyć, jakie umiejętności były dla uczniów najłatwiejsze, a jakie najtrudniejsze. Nie można twierdzić z pewnością, że uczeń, który uzyskał małą liczbę punktów, rozwiązywał najłatwiejsze zadania. Ale z dość dużym prawdopodobieństwem można określić, jakie umiejętności uczeń opanował, gdy badane umiejętności uporządkujemy malejąco według współczynnika łatwości i przyporządkujemy im staniny.

Łatwość (p)	Badana umiejętność Uczeń:	Kategoria umiejętności	Nr zadania	Liczba punktów	Stanin i procent popul.
0,94	przetwarza informacje (diagram kołowy, oblicza procent z liczby)	II/2	1.	1	1 (4%)
0,92	odczytuje informacje (diagram słupkowy, wyniki testu)	II/1	20.	1	
0,83	odczytuje informacje z mapy (pogody)	II/1	23.	1	
0,82	interpretuje informacje (diagram słupkowy, wyniki testu)	II/2	19.	1	
0,78	interpretuje informacje z tabeli, określa rodzaj zależności	II/2	12.	1	

Tabela 8. (Ciąg dalszy na następnej stronie.)

0,78	wskazuje związki przyczynowo-skutkowe w przyrodzie	III/4	25.	1	1 (4%)
0,76	przetwarza informacje (procentowy diagram kołowy)	II/2	2.	1	
0,76	odczytuje i przetwarza informacje (rysunek, przekrój)	II/2	14.	1	
0,76	przetwarza informacje z mapy (pogody)	II/2	24.	1	
0,73	posługuje się językiem symboli (chemicznych)	III/2	5.	1	2 (7%)
0,72	wykonuje obliczenia (liczby cząsteczek wody w 0,25 mola wody)	I/2	3.	1	
0,72	wykonuje obliczenia (oblicza masę cząsteczki)	I/2	6.	1	
0,70	analizuje wykres funkcji (przyspieszenia w czasie)	III/3	8.	1	3 (12%)
0,68	wykorzystuje prawa fizyki do objaśniania zależności (natężenia od napięcia)	III/1	10.	1	
0,61	oblicza wartość funkcji ($y = -0,05x + 45$ dla $x = 200$)	III/3	27.	2	
0,60	analizuje wykres funkcji (szybkość samochodu $v(t)$)	III/3	9.	1	4 (17%)
0,59	wskazuje prawidłowości w funkcjonowaniu układów (wdech, wydech)	III/1	18.	1	
0,59	wybiera właściwe terminy do opisu obiektów przyrodniczych (erozja i akumulacja)	I/1	31.	3	
0,56	przetwarza informacje (diagram słupkowy, wyniki testu)	II/2	21.	1	
0,54	kojarzy różnorodne fakty i wyciąga wnioski (zależność temperatury wrzenia wody od ciśnienia)	IV/1	22.	1	5 (20%)
0,53	interpretuje informacje (wykresy szybkość samochodu)	II/2	7.	1	
0,53	wykonuje obliczenia procentowe (procent z liczby, porównanie różnicowe, zamiana jednostek masy)	I/2	11.	1	
0,52	odczytuje informacje (wartościowość pierwiastków)	II/1	4.	1	
0,47	przewiduje wynik doświadczenia (chemicznego)	IV/4	17.	1	
0,47	posługuje się własnościami figur (oblicza pole figury płaskiej (pierścienia kołowego))	I/3	33.	5	6 (17%)
0,46	wykonuje obliczenia procentowe (oblicza odsetki i odlicza podatek)	I/2	26.	3	
0,46	interpretuje własności funkcji ($y = -0,05x + 45$ dla $x = 0$)	III/3	28.	1	7 (11%)
0,41	porównuje informacje (z przyrody)	II/2	15.	1	

Tabela 8. (Ciąg dalszy na następnej stronie.)

0,39	posługuje się językiem symboli i wyrażeń algebraicznych (oblicza wysokość stożka, gdy zna objętość i pole podstawy, zapisuje symbolicznie wyrażenie słowne)	III/2	34.	2	7 (11%)
0,34	wybiera odpowiednie terminy do opisu organizmów	I/1	16.	1	
0,32	kojarzy model matematyczny z sytuacją problemową (wykorzystuje własności miar figur podobnych w przestrzeni)	IV/3	13.	1	8 (7%)
0,31	przekształca wzór funkcji ($y = -0,05x+45$, wylicza x)	III/3	30.	2	
0,25	interpretuje własności funkcji ($y = -0,05x + 45$ dla $y = 0$)	III/3	29.	2	
0,23	stosuje techniki twórczego rozwiązywania problemów (wykorzystuje prawa fizyki i własności miarowe trójkątów podobnych)	IV/1	32.	5	9 (4%)

Tabela 8.

Najłatwiejsze były dla uczniów zadania proste, za które otrzymywali 1 punkt. Były to zadania zamknięte, w których uczeń wybierał poprawną odpowiedź spośród czterech możliwych. Najłatwiejsze okazały się umiejętności standardu II (odczytywanie, przetwarzanie i interpretowanie informacji z tabel, wykresów i rysunków, i wymagały wykonania prostych rachunków (standard I)) oraz standardu III (odczytywanie zależności przyczynowo-skutkowych w przyrodzie (przyczyny niskiego zasolenia Bałtyku) i w fizyce (przyspieszenia samochodu w czasie, zużycia benzyny na przejechanie 200 km, natężenia i napięcia prądu)). Tylko takimi umiejętnościami wykazali się uczniowie 1 i 2 i 3 staniny, czyli 23% populacji uczniów.

Umiejętności uczniów w zakresie posługiwania się językiem symboli literowych we wzorach funkcji i wzorach na pola figur nie zostały przez uczniów opanowane w zadowalającym stopniu. Świadczy o tym współczynnik łatwości zadań, w których sprawdzano te umiejętności, waha się on od 0,25 do 0,61.

Największe trudności sprawia uczniom stosowanie zintegrowanej wiedzy w rozwiązywaniu problemów. Suma uzyskanych częściowych punktów za 32. zadanie otwarte nie przekracza 25% możliwych do uzyskania punktów.

3.3 Wnioski dotyczące matematycznych umiejętności polskich uczniów na podstawie badań PISA i EGMP

1. **Średnie wyniki naszych uczniów nie są wysokie**: średnia w badaniach EG to 51,5% możliwych do uzyskania punktów, a średnia wyników

PISA 2003 na skali matematycznych umiejętności to 490 punktów i jest poniżej średniej w badanych krajach świata. Z takim średnim wynikiem nasi uczniowie sięgają 3 poziomu na skali matematycznych umiejętności.

2. **Niewielki procent polskich uczniów osiągnął najwyższy poziom** 6. na skali matematycznych umiejętności w badaniach PISA. Dla możliwości porównania, w tabeli 9 zestawione zostały (z zaokrągleniem do całości) procenty liczb uczniów, którzy osiągnęli dany poziom na skali matematycznych umiejętności w krajach o najwyższych wynikach na świecie, oraz średnie dla wszystkich uczniów badanych na świecie i w Polsce. Po prawej stronie tabeli procentowym wynikom uczniów zostały (z pewnym przybliżeniem) przyporządkowane także grupy standardowej dziewiątki (staniny).

Hongkong	Finlandia	Holandia	Świat	Polska	Poziom PISA	Stanin EG
11%	7%	7%	4%	2%	Poziom 6	9
20%	17%	18%	11%	8%	Poziom 5	8
25%	26%	23%	19%	18%	Poziom 4	7
20%	28%	23%	24%	25%	Poziom 3	5-6
14%	16%	18%	21%	25%	Poziom 2	4
7%	5%	8%	13%	15%	Poziom 1	1-3
4%	1%	3%	8%	7%	Poniżej p1	

Tabela 9.

Warto zwrócić uwagę, że procent liczby uczniów na poziomie 6 i na poziomie 5 jest w innych krajach znacznie wyższy niż w Polsce. Tylko 10% polskich uczniów znalazło się na tych poziomach.

W EG tylko uczniowie „górnej ćwiartki" (czyli 25% najlepszych) uzyskali, co najmniej 70% możliwych do uzyskania punktów, czyli wykazali się oczekiwanym opanowaniem badanych umiejętności. Maksymalną liczbę punktów w EGMP uzyskało 0,26% badanej populacji (426 uczniów z egzaminu i 1043 laureatów wojewódzkich konkursów przedmiotowych, zwolnionych z egzaminu gimnazjalnego w części matematyczno-przyrodniczej).

3. Uczniowie wykazali się umiejętnościami w zakresie odczytywania, przetwarzania i interpretowania informacji danych w diagramach, tabelach i na rysunku.

4. Badani uczniowie w EG najsłabiej opanowali stosowanie technik twórczego myślenia w rozwiązywaniu zadania problemowego, łączącego wiedzę z fizyki i matematyki. W badaniach PISA w rozwiązywaniu pro-

blemów nasi uczniowie uzyskali najniższy średni wynik wśród czterech badanych dziedzin.

5. Wielu naszych uczniów rozpoczyna rozwiązywać zadanie, lecz niewielu potrafi samodzielnie przeprowadzić cały tok rozumowania od początku do końca. Jeśli w zadaniu jest kilka pytań, to nie odpowiadają na wszystkie pytania, zazwyczaj udzielają odpowiedzi tylko na początkowe pytania.

4 Podsumowanie, wnioski ogólne i postulaty dydaktyczne

Skoro wyniki tych różnych pomiarów są zgodne, to wyniki EG można uważać za wiarygodny miernik kompetencji matematycznych polskich uczniów na skali międzynarodowej.

Powinny być nadal prowadzone prace teoretyczne i empiryczne nad określeniem matematycznych umiejętności, które:

- chcemy, by były osiągane w powszechnym nauczaniu przez 16-letnich uczniów,
- są w zakresie możliwości uczniów,
- są możliwe do zbadania wypracowywanymi narzędziami.

Sformułowane przez PISA umiejętności matematyczne można (należy) traktować jako podstawę przy formułowaniu standardów wymagań.

Po ogłoszeniu w grudniu 2004 wyników PISA 2003 prowadzone są szerokie dyskusje na temat **koniecznych zmian w edukacji matematycznej** wśród nauczycieli matematyki w Stowarzyszeniu Nauczycieli Matematyki (SNM), w instytucjach kształcących i doskonalących nauczycieli (akademiach pedagogicznych, ośrodkach doskonalenia nauczycieli) oraz w Związku Nauczycielstwa Polskiego. Okręgowe komisje egzaminacyjne informując szkoły i nauczycieli o wynikach egzaminów zewnętrznych zachęcają do analizy wyników, analizy błędów popełnianych przez uczniów i wypracowania sposobów zmian w kierunku poprawy jakości kształcenia. Wśród tych dyskusji proponuje się:

- **ewolucyjne zmiany w podstawie programowej i standardach wymagań egzaminacyjnych, na przykład:**
  - zachowanie treści i umiejętności matematycznych, których dobrze się uczy i uczniowie w ich zakresie uzyskują w rozwiązywanych zadaniach wysoki współczynnik łatwości,

- uszczegółowienie niektórych treści w podstawie programowej np. w gimnazjum wskazanie przekształceń geometrycznych, jakie rozumiemy pod sformułowaniem „przykłady przekształceń geometrycznych"; wskazanie przykładów „prostych doświadczeń losowych"; wskazanie przykładów „nieskomplikowanych rozumowań matematycznych", jakich przeprowadzenia oczekujemy od ucznia po gimnazjum,
- *podjęcie próby skorelowania treści i koniecznych umiejętności* w zakresie przedmiotów matematyczno-przyrodniczych w nauczaniu, a nie tylko na egzaminie,
- uwzględnienie w standardach wymagań egzaminacyjnych wyników przeprowadzonych egzaminów gimnazjalnych.

- **zmiany w sposobie kształcenia nauczycieli:**

  - by byli lepiej przygotowani do kształtowania twórczej postawy uczniów wobec problemów i rozwijania aktywności matematycznej uczniów, ich samodzielności i odpowiedzialności w uczeniu się,
  - by w procesie uczenia się i nauczania matematyki swoich uczniów byli w większym stopniu badaczami obserwującymi postępy w matematycznej wiedzy swoich uczniów i szukali bardziej skutecznych metod i środków uczenia.

- **powrót do uczenia matematyki przez rozwiązywanie problemów** (nie tylko uczenia stosowania matematyki w rozwiązywaniu problemów). Nie jest to odkrycie rzeczy nowej, dlatego przytoczę tutaj kilka cytatów, które tę propozycję dostatecznie uzasadniają: „Rozwiązywanie problemów było osnową nauczania matematyki od czasu papirusu Rhinda (...) Również dzisiaj problem jest osnową nauczania matematyki w szkole średniej i jestem zażenowany będąc zobowiązanym podkreślać i motywować rzecz tak oczywistą" (Polya, 1966, s. 5; cytuję za A. Z. Krygowską 1966, s. 72). „Zasada nauczania przez rozwiązywanie problemów jest konsekwencją samej natury matematyki" (Krygowska 1966, s. 72). „Tylko w toku rozwiązywania matematycznych problemów uczeń zdobywa kulturę myślenia, którą może dać uczenie się matematyki. Ale skuteczność tego procesu w tym zakresie zależy od wielu czynników, od tematyki zadań, od poziomu ich trudności, od sposobu organizowania pracy ucznia przy rozwiązywaniu problemu, od formy, w jakiej się te zadania uczniowi przedstawia, od motywacji koniecznej przy podejmowaniu wysiłku związanego z rozwiązaniem zadania itd." (Krygowska

1977, s. 4). Nauczanie matematyki powinno mieć zawsze charakter problemowy, być „ *zainicjowane zadaniem*, które uczniowie powinni dobrze zrozumieć i przyswoić sobie, które ma się stać *ich* zadaniem i które *chcą* rozwiązać (...) Bez aktywnego udziału ucznia skuteczność nauczania jest znikoma" (Turnau, 1990, s. 51).

- **rozwijanie aktywności matematycznej uczniów w procesie uczenia matematyki.** Takie elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w nauczaniu matematyki dla każdego i są możliwe do prowokowania i rozwijania w postaci dostosowanej do poziomu szkolnego wskazała A. Z. Krygowska na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Warszawie w 1983 roku (A. Z. Krygowska, 1986). Także M. Niss, matematyk-ekspert PISA koncentruje nauczanie matematyki wokół matematycznej aktywności (M. Niss, 2002).

Literatura

B i a ł e c k i, I., B l u m s z t a j n, A., C y n g o t, D.: 2003, *PISA – Program Międzynarodowej Oceny Umiejętności Uczniów, Ośrodek Usług Pedagogicznych i Socjalnych ZNP*, Warszawa.

CKE,: 2002, Egzamin gimnazjalny, Warszawa, http://www.cke.edu.pl/

CKE,: 2003, Egzamin gimnazjalny 2003, Sprawozdanie (Skrót), Warszawa.

CKE,: 2004, Egzamin gimnazjalny, Wyniki krajowe rok 2003, 2004, http://www.cke.edu.pl/

CKE,: 2005, Egzamin gimnazjalny, Wyniki krajowe rok 2005 http://www.cke.edu.pl/

F e d o r o w i c z, M.: 2004, Badanie PISA i jego rezultaty, w: *Wyniki badania 2003 w Polsce, PISA*, MENiS, 2-4.

F e d o r o w i c z, M.: 2004, Charakter zmiany 2000-2003 – czytanie ze zrozumieniem, w: *Wyniki badania 2003 w Polsce, PISA*, MENiS, 27-31.

H a m a n, J.: 2004, Populacja i próba uczniów w badaniu PISA, w: *Wyniki badania 2003 w Polsce, PISA*, MENiS, 5.

K r y g o w s k a, A. Z.: 1966, Kształcenie aktywności matematycznej uczniów i rola problemów w tym kształceniu, w: *Modernizacja kształcenia matematycznego i jej wpływ na rozwój dydaktyki matematyki (wybór artykułów A. Z. Krygowskiej z lat 1958-1972)* WNWSP Kraków, 71-99.

K r y g o w s k a, A. Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki,* część 3, WSiP, Warszawa.

K r y g o w s k a, A. Z.: 1986, Elementy aktywności matematycznej, które powinny odgrywać znaczącą rolę w matematyce dla wszystkich, *Roczniki Pol-*

skiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki **6**, 25-41.

K u r c z, I.: 1978, Czynność uczenia się w: *Psychologia* pod redakcją T. Tomaszewskiego, 1978, PWN, Warszawa, 246-350.

M a r c i n i a k, Z.: 2003, PISA, Program Międzynarodowego Sprawdzania Umiejętności Uczniów, *Matematyka w szkole* **8**, 4-5.

N i e m i e r k o, B.: 1990, *Pomiar wyników kształcenia*, WSiP, Warszawa.

N i s s, M.: 2002, *Quantitave Literacy and Mathematical Competencies*, http://www.maa.org/Ql/pgs215-220.pdf

OECD, *Programme for International Student Assessment*, PISA 2003, www.pisa.oecd.org

OKE, Kraków 2003: *Biuletyn Informacyjny OKE, Informacja o wynikach egzaminu w klasie III gimnazjum w roku 2003*, Kraków, czerwiec 2003.

OKE, Kraków 2003: Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie, Wydział Badań i Analiz, *Wyniki egzaminu gimnazjalnego przeprowadzonego w województwach: lubelskim, małopolskim i podkarpackim w dniach 8 i 9 maja 2003*, Kraków, lipiec – wrzesień 2003.

OKE, Kraków 2003: *Biuletyn Informacyjny OKE, Wykorzystanie wyników sprawdzianu w szkole podstawowej i egzaminu gimnazjalnego w roku 2003*, Kraków, wrzesień 2003.

O s t r o w s k a, B.: 2004, „Rozwiązywanie problemów" w programie PISA, w: *Wyniki badania 2003 w Polsce, PISA*, MENiS, 14-18.

P o l y a, G.: 1966, On teaching problem-solving/ materiały na Kongres CIEM, 1966, Moskwa/ cytowane za A. Z. Krygowską (1966).

R o m a n i u k, A.: 2004, Uczenie się matematyki. Motywacja i strategie uczniów, w: *Wyniki badania 2003 w Polsce, PISA*, MENiS, 13.

R o m a n i u k, A., S z t a b i ń s k i, P.: 2004, Uczniowie i ich szkoły, w: *Wyniki badania 2003 w Polsce, PISA*, MENiS, 35-38.

S i w e k, H.: 1990, Pojęcie wielkości proporcjonalnych a pojęcie liczby u dzieci ze szkoły specjalnej w porównaniu z dziećmi ze szkoły masowej. *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V Dydaktyka matematyki* **12**, 193-202.

S i w e k, H.: 2005, *Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej*, WSiP, Warszawa.

S u ł o w s k a, A., M a r c i n i a k, Z.: 2004, Matematyka w programie PISA, w: *Wyniki badania 2003 w Polsce, PISA*, MENiS, 6-12.

S z u r i g, Z.: 1978, *Konstrukcje testów i sprawdzianów z matematyki*, WSiP, Warszawa.

T r a c z, M.: 2005, Badanie wiedzy i umiejętności uczniów w założeniu egzaminu gimnazjalnego – grupa matematyczno-przyrodnicza i badań PISA, w:

Jak praktycznie wykorzystać pomiar dydaktyczny w oświacie? B. Niemierko, K. Szmigiel (red), Wydawnictwo Rożak, 137-141.
T u r n a u, S.: 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyki,* PWN, Warszawa.

A Comparative Analysis of the Results of Mathematical Literacy Evaluation of 16-year-old Students in the PISA Programme and the Middle School Exam in 2003

S u m m a r y

In 2003 in Poland mathematical literacy of the same 16-year-old students was evaluated both in the PISA programme and in the state middle school exam. The PISA evaluation was conducted on a randomly selected sample of students and the conclusions were formulated globally for the whole population. The middle school exam was taken by all students. Despite the differences in the evaluation the following conclusions were drawn:

Average score of our students was not high: the average in the middle school examination equalled 51.5% of all available points, and the average in the PISA 2003 evaluation on a mathematical scale of literacy was 490 points, which was below the world average in the evaluated countries (500 points).

Only 10% of Polish students achieved high levels 5 and 6 on a mathematical scale of literacy in the PISA evaluation, while on average 11% of world students achieved these levels, and in the countries with the highest results e.g. in Hong Kong – 31%, Finland – 25%, and in Netherlands – 24% students. In middle school exam these best students were placed on the Standard Nine 8^{th} and 9^{th} levels. In school exam only students of the "top quarter" (i.e. 25% of the best) scored at least 70% of the available points, thus proving that they achieved the expected literacy that was subject to evaluation.

In both evaluations the students presented the ability to read, process and interpret information given in diagrams, tables and graphs. They had difficulty with creative thinking techniques in problem solving. Many students began to solve a problem, but few managed to independently conduct the whole process of reasoning from the beginning to the end.

As a result of this analysis the following suggestions have been formulated:

1. To use the levels of the PISA mathematical scale of literacy in the evolutionary changes of the curriculum basis and the requirement standards.
2. To return to mathematical education through problem solving and to develop mathematical activities of students in the process of mathematical education.
3. To alter the manner of teacher training so that the teachers are able to develop mathematical activities of students and to form the students' creative approach to problems.

Aneks 1.
Podstawowe informacje o badaniach PISA

1. Struktura Programu Międzynarodowej Oceny Umiejętności Uczniów (PISA)

Programme for International Student Assessment Organization for Ocenomic Cooperation and Development (OECD/PISA) — Program Międzynarodowej Oceny Umiejętności Uczniów Organizacji Współpracy Gospodarczej i Rozwoju to przedsięwzięcie polegające na przeprowadzeniu testów, które mierzą poziom wiedzy i umiejętności uczniów w dziedzinach mających znaczenie dla ich dalszej drogi życiowej. Powstał w 1997 roku. Badania zostały zaplanowane na lata 2000, 2003, 2006 i cyklicznie nimi objęte są umiejętności kluczowe (domeny): **czytanie ze zrozumieniem (reading literacy), umiejętności matematyczne (mathematical literacy), rozumowanie w naukach przyrodniczych (scientific literacy).** W roku 2000 bardziej szczegółowo badano czytanie ze zrozumieniem (2/3 zadań testu było temu poświęconych), w 2003 roku umiejętności matematyczne (i też 2/3 zadań było temu poświęconych), w 2006 planuje się badanie rozumowania w naukach przyrodniczych. **Rozwiązywanie problemów (problem solving)** było badane dodatkowo w roku 2003. Badania obejmują uczniów jednego rocznika bezpośrednio po ukończeniu 15. roku życia (co w większości krajów OECD zbiega się z ostatnim rokiem obowiązkowego nauczania). Z założenia abstrahują one od programów szkolnych, ale jednak bazują na podstawowych dziedzinach, jakie uczeń poznaje i ugruntowuje, by móc je dalej rozwijać. Badania odwołują się do idei uczenia się przez całe życie (*„lifelong learnnig" - LLL)* i do pojęcia *alfabetyzmu* (funkcjonalnego), co pozwala na sprawdzanie wiedzy i umiejętności z różnych dziedzin zakotwiczonych w realnych sytuacjach życiowych.

Alfabetyzm to nie tylko umiejętność czytania i pisania, ale podstawowy zasób umiejętności i wiedzy potrzebny w dorosłym życiu, zależny od wymagań cywilizacyjnych i społecznych danej epoki, nabywany przez całe życie nie tylko podczas formalnej nauki. Jest to cecha stopniowalna tzn. taka, że każdy posiada ją w jakimś stopniu i testy umiejętności pozwalają określić jej poziom. W debatach szeroko prowadzonych od połowy lat dziewięćdziesiątych zgodzono się na to, że „jeśli uczniowie mają wyrobić w sobie zdolność ustawicznego kształcenia się, należy zapewnić im solidne podstawy, (...) za takie uznano rozumienie tekstu, umiejętności matematyczne, rozumowanie w naukach przyrodniczych. Muszą oni potrafić zorganizować sobie i regulować proces uczenia się, samodzielnego i w grupach, jak również pokonywać powstające przy tym trudności." (Białecki I., i in. 2003, 49; 7).

Badania koordynowane są przez konsorcjum instytutów naukowych z pięciu krajów świata: Australian Counsil for Educational Research (ACER) z Australii, Netherlands National Institute for Educational Measurement (CITO) z Holandii, Service de' Pe'dagogie Expe'rimentale Universite' de Le'gie (SPE) z Belgii, National Institute for Educational Policy Research (NIER) z Japonii i Westat ze Stanów Zjednoczonych Ameryki. W każdym kraju, który bierze udział w badaniach, istnieją zespoły badawcze PISA a ich przedstawiciele tworzą forum krajowych kierowników badań (NPM-National Project Menagers). Przedstawiciele rządów tworzą forum krajowych przedstawicieli rządowych (PGB-PISA Governing Board). Do każdej domeny (umiejętności kluczowej) objętej badaniami powołano grupę międzynarodowych ekspertów, która od strony teoretycznej przygotowuje badania i koordynuje tworzone międzynarodowo narzędzia badawcze. Przygotowanie badań trwa około trzy lata, a opracowanie wyników następne półtora roku.

W badaniach w 2000. roku wzięli udział uczniowie z 32 krajów świata. W roku 2003. przystąpiło do badań i objęto nimi 276 165 uczniów już z 41 krajów świata. Z krajów zrzeszonych w OECD wzięły udział w badaniach: Australia, Austria, Belgia, Czechy, Dania, Finlandia, Francja, Grecja, Hiszpania, Holandia, Irlandia, Islandia, Japonia, Kanada, Korea, Luksemburg, Meksyk, Niemcy, Norwegia, Nowa Zelandia, Polska, Portugalia, Słowacja, Szwajcaria, Szwecja, Turcja, USA, Węgry, Włochy, a z krajów partnerskich: Brazylia, Hongkong-Chiny, Indonezja, Lichtenstein, Łotwa, Macao-Chiny, Rosja, Serbia, Tajlandia, Tunezja, Urugwaj.

Badano również wpływ statusu społeczno-ekonomicznego (International socio-economic index of occupational status, ISEI) na wyniki w testach biorąc pod uwagę **zawód rodziców**, jego prestiż społeczny, wymagane do jego wykonywania **wykształcenie** i osiągane w nim typowe **zarobki**. Brano pod uwagę wyższą spośród wartości wskaźnika ISEI obojga rodziców (HISEI). Jak się okazuje - „uczniowie pochodzący z rodzin o niższym statusie społecznym wciąż są uczniami „gorszych" szkół" (jakość szkół mierzona jest średnim poziomem ich uczniów) (Haman, 2004, s. 25). Również zauważono, że **stosunek uczniów do szkoły** jako instytucji oraz **relacje uczniów z nauczycielami** istotnie wpływają na kształtowanie się motywacji ucznia, na wypracowanie wewnętrznego przekonania do sensowności uczenia się i mają wpływ na jego wyniki w nauce.

2. Organizacja badań i zbiorcze wyniki polskich uczniów

W Polsce badania, zlecone przez Ministerstwo Edukacji Narodowej i Sportu (obecnie i Wychowania), prowadzą Centrum Badań Polityki Naukowej i Szkolnictwa Wyższego Uniwersytetu Warszawskiego oraz Instytut Filozofii i Socjologii Polskiej Akademii Nauk. Członkiem międzynarodowej grupy ekspertów w zakresie matematyki jest prof. Z. Marciniak, a w zakresie nauk przyrodniczych prof. E. Bartnik.

W 2000 roku reprezentatywna polska próba losowa liczyła 4037 uczniów z 146 szkół (45 liceów ogólnokształcących, 52 średnich szkół zawodowych, 44 szkół zawodowych i 5 szkół podstawowych). W 2003 roku w badaniu wzięło udział 4383 uczniów ze 160 gimnazjów (w tym 22 uczniów liceów ogólnokształcących). Stanowili oni w przybliżeniu 0,8% populacji wszystkich uczniów. Byli to w większości uczniowie klas trzecich gimnazjów. Z badań zostali wyłączeni uczniowie szkół specjalnych, uczniowie szkół podstawowych i szkół zawodowych („opóźnieni" w realizacji normalnego toku nauki; stanowili oni 3,1% populacji). Na przeprowadzenie badań potrzebna była zgoda dyrektora szkoły i zgoda rodziców ucznia.

W szkołach kierowali badaniami specjalnie przeszkoleni pracownicy programu PISA, niezależni od szkoły, zgodnie z ustaloną międzynarodową procedurą. Uczeń otrzymywał zeszyt z zestawem zadań (jednym z dwunastu) i przez 2 godziny rozwiązywał zadania tego zestawu. Po przerwie przez $\frac{1}{2}$ godziny wypełniał kwestionariusz o sobie, swoich warunkach uczenia się w domu i w szkole, stosunku do matematyki i strategiach jej uczenia się. Dyrektor szkoły również wypełniał kwestionariusz dotyczący warunków pracy szkoły, zakresu jej autonomii finansowej, wynagradzania nauczycieli, doboru nauczycieli, programów, podręczników, stylu pracy nauczycieli i wyposażenia szkoły w pracownie, pomoce, komputery.

Średnie wyniki w umiejętnościach kluczowych, jakie polscy uczniowie uzyskali w badaniach z roku 2000 i 2003 można odczytać z poniżej tabeli.

Zakres (domena)	w roku 2003 (31 państw)	w roku 2003 (40 państw)
Czytanie ze zrozumieniem	479 punktów – 24. pozycja	497 punktów – 16. pozycja*
Umiejętności matematyczne	470 punktów – 24. pozycja	490 punktów – 24. pozycja
Rozumowanie w naukach przyrodniczych	483 punkty – 21. pozycja	498 punktów – 19. pozycja

Tabela 1.

„Polscy gimnazjaliści mają stosunkowo negatywny stosunek do szkoły (za-

*Średnia dla krajów OECD w czytaniu ze zrozumieniem wynosiła w 2003 roku 494 punkty. Wynik 497 punktów jest jedynym wynikiem polskich uczniów powyżej średniej. Wysoka średnia w czytaniu, ze zrozumieniem ma potwierdzenie w wynikach EG części humanistycznej (p. Aneks 2).

deklarowany w ankietach przez 59,8% uczniów) w porównaniu z uczniami innych krajów szczególnie, jeśli chodzi o ocenę przydatności wiedzy szkolnej dla dorosłego życia i pracy. (...) Zbiorczy wskaźnik negatywnej oceny nauczycieli, który zadeklarowany został przez 68,8% uczniów, jest wyższy niż w krajach wybranych do porównania". (Romaniuk, Sztabiński, 2004, s. 38).

Więcej informacji o badaniach można znaleźć na stronach internetowych www.ifispan.waw.pl/pisa lub www.oecd.org. link PISA

3. Przykłady zadań z badania umiejętności matematycznych uczniów PISA 2003.

W badaniach PISA 2003 użyto 85 standaryzowanych zadań, weselekcjonowanych spośród 400 wstępnie opracowanych i zgłoszonych do konsorcjum przez krajowe zespoły badań. Charakterystykę zadań i ich ilościowy rozkład można odczytać z tabeli 2.

Treści matematyczne	liczba zadań	*Procesy myślenia*	liczba zadań	*Konteksty sytuacji*	liczba zadań	*Formy zadania*	liczba zadań
przestrzeń i kształt	20	odtwarzanie	26	osobiste	18	prosty test wyboru	17
zmiana i związki	22	powiązania	40	edukacyjne	15	złożony test wyboru	11
ilość	23	rozumowanie	19	zawodowe	5	krótka odpowiedź	13
niepewność	20			publiczne	29	krótka wypowiedź	23
				naukowe	18	długa wypowiedź	21
razem	85		85		85		85
a)		b)		c)		d)	

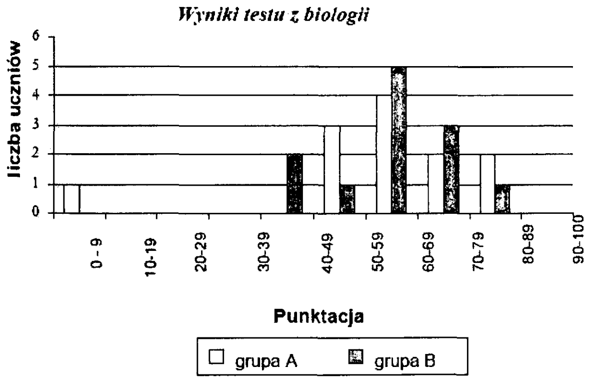
Tabela 2.

Na stronach internetowych ujawniono 19 zadań i 29 sformułowanych w nich pytań. Niżej zamieszczone są trzy przykłady takich zadań. W nawiasie kursywą podany jest opis pytania, a więc jakich treści, procesów myślenia i sytuacji dane pytanie dotyczyło. Dla pokazania sposobu oceny uczniowskich rozwiązań zadań w przykładzie 3. do pytania 3. zacytowane są klucze kodowe. Wyniki tego zadania oraz jego analizę przedstawiono na wykresach i w tabeli (rysunek 4).

Przykład 1: Wyniki testu.

Pytanie 1: (*niepewność – powiązania – sytuacje edukacyjne*)

Poniższy diagram pokazuje wyniki testu z biologii uzyskane przez dwie grupy: grupę A i grupę B. Średnia wyników grupy A to 62,0 punktów; średnia grupy B – 64,5 punktu. Aby zaliczyć test, trzeba zdobyć co najmniej 50 punktów.



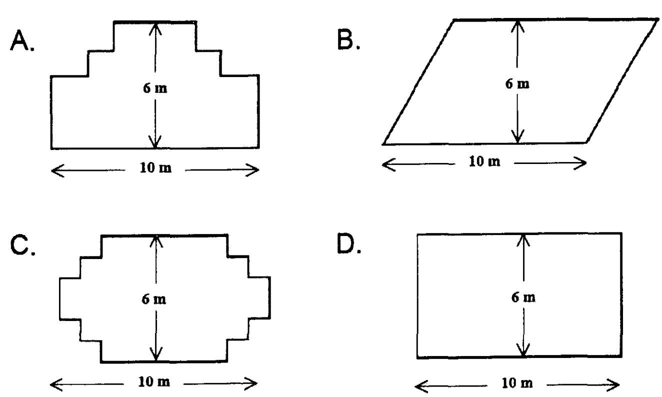
Rysunek 1.

Patrząc na diagram nauczyciel twierdzi, że grupa B rozwiązała test lepiej niż grupa A. Uczniowie grupy A nie zgadzają się z tą opinią. Próbują przekonać nauczyciela, że wynik grupy B nie jest rzeczą pewną. Podaj jeden, wynikający z diagramu, matematyczny argument, jakiego mogliby użyć uczniowie z grupy A.

Przykład 2: Stolarz.

Pytanie 1: (*przestrzeń – kształt – sytuacje zawodowe*)

Pewien stolarz ma deski o łącznej długości 32 metry, którymi chce obramować grządkę w ogrodzie. Ma do wyboru następujące kształty grządek:



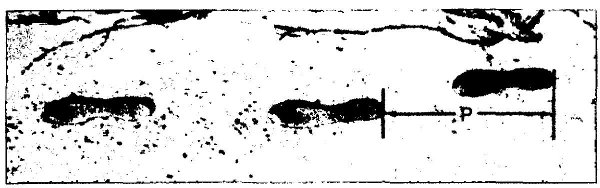
Rysunek 2.

Dla każdego z przedstawionych kształtów grządki odpowiedz, czy deski o łącznej długości 32 metry wystarczą do obramowania go. Otocz kółkiem Tak lub Nie.

Kształt grządki	Czy 32 m desek wystarczy na wykonanie obramowania takiego klombu?
Kształt A	Tak/Nie
Kształt B	Tak/Nie
Kształt C	Tak/Nie
Kształt D	Tak/Nie

Tabela 3.

Przykład 3: Kroki



Rysunek 3.

Na rysunku widać ślady stóp idącego mężczyzny. Długość kroku P to odległość pomiędzy końcami dwóch kolejnych śladów. Dla mężczyzn, wzór $n/P = 140$ podaje przybliżoną zależność między n a P, gdzie: n = liczba kroków na minutę, P = długość kroku *w metrach.*

Pytanie 1 (*zmiana i związki – odtwarzanie – sytuacje osobiste*)

Zastosuj ten wzór do kroków Janka i oblicz, jaka jest długość jego kroku, jeśli Janek stawia 70 kroków na minutę. Przedstaw swoje obliczenia.

Pytanie 2 nieujawnione.

Pytanie 3 (*zmiana i związki – powiązanie – sytuacje osobiste*)

Bernard wie, że długość jego kroku wynosi 0,8 metra. Zastosuj wzór do jego kroków. Oblicz, z jaką prędkością chodzi Bernard. Podaj odpowiedź w metrach na minutę oraz w kilometrach na godzinę. Przedstaw swoje obliczenia.

Kody oceny do pytania 3 zadania „kroki”

Pytanie 3. Punktacja 3

Ocena pełna

Kod 31: Prawidłowe odpowiedzi zarówno w metrach na minutę, jak i w kilometrach na godzinę (podanie jednostek nie jest konieczne).

$n = 140 \times 0,8 = 112$.

W ciągu minuty Bernard przechodzi $112 \times 0,8$ metra $= 89,6$ metrów.

Jego prędkość wynosi 89,6 metrów na minutę.

Jego prędkość wynosi zatem 5,38 lub 5,4 km/godz.

Należy kodować 31, jeśli obydwie odpowiedzi są poprawne(89,6 i 5,4) niezależnie od tego, czy obliczenia przedstawiono, czy też nie.

Zauważ, że błędy związane z zaokrąglaniem są akceptowalne, np. 90 metrów na minutę lub 5,3 km/godz (89×60).

- 89,6; 5,4

- 90; 5,376 km/godz.
- 89,8; 5376m/godz. [zauważ, że jeśli druga odpowiedź podana jest bez jednostek, to powinna być kodowana jako 22]

Ocena częściowa (2 punkty)

Kod 21: Odpowiedź jak dla kodu 32, z pominięciem mnożenia przez 0,8 które przekształca liczbę kroków na minutę na metry na minutę. Np.: jego prędkość wynosi 112 metrów na minutę i 6,72 km/godz.

- 112; 6,72km/godz.

Kod 22: Prędkość podana w metrach na minutę jest poprawna (89,6 metrów na minutę), ale przeliczenie na kilometry na godzinę jest nieprawidłowe lub pominięte.

- 89,6 metrów na minutę; 8960 km/godz.
- 89,6; 5376.
- 89,6; 53,76
- 89,6; 0,087 km/godz.
- 89,6; 1,49 km/godz.

Kod 23: Przedstawiona prawidłowa metoda z niewielkimi błędami w obliczeniach, innymi niż opisane w kodach 21 i 22. Obie odpowiedzi nieprawidłowe.

- $n = 140 \times 0,8 = 1120$; $1120 \times 0,8 = 896$. Bernard chodzi 896 m/min, 53,76 km/ godz.
- $n = 140 \times 0,8 = 116$; $116 \times 0,8 = 92,8$. 92,8m/min $\rightarrow$ 5,57 km/godz.

Kod 24: Tylko odpowiedź 5,4 km/godz., brak odpowiedzi 89,6 metrów na minutę (brak pośrednich obliczeń).

- 5,4
- 5,376km/godz.
- 5376m/godz

Ocena częściowa (1 punkt)

Kod 11: $n = 140 \times 0,8 = 112$. Nie przedstawiono dalszych obliczeń lub dalsze obliczenia są nieprawidłowe.

- 112
- $n = 112$ 0,112km/godz.
- $n = 112$ 1120km/godz.
- 112/min; 504km/godz.

Brak punktów

Kod 00: Inne odpowiedzi.

Kod 99: Brak odpowiedzi.

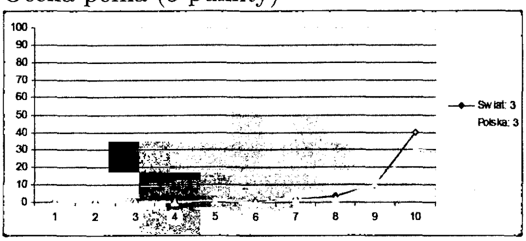
Wyniki pytania 3 zadania „kroki"

Analiza umiejętności uczniów dla jednego zadania była wykonana w następujący sposób: „Każdemu uczniowi przypisana jest liczba – łączny wynik z zadań matematycznych. Zbiór wszystkich uczniów świata, biorących udział w badaniu i rozwiązujących dane zadanie został uporządkowany liniowo, rosnąco według tego wyniku. Każdy uczeń ma również przypisaną wagę opisującą ilu uczniów reprezentuje z badanej populacji 15-latków swojego kraju. Użycie tych wag pozwala uszeregować rosnąco według wyniku znacznie większą liczbę osób.

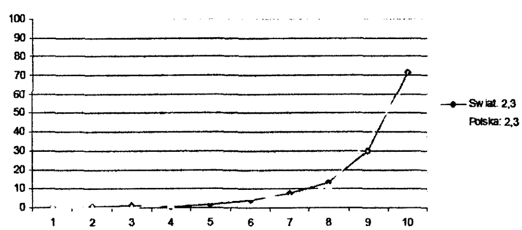
Tak otrzymana lista została podzielona na 10 równolicznych (w przybliżeniu) grup (*decyli*). Każda grupa reprezentuje pewną klasę umiejętności: od grupy pierwszej składającej się z uczniów najsłabszych, po dziesiątą uczniów najlepszych. Dla każdej z tych grup obliczono odsetek uczniów, którzy poradzili sobie z danym zadaniem. Wyniki obliczeń umieszczono w układzie współrzędnych i połączono łamaną" (Sułowska, Marciniak, 2004, s. 10). Takie wykresy sporządzono dla wszystkich uczniów świata (ciemna linia) i dla polskich uczniów (jasna). Dla każdego zadania sporządzony został również rozkład wyników w świecie, który pozwala porównać wyniki średnie danego kraju ze średnimi dla innych krajów i średnią dla wszystkich badanych (świat).

Kroki: pytanie 3

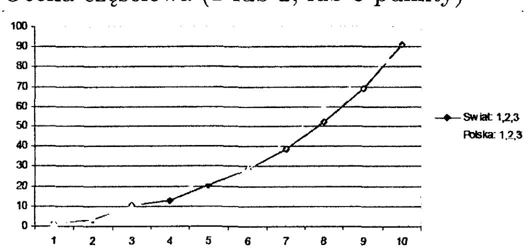
Ocena pełna (3 punkty)



Ocena częściowa (2 lub 3 punkty)



Ocena częściowa (1 lub 2, lub 3 punkty)



Rozkład wyników na świecie

	3 punkty		2+3 pkt		1+2+3 pkt
HKG	18,50	HKG	47,67	HKG	68,28
JPN	17,90	MAC	40,54	MAC	66,96
BEL	15,33	JPN	37,76	CAN	51,46
NLD	15,17	LIE	30,22	LIE	51,26
LIE	15,09	BEL	28,79	NLD	51,04
MAC	14,98	NLD	27,08	BEL	50,27
FIN	14,19	FIN	25,95	SVK	47,43
CHE	13,92	CHE	23,75	CZE	47,06
CZE	10,99	CZE	21,49	USA	44,67
FRA	10,84	SWE	20.64	JPN	44,58
SWE	10,84	FRA	20,28	ISL	43,98
KOR	9,75	DEU	19,96	AUT	40,27
DEU	9,63	ISL	19,15	CHE	40.08
NZL	8,70	CAN	19,09	DEU	39,72
AUS	8,69	KOR	18,56	FRA	39,41
ISL	8,55	AUT	18,31	FIN	39,20
CAN	8,23	AUS	17,18	NZL	39,11
AUT	8,11	NZL	17,08	HUN	38,85
SVK	7,58	SVK	16,72	ESP	38,44
RUS	7,45	RUS	16,39	LVA	38,33
ESP	7,34	LVA	16,00	RUS	38,10
DNK	7,25	DNK	15,79	AUS	37,64
LVA	6,89	TUR	15,40	GRC	36,97
HUN	6,27	ESP	15,36	POL	34,92
LUX	5,94	LUX	14,00	PRT	33,46
Świat	5,49	HUN	13,70	YUG	33,40
NOR	5,27	POL	13,06	KOR	33,16
TUR	5,08	**Świat**	12,98	**Świat**	32,80
PRT	4,48	NOR	12,30	TUR	31,98
POL	4,46	GBR	10,86	GBR	31,96
GBR	4,06	PRT	10.16	SWE	30,99
IRL	3.72	USA	9,82	LUX	29,00
ITA	3,48	IRL	8,53	IRL	28,86
USA	2,47	ITA	8,23	DNK	27,43
URY	2,33	GRC	7,68	IDN	23,71
THA	1,98	URY	6,82	ITA	20,03
GRC	1,90	THA	5,59	NOR	19,91
YUG	1,60	YUG	5,02	URY	19,65
TUN	1,22	TUN	4,66	THA	18,70
MEX	1,21	IDN	3,87	TUN	15,05
BRA	1,03	MEX	3,52	MEX	13,73
IDN	0,59	BRA	2,65	BRA	12,16

Rysunek 4.

Z wykresu (z oceną pełną – 3 punkty) możemy odczytać, że polscy uczniowie z 10 grupy osiągnęli niższe wyniki niż uczniowie całej badanej populacji (świat). Z trzeciego wykresu możemy odczytać, że nasi uczniowie 4, 5 a także 7, 8 i 9 grupy uzyskiwali wyniki wyższe za częściowe rozwiązanie zadań. Potwierdzają to także średnie wyniki liczone w procentach dla wszystkich uczniów świata i dla poszczególnych krajów dla tego zadania w tabeli z rys. 4. (3 punkty: Polska 4,46,świat 5,49; $2 + 3$ punkty: Polska 13,06, świat 12,98; $1 + 2 + 3$ punkty: Polska 34,92, świat 32,80).

Ujawnione zadania z badań PISA można znaleźć na stronie www.ifispan.waw.pl/pisa w: WYNIKI BADANIA 2003 Przykładowe zadania z matematyki i ich analiza, Rozwiązywanie problemów – zadania.

Aneks 2.
Podstawowe informacje o egzaminie gimnazjalnym

1. Cele, organizacja i ocenianie egzaminu gimnazjalnego

Egzamin gimnazjalny został wprowadzony Rozporządzeniem Ministra Edukacji Narodowej z dnia 19 kwietnia 1999 roku (DzU z 1999r. Nr 41, poz. 413), a zasady i tryb jego przeprowadzenia określone zostały rozporządzeniem z dnia 21 marca 2001 roku z późniejszymi zmianami (DzU z 2001r. nr 92, poz. 1020; z 2003 r. nr 90, poz. 846).

Egzamin jest powszechny i obowiązkowy dla wszystkich uczniów III klasy gimnazjum, każdy uczeń musi do niego przystąpić, by ukończyć gimnazjum. Pierwszy egzamin gimnazjalny odbył się w dniach 14 i 15 maja 2002 roku. Celem egzaminu jest:

- sprawdzenie opanowania umiejętności i wiadomości określonych w standardach wymagań egzaminacyjnych z zakresu przedmiotów humanistycznych i z zakresu przedmiotów matematyczno-przyrodniczych,
- wpływanie na proces nauczania (uczenia się) poprzez dostarczenie informacji zwrotnej na temat jakości kształcenia,
- dostarczenie zobiektywizowanej, porównywalnej informacji o osiągnięciach szkolnych uczniów gimnazjów, wykorzystywanej także podczas rekrutacji do szkół ponadgimnazjalnych.

Egzamin przeprowadzany jest przez okręgowe komisje egzaminacyjne (OKE), których osiem zostało powołanych w tym celu w Polsce w 1999 roku. Egzamin ma formę pisemną i składa się z dwóch części. W części pierwszej badane są umiejętności i wiadomości z zakresu ***przedmiotów humanistycznych***, w części drugiej – umiejętności i wiadomości z zakresu przedmiotów ***matematyczno–przyrodniczych***. Uczniowie bez zaburzeń i odchyleń rozwojowych otrzymują w całym kraju takie same arkusze egzaminacyjne. Egzamin z przedmiotów humanistycznych piszą uczniowie jednego dnia, a następnego dnia egzamin z przedmiotów matematyczno-przyrodniczych. Na rozwiązanie zadań z każdej części przewidziane jest 120 minut czasu, a uczniowie z dysfunkcjami mogą, jeśli tego potrzebują, mieć czas przedłużony o 60 minut. Standardowe arkusze otrzymują również uczniowie z udokumentowaną dysleksją rozwojową. Dla uczniów z dysfunkcjami: upośledzeniem umysłowym w stopniu lekkim, słabo widzących, niewidomych, słabo słyszących i niesłyszących przygotowane są specjalne arkusze. Dostosowana jest także klasyfikacja błędów i kryteria przyznawania punktów dla uczniów ze specyficznymi trudnościami w uczeniu się.

Za organizację i prawidłowy przebieg egzaminu w szkole (placówce) odpowiedzialni są przewodniczący szkolnych zespołów egzaminacyjnych. Nad prawidłowością przebiegu egzaminu w szkole, zgodnie z określonymi procedurami, czuwali nauczyciele zatrudnieni w innych szkołach lub placówkach, którzy byli w każdym zespole nadzorującym oraz obserwatorzy (w 35% szkół w 2003 roku) i eksperci (w 25% szkół) delegowani przez CKE i OKE. Sprawdzanie prac uczniów jest oparte na określonych, ujednoliconych *kryteriach punktowania*. Prace są sprawdzane przez specjalnie przygotowanych i wpisanych do ewidencji *egzaminatorów*, niebędących nauczycielami szkoły, do której uczęszczał egzaminowany uczeń. Egzaminatorzy są jeszcze dodatkowo szkoleni po otrzymaniu kluczy do zadań zamkniętych i schematów punktowania zadań otwartych. W większości zespołów egzaminatorzy oceniali prace w ośrodkach, bez możliwości wynoszenia ich z sali. W trakcie oceniania prac weryfikacji podlegała praca egzaminatorów pod względem poprawności stosowania schematu punktowania jak i technicznej poprawności zaznaczeń na kartach. Przebiegało to w różnych ośrodkach różnie, ale w niektórych OKE dwukrotnie sprawdzanych było około 11% prac. Punkty z kart odczytywane są przez elektroniczne czytniki. W ten sposób uzyskane przez poszczególnych uczniów wyniki, mogą być porównywane. Jest to tym bardziej istotne, że szkoły przyjęły rozmaite programy nauczania i podręczniki, programy wychowawcze oraz systemy oceniania. Wyniki uzyskane przez uczniów nie mają wpływu na ich promocję. Każdy, kto przystąpił do egzaminu, otrzymuje opis opanowania objętych sprawdzaniem umiejętności i wiadomości w postaci **liczby punktów uzyskanych w poszczególnych obszarach standardów** wymagań egzaminacyjnych. Za rozwiązanie wszystkich zadań w każdej części uczeń może otrzymać maksymalnie **50 punktów**.

2. Wyniki egzaminu gimnazjalnego w roku 2003 w ujęciu syntetycznym

W 2003 roku do części pierwszej egzaminu w dniu 8 maja przystąpiło 563 820 uczniów, do części drugiej w dniu 9 maja 561 418 uczniów. Większość uczniów oddawała prace przed czasem (odnotowali to obserwatorzy zewnętrzni w arkuszach obserwacji z przebiegu egzaminu). Arkusze dostosowane do swoich dysfunkcji rozwiązywało 12 702 uczniów (około 2,3% populacji) a uczniowie z potwierdzoną dysleksją stanowili około 7,8% populacji. Wśród uczniów, którzy przystąpili do egzaminu 50,7% stanowili chłopcy, a dziewczęta 49,3%. Do egzaminu w szkołach położonych na terenie gmin miejskich przystąpiło 47,1% uczniów, gmin miejsko-wiejskich 23,8% uczniów, a gmin wiejskich 29,1% ogółu piszących.

Uczniowie uzyskali **średnio w części humanistycznej 31,83 punktu, czyli 63,66% punktów** możliwych do uzyskania, a **w części matematyczno-przyrodniczej 25,75 punktu, czyli 51,5% punktów możliwych do uzyskania.** Wyniki egzaminu uczniów całej Polski dla poszczególnych standardów wymagań egzaminacyjnych przedstawione zostały w tabeli 1.

Standardy wymagań egzaminacyjnych	Liczba punktów	Procent uzyskanych punktów
Czytanie i odbiór tekstów kultury	25	77,72 %
Tworzenie własnego tekstu	25	49,60%
Umiejętne stosowanie terminów, pojęć i procedur z zakresu przedmiotów matematyczno-przyrodniczych niezbędnych w praktyce życiowej i dalszym kształceniu	15	50,40%
Wyszukiwanie i stosowanie informacji	12	70,67%
Wskazywanie i opisywanie faktów, związków i zależności, w szczególności przyczynowo-skutkowych, funkcjonalnych, przestrzennych i czasowych	15	49,00%
Stosowanie zintegrowanej wiedzy i umiejętności do rozwiązywania problemów	8	29,50%

Tabela 1. (Na podstawie CKE,2003, Egzamin gimnazjalny, sprawozdanie.)

„W obu częściach egzaminu problemy sprawiały uczniom zadania złożone, za które można było uzyskać więcej punktów. Często osiągnięcie sukcesu utrudniała uczniom nieumiejętność sformułowania i zapisania przemyśleń." (CKE, Wyniki egzaminu 2003, s. 13)

W części humanistycznej: statystyczna dziewczynka uzyskała 67,74% punktów, statystyczny chłopiec 59,70% punktów; statystyczny uczeń w szkole w gminie miejskiej 65,84% punktów, w gminie wiejskiej 61,62% punktów, a w szkole na terenie miasta-gminy 61,82% możliwych do uzyskania punktów. W części matematycznej statystyczna dziewczynka uzyskała 51,42% punktów, statystyczny chłopiec 51,56% punktów; statystyczny uczeń w szkole w gminie miejskiej 53,32% punktów, w gminie wiejskiej 50,44%punktów, a w szkole na terenie miasta-gminy 49,16% punktów.

Ogromne jest zróżnicowanie wyników między szkołami. W części humanistycznej średnie wyniki szkół wahały się od 20,60% punktów do 93,40% punktów możliwych do uzyskania; średni wynik szkoły publicznej wyniósł 62,24% punktów, a średni wynik szkoły niepublicznej 73,56% punktów. W części matematyczno-przyrodniczej średnie wyniki szkół wahały się od 13% punktów do 93,94% punktów; średni wynik szkoły publicznej wyniósł 50,16% punktów, a niepublicznej 64,46% punktów możliwych do uzyskania.

3. Charakterystyka i przykłady zadań części matematyczno-przyrodniczej egzaminu

Arkusz standardowy egzaminu gimnazjalnego w części matematyczno-przyrodniczej w roku 2003 składał się z 34 zadań: 25 zadań zamkniętych (wybór jednej z czterech odpowiedzi) i 9 zadań otwartych, w których uczeń sam pisał rozwiązanie. Zadania były skupione wokół sytuacji, z których informacje potrzebne były do rozwiązania 2-4 zadań. W 27. zadaniach egzaminu trzeba było wykorzystać matematyczne umiejętności, by udzielić odpowiedzi na postawione pytania, także w zadaniach sprawdzających wiadomości i umiejętności z chemii, biologii, fizyki, astronomii, czy geografii. Wśród zadań zestawu nie było zadań bardzo trudnych o wskaźniku łatwości z przedziału od 0,0 do 0,20 (0,0–0,20). Zadań trudnych (0,21–0,40) było 6 i można za nie było uzyskać 13 punktów. Zadań średniej trudności / łatwości (0,41–0,60) było 13 za 21 punktów, zadań łatwych (0,61–0,80) było 11, a pozostałe 4, były to zadania bardzo łatwe (0,81–1). Charakterystykę zadań ilustrującą standardy i rodzaje zadań można odczytać z tabeli poniżej.

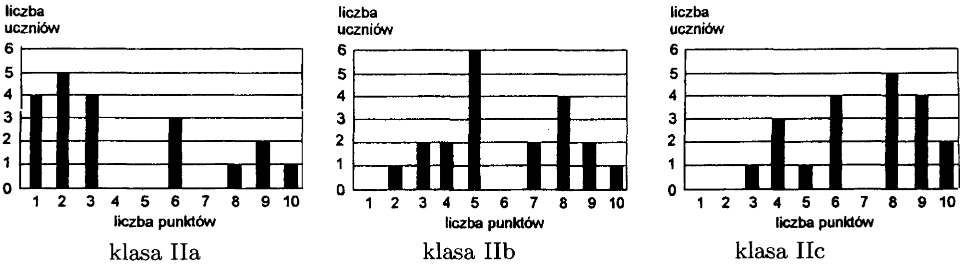
Standardy wymagań egzaminacyjnych	Liczba zadań (numery zadań arkusza A1)	Liczba punktów	Zadania otwarte (zo) zamknięte (zww)	Liczba zadań o współczynniku łatwości
I. umiejętne stosowanie terminów, pojęć i procedur z zakresu przedmiotów matematyczno-przyrodniczych niezbędnych w praktyce życiowej i dalszym kształceniu	7 (3, 6, 11, 16, 26, 31, 33)	15	4 (zww) 3 (zo)	1 trudne, 4 średnio trudne, 2 łatwe
II. wyszukiwanie i stosowanie informacji	12 (1, 2, 4, 7, 12, 14, 15, 19, 20, 21, 23, 24)	12	12(zww)	4 średnio trudne 4 łatwe, 4 bardzo łatwe
III. wskazywanie i opisywanie faktów, związków i zależności, w szczególności przyczynowo-skutkowych, funkcjonalnych, przes- trzennych i czasowych	11 (5, 8, 9, 10, 18, 25, 27, 28, 29, 30, 34)	15	6 (zww) 5 (zo)	3 trudne 3 średnio trudne 5 łatwych
IV. Stosowanie zintegrowanej wiedzy i umiejętności do rozwiązywania problemów	4 (13, 17, 22, 32)	8	3 (zww) 1 (zo)	2 trudne 2 średnio trudne
razem	34	50	25 (zww) 9 (zo)	34

Tabela 2. (Na podstawie danych OKE, Kraków,2003, Egzamin gimnazjalny.)

Poniżej zamieszczam przykłady zadań. Obok numeru zadania w pierwszym nawiasie podane są liczby punktów, jakie można było uzyskać za jego rozwiązanie, a w drugim nawiasie jest wskazany standard wymagań wraz ze sprawdzaną czynnością tego standardu. W pierwszym przykładzie są zadania zamknięte, w pozostałych są zadania otwarte. Do zadań otwartych podane są kryteria przyznawania punktów i krótkie informacje o wynikach.

Przykład 1. Informacje do zadań 19-21.

Oto wyniki krótkiego sprawdzianu przeprowadzonego w trzech oddziałach II klasy gimnazjum:



Rysunek 1. Wykres 1.

Zadanie 19. (0-1); (*II,interpretuje informacje z diagramu słupkowego*)
Z porównania wykresów wynika, że sprawdzian był
A. najtrudniejszy dla uczniów z klasy IIa.
B. najtrudniejszy dla uczniów z klasy IIb.
C. najtrudniejszy dla uczniów z klasy IIc.
D. jednakowo trudny dla uczniów z oddziałów a, b, c.

Zadanie 20. (0-1); (*II, odczytuje informacje z diagramu słupkowego*)
Średni wynik uczniów IIb jest równy 6 punktów. Ilu uczniów tej klasie uzyskało taki wynik?
A. 0 B. 1 C. 3 D. 4

Zadanie 21. (0-1); (*II, przetwarza informacje*)
Ilu uczniów z klasy IIa otrzymało, co najmniej 6 punktów?
A. 13 B. 7 C. 4 D. 3

Przykład 2. Informacje do zadań 27-30.
Obserwując zużycie benzyny w swoim samochodzie, pan Nowak stwierdził, że jeśli wystartuje z pełnym bakiem i będzie jechał po autostradzie ze stałą prędkością, to zależność liczby litrów benzyny w baku (y) od liczby przejechanych kilometrów (x) wyraża się wzorem:
$y = -0,05x + 45$

Zadanie 27. (0-2); (*III, oblicza wartość funkcji*)
Ile benzyny zostanie w baku po przejechaniu 200 km? Zapisz obliczenia.

Zadanie 28. (0-1); (*III, interpretuje własności funkcji*)

Jaką pojemność ma bak tego samochodu?

Zadanie 29. (0-2); (*III, interpretuje własności funkcji*)
Na przejechanie ilu km wystarczy pełny bak? Zapisz obliczenia.

Zadanie 30. (0-2); (*III, przekształca wzór funkcji*)
Przekształcając wzór pana Nowaka, wyznacz x w zależności, od y.

Przykład 3.

Zadanie 32. (0-5); (*IV, stosuje techniki twórczego rozwiązywania problemów*)
Ewa usiadła na ławce w odległości 6m od domu Adama. Odbity od kałuży słoneczny promień poraził ją w oczy. To Adam z okna swego pokoju przesłał Ewie „zajączka". Oblicz, na jakiej wysokości Adam błysnął lusterkiem, jeśli promień odbił się w odległości 0,75 metra od Ewy, a jej oczy znajdowały się na wysokości 1 metra nad ziemią. Zrób rysunek pomocniczy. Zapisz obliczenia.

Kryteria punktowania zadań 27-30 i zadania 32.

Nr zad.	Liczba pkt.	Poprawna odpowiedź	Zasady przydzielania punktów
27	2	$-0,05 \cdot 200 + 45 = -10 + 45 = 35$ Zostało 35 litrów benzyny.	a) za zastosowanie poprawnej metody (podstawienie we wzorze liczby 200 w miejsce x) – 1 p. b) za poprawne obliczenia – 1p.
28	1	Pojemność baku jest równa 45 litrów.	za napisanie poprawnej odpowiedzi – 1 p.
29	2	$0 = -0,05x + 45$ $0,05 \cdot x = 45$ $x = 45 : 0,05 = 900$ Pełny bak wystarczy na przejechanie 900 km. Można też przy użyciu proporcji, np: 10 l – 200 km 45 l – d km $9000 = 10d$ $d = 900$ $d = \frac{200 \times 45}{10} = 900$ Pełny bak wystarczy na przejechanie 900 km.	a) za zastosowanie poprawnej metody (podstawienie we wzorze liczby 0 w miejsce y lub ułożenie poprawnej proporcji) – 1 p. b) za poprawne obliczenia – 1 p.

Tabela 3.

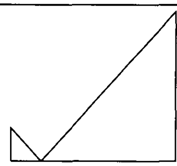
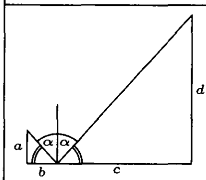
Nr zad.	Liczba pkt.	Poprawna odpowiedź	Zasady przydzielania punktów
30	2	$y = -0,05 \cdot x + 45$ $0,05 \cdot x = 45 - y$ $x = \frac{45-y}{0,05}$ $x = 900 - 20y$	Za zastosowanie poprawnej metody: a) przenoszenia odpowiednich wyrazów – 1 p. b) podzielenia równania przez współczynnik przy x – 1 p.
32	5		a) za wykonanie rysunku uwzględniającego drogę odbitego promienia – 1p.
		 Kąt padania promienia słonecznego jest równy kątowi odbicia. $\frac{d}{c} = \frac{a}{b}$ lub $\frac{a}{d} = \frac{b}{c}$ (lub inna równoważna proporcja)	b) za napisanie poprawnej proporcji – 2p.
		$\frac{1}{0,75} = \frac{d}{5,25}$ $0,75d = 5,25$ $d = 7$ Adam błysnął lusterkiem na wysokości 7 m.	c) za poprawne obliczenia – 1 p. d) za wynikającą z poprawnej metody odpowiedź z jednostką 1p.

Tabela 4.

Informacje o wynikach zadań 27-30 i 32

Przy każdym numerze zadania podany jest w nawiasie współczynnik łatwości zadania, czyli iloraz sumy uzyskanych przez uczniów punktów za rozwiązanie tego zadania przez sumę możliwych do uzyskania punktów. Przedstawione niżej procentowe dane dotyczą losowo wybranej próby uczniów objętych badaniem OKE Kraków (OKE Kraków 2003, Wyniki egzaminu gimnazjalnego, s. 24,171-213).

Wyniki zadania 27 (0,61):

Pełną liczbę punktów za zadanie otrzymało .... 53% uczniów;
Zastosowało poprawną metodę rozwiązania, ... 68,3% uczniów,
ale błędnie wykonało obliczenia .... 33,6 % uczniów;
Nie podjęło próby rozwiązania tego zadania .... 13,2% uczniów.

Poza błędami rachunkowymi uczniowie mieli trudności z interpretacją wzoru, że y oznacza liczbę litrów benzyny, jaka pozostanie w baku po przejechaniu x km, gdy jazdę rozpoczęto z pełnym bakiem. Zdarzało się również, że uczniowie odpowiadali na inne niż w zadaniu, pytanie, np. ile litrów benzyny potrzeba na przejechanie 200 km.

Wyniki zadania 28 (0,46):

Poprawnej odpowiedzi udzieliło .... 45,5% uczniów;
Podjęło próbę, ale nie udzieliło dobrej odpowiedzi ..... 35,3% uczniów;
Nie podjęło próby rozwiązania zadania .... 19,2% uczniów.

W zadaniu tym nie wymagano podania obliczeń. Zrozumienie informacji, jaką zależność opisuje wzór $y = -0,05x + 45$ i uświadomienie sobie, że bak będzie pełny, gdy nie przejedziemy żadnego kilometra, dawało od razu odpowiedź, 45 litrów. Formalnie można było obliczyć y, podstawiając $x = 0$ do wzoru.

Wyniki zadania 29 (0,25):

Poprawną metodę obliczenia możliwej do przejechania
liczby kilometrów aż do opróżnienia baku
($y = 0$, dla jakiego x) zastosowało .... 25,8% uczniów;
Poprawne obliczenia wykonało .... 23,7% uczniów;
Podjęło próbę rozwiązania, ale nie doprowadziło jej do
końca (z powodu błędów rachunkowych 43% uczniów) .. 41,1% uczniów;
Nie podjęło próby rozwiązania .... 33,1% uczniów.

Zinterpretowanie informacji „ na przejechanie ilu km wystarczy pełny bak" w praktyczny sposób „jeśli jadąc opróżnię bak, to się dowiem ile km przejadę" i jej zmatematyzowanie (zapisanie jej z wykorzystaniem podanego wzoru) okazało się najtrudniejsze.

Wyniki zadania 30 (0,31):

Poprawnie wykonało dwa przekształcenia równania na równanie równoważne ... 24,1% uczniów;

Podjęło próbę rozwiązywania zadania, ale popełniło błędy ... 47% uczniów;

spośród nich błędnie wykonało:

odejmowanie od obu stron równania tej samej liczby .. 33% uczniów,

dzielenie przez liczbę obu stron równania ... 47,3% uczniów;

Nie podjęło próby rozwiązania zadania 28,6% uczniów.

Przekształcanie równania na równanie równoważne, jest procedurą znaną uczniom z rozwiązywania równań, stąd mniejsza jest liczba uczniów, którzy nie podjęli próby rozwiązania zadania. Momenty popełniania błędów są charakterystyczne, słabiej mają uczniowie opanowane przekształcanie równań, gdy obie strony równania trzeba podzielić przez te samą liczbę, różna od zera.

Wyniki zadania 32 (0,23):

Wykonało rysunek do zadania 43,8% uczniów;

Odpowiednią proporcję zapisało ... 25,3% uczniów;

Właściwe dane w proporcji wpisało ... 16,2% uczniów;

Poprawne obliczenia wykonało ... 14,7% uczniów;

Podało, wynikającą z zastosowania poprawnej metody, odpowiedź wraz z jednostką ... 15,3% uczniów

Nie podjęło próby rozwiązania zadania ... 24,5 % uczniów

Zadanie trudne, najtrudniejsze w całym zestawie egzaminacyjnym. Badało jak uczeń stosuje zintegrowaną wiedzę z fizyki i matematyki oraz jak stosuje twórcze techniki rozwiązywania problemów (schematyzuje, dobiera model, pracuje w tym modelu, interpretuje wynik). W tym zadaniu dodatkową trudnością jest niezgodność w definiowaniu kąta padania i kąta odbicia (promienia słonecznego) w fizyce i w geografii. Co czwarty uczeń nie podjął prób rozwiązania zadania, a co drugi nie potrafił zrobić rysunku. Średnio, tylko co siódmy uczeń potrafił rozwiązać to zadanie.

Podane przykłady zadań ilustrują, jak wokół sytuacji z realnym kontekstem formułowane są zadania egzaminacyjne zamknięte (przykład P1) i otwarte (przykład P2). Zadanie w przykładzie 3 jest tradycyjnie sformułowanym zadaniem na zastosowanie teorii (podobieństwo trójkątów i równania w postaci proporcji). Podane dla zadań otwartych (P2, P3) wyniki oprócz współczynnika łatwości ukazują tradycyjne, nauczycielskie podejście do uczniowskich rozwiązań zadań: jaki jest procent poprawnych rozwiązań, jaki – częściowo poprawnych, jaki procent błędnych lub brakujących. Można w tych wynikach odczytać także wniosek sformułowany w badaniach PISA: „stosunkowo niewielu polskich uczniów potrafi podać kompletne rozwiązanie zadania, natomiast wielu uczniów jest w stanie rozwiązać je częściowo". Wyraźnie jest to widoczne w wynikach zadania 27 i zadania 32. Uczniowie, nawet gdy wybierają dobrą metodę rozwiązania zadania, to z powodu błędów rachunkowych, błędów w przekształceniach wyrażeń algebraicznych i trudności z matematyzacją lub interpretacją wyniku nie potrafią doprowadzić rozwiązania do końca. Można to zinterpretować także w ten sposób, że uczniowie nie mają opanowanych w zadawalającym stopniu podstawowych umiejętności, jakich od nich oczekujemy po gimnazjum. Refleksji wymaga także wysoki odsetek uczniów, którzy nie podejmują wcale rozwiązywania zadań otwartych: czy nie wierzą, że potrafią (bo w klasie takie zadania zawsze rozwiązywali tylko najlepsi), czy po przeczytaniu nie zrozumieją sytuacji, czy nie potrafią, bo nie umieją rozwiązywać samodzielnie takich zadań?

Więcej informacji egzaminie gimnazjalnym i jego wynikach można znaleźć na stronach internetowych www.cke.edu.pl i oke.krakow.pl.