ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 28 (2005)

DOKTORATY

Eugeniusz Śmietana
Rzeszów

Wpływ interwencji nauczyciela na aktywność matematyczną ucznia uzdolnionego w procesie rozwiązywania matematycznego problemu[1]

1 Wprowadzenie

Badania zostały skoncentrowane na dywergentnych interwencjach nauczyciela, otwierających ucznia uzdolnionego na różne obszary wiedzy w procesie rozwiązywania matematycznego problemu. Często są to takie obszary wiedzy, które nie od razu kojarzą się uczniowi z rozwiązywanym zagadnieniem. Może mieć wątpliwości, czy taka wskazówka podana przez nauczyciela zagwarantuje mu rozwiązanie tego problemu, a nawet że jest ona wskazówką chybioną. O jej wartości dydaktycznej przekonujemy się dopiero w trakcie rozwiązywania matematycznego problemu, kiedy wzrasta matematyczna aktywność ucznia w twórczym poszukiwaniu rozwiązania danego zagadnienia. Można by powiedzieć, że wskazówki dywergentne rozpraszają ucznia na nowe obszary wiedzy niezbędnej do rozwiązania nietypowego zadania. Tak rozumiane rozproszenie myśli ma tu więc sens pozytywny.

[1]Tekst stanowi zmodyfikowaną wersję autoreferatu rozprawy doktorskiej, obronionej w dniu 31 marca 2005 roku na Wydziale Matematyczno-Fizyczno-Technicznym Akademii Pedagogicznej w Krakowie. Promotorem był dr hab. Stefan Turnau, prof. Uniwersytetu Rzeszowskiego, a jej recenzentami byli: prof. dr hab. Stanisław Midura i dr hab. Henryk Kąkol, prof. Akademii Pedagogicznej w Krakowie.

2 Przedmiot i cele badań

W rozprawie doktorskiej dowodzę, że rozpraszające interwencje nauczyciela wpływają na wzrost matematycznej aktywności ucznia rozwiązującego matematyczny problem i że są one często niezbędne do rozwiązania nietypowego zadania matematycznego. Celem badań było:

1. znalezienie skutecznych interwencji nauczyciela w procesie rozwiązywania matematycznego problemu przez ucznia uzdolnionego matematycznie,
2. wyodrębnienie występujących w tym procesie blokad aktywności ucznia, znalezienie ich przyczyn i sposobów ich usuwania,
3. analiza zachowania ucznia w procesie rozwiązywania matematycznego problemu po interwencji rozpraszającej nauczyciela i opis jego aktywności matematycznej,
4. ocena skuteczności działania interwencji rozpraszającej na rozwiązanie matematycznego problemu.

3 Metoda badań

Podstawową metodą zastosowaną w badaniach jest indywidualny eksperyment dydaktyczny. Spośród różnych możliwych schematów wybrałem metodę sterowania procesem rozwiązywania problemu poprzez przygotowane scenariusze interwencji nauczyciela, ze szczególnym naciskiem na interwencje rozpraszające.

4 Organizacja badań

1. Uczniowie otrzymywali sukcesywnie na karteczkach pojedyncze wskazówki do rozwiązania matematycznego problemu, według przygotowanych wcześniej scenariuszy interwencji.
2. Podczas eksperymentu uczniowie nie korzystali z żadnych innych pomocy dydaktycznych poza pisemnymi interwencjami nauczyciela.
3. W rozwiązaniach uczniowie podawali stosowne komentarze dotyczące metod i poszczególnych kroków postępowania.

4. Do badań przygotowano jeden problem algebraiczny i jeden geometryczny z zakresu programu szkoły średniej.
5. W eksperymencie brało udział 12 uczniów szkół średnich Łańcuta, Rzeszowa i Strzyżowa z różnych poziomów kształcenia.
6. Badania przeprowadzono w warunkach minimalizujących stres ucznia: w porze popołudniowej w pracowniach matematycznych szkół macierzystych uczniów.
7. Krótkie dialogi z uczniem oraz jego wnioski zostały zapisane na dyktafonie w trakcie trwania lub po zakończeniu eksperymentu. Były to zapisy dokonane za zgodą ucznia lub bez jego wiedzy.
8. Wybrani uczniowie byli uczestnikami warsztatów matematycznych prowadzonych przez autora rozprawy, olimpiad matematycznych II-go stopnia i laureatami szkolnych konkursów matematycznych: Podkarpackiego Konkursu Matematycznego dla uczniów klas drugich, Konkursu Matematycznego im. prof. Jana Marszała.
9. Opracowano trzy scenariusze interwencji nauczyciela odpowiadających różnym sposobom rozwiązania zadania algebraicznego i jeden scenariusz interwencji dotyczący rozwiązania zadania z geometrii płaskiej (z możliwością ich modyfikacji w trakcie rozwiązywania problemu).

5 Pojęcia występujące w badaniach

Określenia pojęć używanych w pracy:

1. **Problem matematyczny** to nietypowe zadanie, którego nie można rozwiązać przez stosowanie znanych schematów, a którego rozwiązanie wymaga twórczego i odkrywczego podejścia.
2. **Wskazówka** jest dodatkową informacją, pytaniem lub poleceniem podanym temu, kto rozwiązuje zadanie lub matematyczny problem, w celu ułatwienia mu rozwiązania tego zadania.
3. **Interwencja** jest działaniem nauczyciela ingerującym w proces rozwiązywania matematycznego problemu. Jest pojęciem szerszym od pojęcia wskazówki.
4. **Interwencja otwarcia** jest działaniem nauczyciela skierowanym na wywołanie u ucznia otwarcia się na wiedzę, która jest niezbędna do rozwiązania matematycznego problemu.

5. **Myślenie konwergentne (zbieżne)** przejawia się w rozwiązywaniu zadań jedynym znanym rozwiązującemu sposobem.

6. **Myślenie dywergentne (rozbieżne)** występuje w sytuacjach problemowych, mających potencjalnie wiele konkurencyjnych dróg rozwiązań.

7. **Blokada aktywności matematycznej**, to taki stan umysłu rozwiązującego, że wie on, iż zadania nie rozwiązał, ale nie ma pomysłu na to, co robić. Może ona wystąpić na każdym etapie rozwiązywania problemu.

6 Treść zadania algebraicznego i szkic jego rozwiązania

Zadanie 1

Niech a, b, c, d będą liczbami rzeczywistymi oraz $a > c$ i $b > c$. Wykazać, że $(a+b+c+d)^2 > 8(ad+bc)$.

Sposób 1

Rozważamy funkcję kwadratową $f(x) = 2x^2 - (a+b+c+d)x + (ad+bc)$, której wyróżnik jest równy $\Delta = (a+b+c+d)^2 - 8(ad+bc)$. Zatem zadanie sprowadza się do wykazania, że $\Delta > 0$, co jest równoważne istnieniu dwóch różnych pierwiastków rzeczywistych trójmianu $f(x)$. Najpierw zauważmy, że

$$f(a) = (a-b)(a-c), \quad f(b) = (b-a)(b-d),$$

$$f(c) = (c-a)(c-d), \quad f(d) = (d-b)(d-c).$$

Jeżeli $a \neq b$ lub $c \neq d$, to mamy odpowiednio

$$f(a)f(b) = -(a-b)^2(a-c)(b-d) < 0$$

lub

$$f(c)f(d) = -(c-d)^2(a-c)(b-d) < 0.$$

Stąd wnioskujemy, że funkcja kwadratowa $f(x)$ przyjmuje zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne, ponieważ albo $f(a)$ i $f(b)$, albo $f(c)$ i $f(d)$ mają różne znaki. A to jest równoważne istnieniu dwóch różnych pierwiastków rzeczywistych.

Jeżeli natomiast $a = b$ i $c = d$, to wówczas $f(a) = 0$ i $f(c) = 0$, czyli także w tym przypadku funkcja $f(x)$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste: a i c. A to kończy dowód nierówności zasadniczej.

7 Scenariusz w wersji 1

Scenariusz interwencji nauczyciela w tej wersji był konstruowany przed oraz w trakcie prowadzenia badań. Interwencja Int. 0, nazwana „zerową", jest formalną wskazówką pytającą i mogła być podana przez nauczyciela ustnie, natomiast Int. 1 i Int. 2, to interwencje otwierające ucznia na obszar wiedzy o trójmianie kwadratowym, niezbędne do rozwiązania problemu. Pozostałe interwencje spełniają rolę konwergentnych, czyli uzbieżniających, które nie były przedmiotem badań i dlatego nie zostały omówione.

Int. 0. Czy zrozumiała jest treść zadania i użyte w nim zapisy formalne?

Int. 1. Skojarz nierówność w zadaniu z trójmianem kwadratowym.

Int. 2. Skojarz nierówność z wyróżnikiem pewnego trójmianu kwadratowego. Skonstruuj ten trójmian.

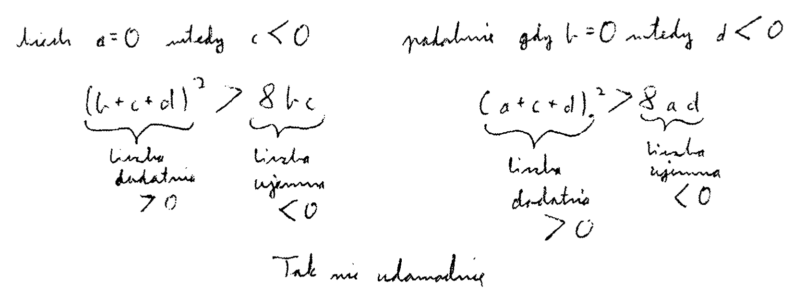
Int. 3 ... Int. 11 (Interwencje uzbieżniające)

Do opisu zachowań uczniów wg. tego scenariusza wykorzystano tu pracę ucznia U2 i schematy blokowe.

8 Opis blokad i aktywności matematycznej ucznia U2 po interwencjach nauczyciela

Int. 0. Czy zrozumiała jest treść zadania i użyte w nim zapisy formalne?

Uczeń rozpraszał się na różne obszary „wiedzy przyjaznej" dla tego zagadnienia i poszukiwał „ścieżki" jego rozwiązania. Przekształcał wyrażenia algebraiczne, próbował dowodu redukcyjnego. W swoich poszukiwaniach nie dotykał jednak obszaru wiedzy o trójmianie kwadratowym. Nie miał pomysłu na kontynuację dowodu. Wystąpiła u niego blokada aktywności.



Rysynek 1. Ciąg dalszy na następnej stronie.

Dowodzę redukcyjnie

$(a+b+c+d)(a+b+c+d) = a^2+ab+ac+ad+ab+b^2+bc+bd+ac+bc+c^2+dc+ad+db+$

$+dc+d^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2dc =$

$= a^2+2ab+b^2+c^2+2dc+d^2+2ad+2bc+2bd+2ac+d^2 = (a+b)^2+(c+d)^2+2ad+$

$+2bc+2ac+2bd$

Podstawiam do nierówności

$d^2+(a+b)^2+(c+d)^2+2(ad+bc)+2bd+2ac > 8(ad+bc) \;/-2(ad+bc)$

$d^2+(a+b)^2+(c+d)^2+2bd+2ac > 6(ad+bc)$

$a^2+2ac+c^2+b^2+2bd+d^2+2ab+2cd > 6(ad+bc)$

$(a+b)^2+(b+d)^2+2(ab+cd) > 6(ad+bc)$

$a^2+b^2+c^2+d^2+2ac+2ab+2bd+2cd > 6(ad+bc)$

$a^2+b^2+c^2+d^2+2a(c+d)+2d(b+c) > 6(ad+bc)$

Skorzystałem ze wskazówki, ponieważ nie wiem co dalej robić

Rysunek 1.

Int. 1. Skojarz nierówność w zadaniu z trójmianem kwadratowym.

Uczeń był zdumiony treścią wskazówki Int. 1, co nawet wyraził westchnieniem: „Ach, to tak?" Interwencja otwarcia odblokowała go i uaktywniła. Otworzył się na wiedzę o trójmianie kwadratowym i penetrował ten obszar. Tworzył trójmiany i szkicował ich wykresy, znajdował współrzędne wierzchołka paraboli i wartości trójmianu. Gromadził wybraną wiedzę o trójmianie. Nie był pewny, czy otwarcie się na całą wiedzę o trójmianie pomoże rozwiązać ten problem. Przez dodatkowe rozproszenie wskazówką Int. 1 nastąpił wyraźny wzrost aktywności matematycznej ucznia. Był rozluźniony i pozytywnie nastawiony do tej wiedzy. Nie trafił jednak na stosowny trójmian. Blokada nie ustąpiła całkowicie.

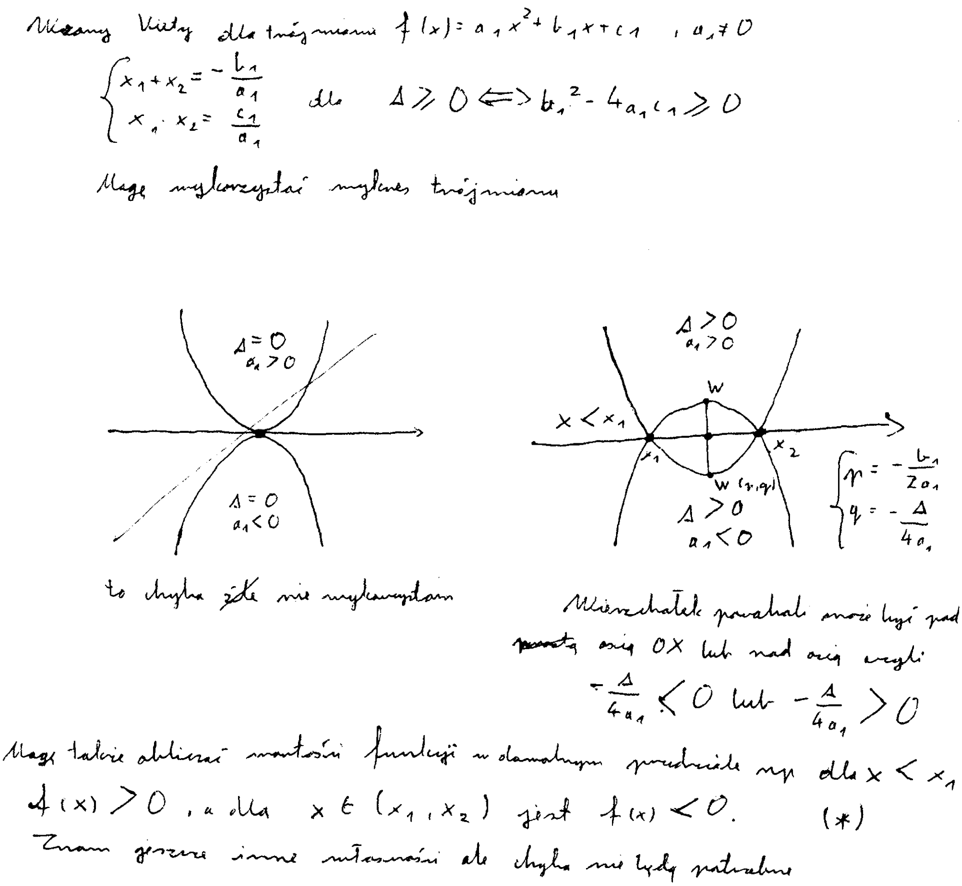
$f(x) = a_1(x-x_1)(x-x_2) \qquad \Delta \geqslant 0$

$(x-c-a-b)(x-a-b-c) = x^2-ax-bx-cx-cx+ca+ba+c^2-dx+ad+bd+dc-bx$

$+db+b^2+bc = x^2-2(a+b+c+d)x+a^2+b^2+c^2+ac+bc+ad+bd+ab+2bc$

Otrzymałem zbyt złożoną postać trójmianu. $\qquad a > c \quad b > d$

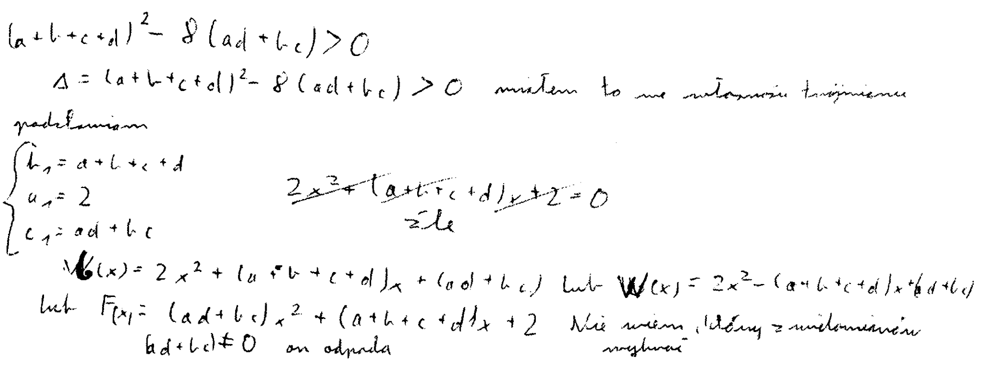
Rysunek 2. Ciąg dalszy na następnej sronie.



Rysunek 2.

Int. 2. Skojarz nierówność z wyróżnikiem pewnego trójmianu kwadratowego. Skonstruuj ten trójmian.

Interwencja ta zawęziła rozproszenie się ucznia na obszar wiedzy o trójmianie kwadratowym. Uczeń napisał stosowną nierówność związaną z wyróżnikiem trójmianu kwadratowego umiejętnie wykorzystując wypisane własności trójmianu. Utworzył dwa trójmiany kwadratowe. Był cały czas pozytywnie nastawiony na tę wiedzę. Aktywność utrwaliła się. Uczeń skutecznie kontynuował dowód poprzez kolejne interwencje nauczyciela wywołujące u niego już myślenie konwergentne, doprowadzające do rozwiązania postawionego problemu.



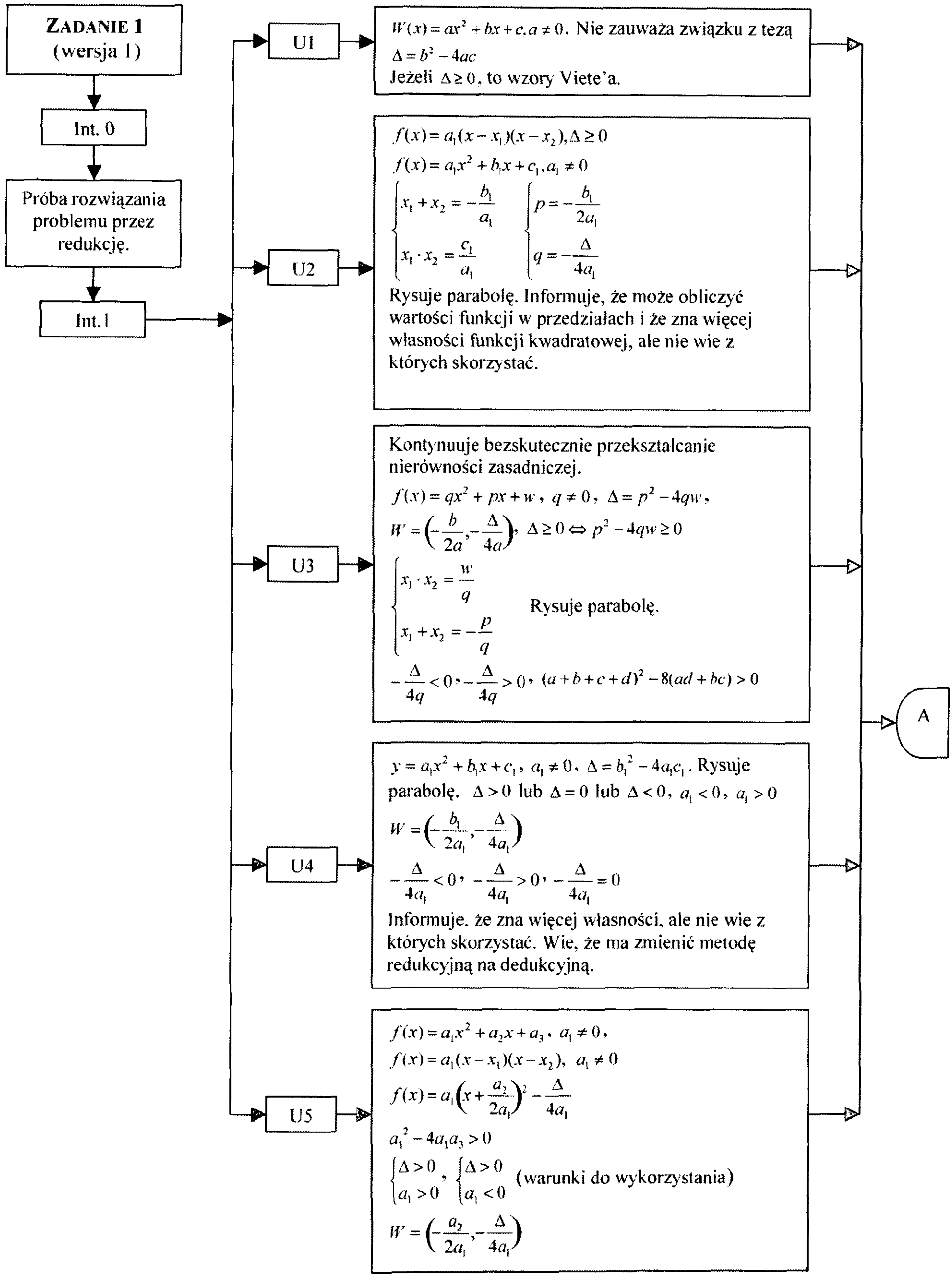
Rysunek 3.

Zachowania pozostałych uczniów w trakcie rozwiązywania problemu według tego scenariusza zostały opisane w formie schematów blokowych (zobacz rysunek 4).

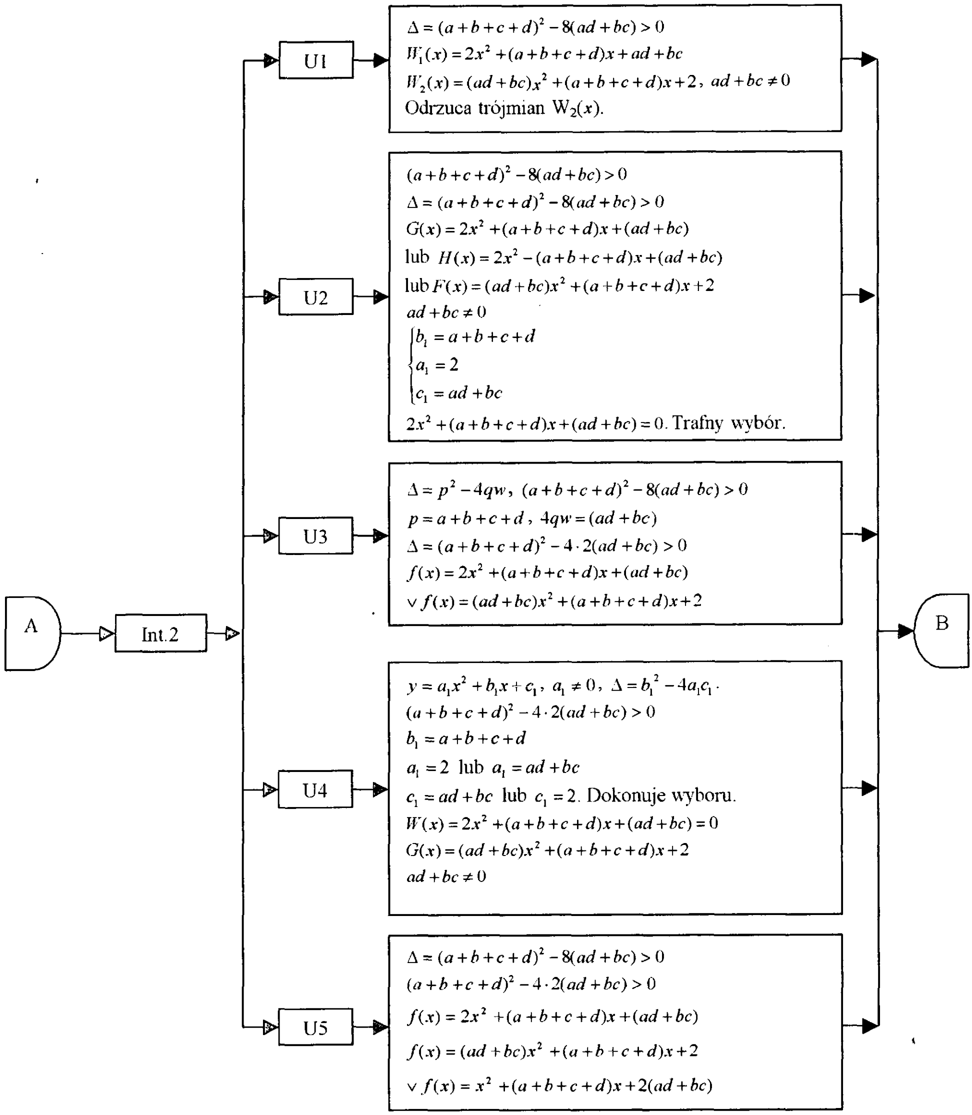
Na rysunku 4 jest zaznaczona Int. 0 , po której nastąpiło „autorozproszenie" się uczniów na różne obszary wiedzy w czasie prób udowodnienia nierówności zasadniczej. Próbowali dowieść redukcyjnie. Dokonywali różnych przekształceń, ale bez efektu. Rozproszenie dotyczyło niewielkich obszarów „wiedzy przyjaznej" uczniom i zgodnej z rozwiązywanym problemem. Żaden z nich nie dotknął jednak obszaru wiedzy o trójmianie kwadratowym. Nie mieli pomysłu na kontynuowanie dowodu. Wystąpiła blokada aktywności.

Po otrzymaniu wskazówki Int. 1 uczniowie różnie reagowali na jej treść. Wyrażali to między innymi takimi określeniami jak: „Ojej! Ach! Co? Jaki trójmian? Ach, to tak! Spodziewałem się innej wskazówki. Nie wiem dlaczego mam skojarzyć z trójmianem? Ta wskazówka nie daje mi żadnej koncepcji. Dotychczas otrzymywałem wskazówki związane bezpośrednio z rozwiązywanym zadaniem." Były to głosy pełne entuzjazmu lub zaskoczenia. Można wnioskować, że uczniowie oczekiwali wskazówki konwergentnej, czyli naprowadzającej na rozwiązanie problemu.

Mimo to uczniowie stopniowo otwierali się na wiedzę o trójmianie kwadratowym. Wzrastała ich aktywność matematyczna. Wypisywali wzory, rysowali parabole, obliczali wartości ekstremalne trójmianu kwadratowego itd. Gromadzili wiedzę o trójmianie, którą mogliby wykorzystać w dowodzie. Tą interwencją blokada została częściowo usunięta. Uczniowie chcieli kontynuować dowód (zobacz rysunek 5).


ZADANIE 1
(wersja 1)
Int. 0
Próba rozwiązania problemu przez redukcję.
Int. 1
U1
$W(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$. Nie zauważa związku z tezą
$\Delta=b^2-4ac$
Jeżeli $\Delta\geq 0$, to wzory Viete'a.
U2
$f(x)=a_1(x-x_1)(x-x_2), \Delta\geq 0$
$f(x)=a_1x^2+b_1x+c_1, a_1\neq 0$
$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b_1}{a_1} \\ x_1\cdot x_2=\frac{c_1}{a_1} \end{cases}$ $\begin{cases} p=-\frac{b_1}{2a_1} \\ q=-\frac{\Delta}{4a_1} \end{cases}$
Rysuje parabolę. Informuje, że może obliczyć wartości funkcji w przedziałach i że zna więcej własności funkcji kwadratowej, ale nie wie z których skorzystać.
U3
Kontynuuje bezskutecznie przekształcanie nierówności zasadniczej.
$f(x)=qx^2+px+w$, $q\neq 0$, $\Delta=p^2-4qw$,
$W=\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$, $\Delta\geq 0 \Leftrightarrow p^2-4qw\geq 0$
$\begin{cases} x_1\cdot x_2=\frac{w}{q} \\ x_1+x_2=-\frac{p}{q} \end{cases}$
Rysuje parabolę.
$-\frac{\Delta}{4q}<0$, $-\frac{\Delta}{4q}>0$, $(a+b+c+d)^2-8(ad+bc)>0$
U4
$y=a_1x^2+b_1x+c_1$, $a_1\neq 0$, $\Delta=b_1^2-4a_1c_1$. Rysuje parabolę. $\Delta>0$ lub $\Delta=0$ lub $\Delta<0$, $a_1<0$, $a_1>0$
$W=\left(-\frac{b_1}{2a_1},-\frac{\Delta}{4a_1}\right)$
$-\frac{\Delta}{4a_1}<0$, $-\frac{\Delta}{4a_1}>0$, $-\frac{\Delta}{4a_1}=0$
Informuje, że zna więcej własności, ale nie wie z których skorzystać. Wie, że ma zmienić metodę redukcyjną na dedukcyjną.
U5
$f(x)=a_1x^2+a_2x+a_3$, $a_1\neq 0$,
$f(x)=a_1(x-x_1)(x-x_2)$, $a_1\neq 0$
$f(x)=a_1\left(x+\frac{a_2}{2a_1}\right)^2-\frac{\Delta}{4a_1}$
$a_1^2-4a_1a_3>0$
$\begin{cases} \Delta>0 \\ a_1>0 \end{cases}$, $\begin{cases} \Delta>0 \\ a_1<0 \end{cases}$ (warunki do wykorzystania)
$W=\left(-\frac{a_2}{2a_1},-\frac{\Delta}{4a_1}\right)$
A

Rysunek 4.



Rysunek 5.

Po Int. 2 u wszystkich uczniów wystąpiło kojarzenie pewnych własności trójmianu z dowodzoną nierównością zasadniczą. Ta wskazówka utwierdziła uczniów o słuszności i skuteczności obranej metody opartej na wiedzy o funkcji kwadratowej. Byli wyraźnie zadowoleni, co wyrażali np. takimi określeniami jak: „wspaniale”, „ale sprytne”, „niesamowite” itd. Nastąpiło zawężanie wiedzy o trójmianie kwadratowym. Blokada została całkowicie usunięta. Wywołana przez Int. 1 aktywność matematyczna wzrastała i dała wyraźne efekty. Uczniowie wypisywali różne postacie trójmianu kwadratowego wykorzystując skojarzenie nierówności zasadniczej z wyróżnikiem trójmianu, a jednocześnie eliminowali te, które nie spełniały założeń twierdzenia zasadniczego.

Po otrzymaniu wskazówek uzbieżniających wszyscy uczniowie udowodnili nierówność zasadniczą. A zatem te użyte interwencje wywołały u uczniów myślenie dywergentne, które skutecznie uruchomiły u uczniów aktywność matematyczną, a następnie spowodowały jej wzrost.

W swojej pracy pokazałem także skuteczność działania interwencji dywergentnych w rozwiązywaniu problemów geometrycznych.

9 Konkluzje

1. W procesie rozwiązywania matematycznego problemu okazały się skuteczne różne typy interwencji nauczyciela, wywołujące u ucznia otwarcie się na pewien obszar wiedzy, wykorzystanej w procesie rozwiązywania problemu, jak na przykład:
    - skojarzenie problemu zasadniczego z problemem równoważnym powodującym zmianę lub rozszerzenie obszaru wiedzy,
    - skojarzenie problemu (twierdzenia) zasadniczego z grupą twierdzeń lub definicji występujących w tej samej dziedzinie wiedzy (np. geometria euklidesowa lub analityczna, podzielność liczb, teoria wielomianów itp.),
    - skojarzenie przez analogię problemu zasadniczego z innym wcześniej rozwiązanym zagadnieniem (np. problem dodatkowy-zadanie pomocnicze).
2. Rozproszenie może także być wywołane przez samego ucznia („autorozproszenie") świadomie lub nieświadomie; daje ono także pozytywny skutek. W oparciu o podany materiał badawczy możemy stwierdzić, że interwencja nauczyciela wywołująca u ucznia uzdolnionego myślenie dywergentne wpływa na wzrost jego matematycznej aktywności w procesie rozwiązywania matematycznego problemu. Ponadto jest w tym procesie bardzo ważnym, pozytywnym, a czasem niezbędnym zabiegiem dydaktycznym. Jest ona jednym z typów interwencji nauczyciela w procesie kształcenia umiejętności rozwiązywania zadań, na który dotąd nie zwrócono należytej uwagi.
3. Interwencje otwarcia nie zawsze pobudzają aktywność matematyczną ucznia we właściwym kierunku, jak na przykład:

- interwencje wywołujące rozproszenie po obszarze wiedzy nieznanej lub „nieprzyjaznej” uczniowi,
- interwencje wywołujące skojarzenia nie mające nic wspólnego z rozwiązywanym problemem,
- rozproszenie aktywizuje u ucznia nie tę wiedzę, która jest niezbędna do rozwiązania problemu i do której po rozproszeniu uczeń powinien się odwołać.

4. Interwencja otwarcia nie musi być skuteczna w odniesieniu do wszystkich typów zadań i wszystkich uczniów uzdolnionych.

5. Interwencja otwarcia może wystąpić w dowolnym momencie procesu rozwiązywania problemu i może występować wielokrotnie.

10 Zakończenie

Opisane w tej pracy badania na wybranej grupie uczniów uzdolnionych i wynikające stąd wnioski wytyczają kierunek ogólniejszych eksperymentów. Swoim zasięgiem obejmować one powinny przede wszystkim większą liczbę uczniów i z różnych poziomów kształcenia i wiedzy z uwzględnieniem szkolnych warunków pracy nauczyciela. Cenne mogą się okazać wyniki badań i eksperymentów dydaktycznych, prowadzących do ogólniejszych wniosków dotyczących stosowania interwencji dywergentnych w różnych dziedzinach matematyki we współdziałaniu z interwencjami konwergentnymi.