ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 27 (2004)

Halina Drewniak, Ewa Swoboda
Uniwersytet Rzeszowski

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Symbol ułamka i jego związek z rozumieniem stosunku i proporcji przez uczniów II klasy gimnazjum

Wstęp

W szkolnym procesie uczenia matematyki trudno rozdzielić świat idei matematycznych od znaków i symboli z nim stowarzyszonych. Kształtując pojęcie matematyczne nauczyciel organizuje różne konteksty jego występowania, wykorzystuje różnorodne pomoce, tworzy sytuacje problemowe umożliwiające wydobycie własności tego pojęcia, czuwa nad przebiegiem dyskusji. Równocześnie występuje zapis symboliczny, kodujący zauważone prawidłowości. Kontekst odniesienia nie wskazuje bezpośrednio matematycznego pojęcia czy relacji — ich znaczenie powoli wynurza się, indywidualnie dla każdego uczącego się, zgodnie z jego własnym rozumieniem sytuacji. Tak samo jest za znakami, kodującymi wiedzę matematyczną. Znak, czy też symbol matematyczny na ogół bywa uczniowi podany odgórnie, ale znaczenie jakie się pod nim kryje każdy uczeń tworzy dla siebie sam. W procesie uczenia się matematyki często ma miejsce sytuacja, gdy matematyczne znaczenie znaku wynurza się z relatywnie znanych lub częściowo znanych znaków i dołącza się do posiadanego systemu znaków.

Zależność między trójką: obiektem funkcjonującym w określonym kontekście, znaczeniem matematycznym, które on niesie, oraz znakiem kodującym (odkodowującym) tę matematyczną wiedzę często jest określana jako trójkąt epistemologiczny (Steinbring, 1997)

$$\begin{tikzcd}
\text{Obiekt/odpowiedni kontekst} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \text{Znak/symbol} \arrow[dl, leftrightarrow] \\
& \text{Pojęcie} &
\end{tikzcd}$$

Ten sam znak może być różnym znakiem dla różnych odbiorców, lub nawet dla tego samego odbiorcy w różnych okolicznościach. Skemp (1992, s. 97) stwierdza:

> Ten sam symbol może być rozumiany na różne sposoby, w zależności od tego, z jakim schematem myślowym zostanie zasymilowany.

Symbol $\frac{a}{b}$ jest przykładem symbolu (znaku) polisemicznego, czyli wieloznacznego. Jest znakiem ułamka, znakiem dzielenia dwóch liczb — „$a : b$", bądź też znakiem stosunku dwóch wielkości — „a do b".
Ta wieloznaczność przewija się przez historię powstawania symbolu związanego z pojęciem proporcji. Wprowadzenie symbolu „:" jako znaku dzielenia było prawdopodobnie związane z wprowadzeniem „·" jako znaku mnożenia przez niemieckiego matematyka Ch. Wolfa. Równie prawdopodobne jest, że ten sam znak „:" dzielenia można wiązać z wprowadzeniem symbolu proporcji przez Leibniza, który zapisywał proporcję tak: 2 .. 4 = 8 .. 16; a stąd już tylko krok do ustanowienia dwu kropek „.." w pozycji pionowej „:". Podkreślmy, że sama proporcja była kodowana różnie — w symbolizacji arabskiej XV w. wyglądała tak: 16 .'.8 .'.4 .'.2 (czytać należy od prawej do lewej) (Kowal, 1957, s. 99).

S. Turnau pisze: *Chcąc wyrazić stosunek dwu wielkości za pomocą liczb naturalnych, musimy na ogół użyć dwu liczb, które w zapisie rozdzielamy dwukropkiem lub kreską ułamkową, otrzymując symbol zwany w pierwszym przypadku stosunkiem lub skalą, w drugim — ułamkiem. [...] Stosunek dwu ustalonych wielkości może być wyrażony za pomocą ułamka na wiele (nawet nieskończenie wiele) sposobów. Na przykład stosunki liczbowe 1 : 1000000, 2 : 2000000, 10 : 10000000 wyrażają ten sam stosunek, podobnie ułamki $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{10}{15}$ określają tę samą proporcję.*
Mówiąc o stosunkach liczbowych, zapisuje się je na dwa sposoby traktowane równoprawnie, np. $\frac{2}{3}$ i 2 : 3[1]. *Tradycyjnie symbole te odczytuje się różnie: $\frac{2}{3}$ — dwie trzecie, 2 : 3 — dwa do trzech. [...]* ***Ważne jest, by uczeń przyzwyczajał się do widzenia stosunku w zapisie ułamka i ułamka w zapisie stosunku oraz „tłumaczenia" jednego na drugi:*** *wielkość a stanowi $\frac{3}{4}$ wielkości b (czyli $a = \frac{3}{4}b$) znaczy, że a ma się do b jak 3 do 4 (tzn. $a : b = 3 : 4$)* (Turnau, 1988, s. 13, 14).

Pojęcia, którym odpowiada symbol $\frac{a}{b}$ są ze sobą związane. Ułamek $\frac{a}{b}$ może być interpretowany jako wynik dzielenia dwóch liczb naturalnych a i b przez siebie. Jednak rozumienie dzielenia nie jest tożsame z postrzeganiem go przez

[1] Wytłuszczenia, znajdujące się w tekstach cytowanych, pochodzą od autorek artykułu. Uwaga ta dotyczy wszystkich cytowanych fragmentów.

pryzmat ułamka, stąd znak dzielenia „:" nie musi otwierać pola pojęcia ułamek. Analogicznie, jednym z aspektów rozumienia ułamka jest postrzeganie go jako stosunku dwóch wielkości. W takim ujęciu nie tyle wielkość liczb występujących w liczniku i mianowniku określa wartość ułamka, ile ich wzajemny stosunek; stosunek tych wielkości jest ważniejszy od samych wielkości. On pozostaje bez zmian, mimo iż te wielkości się zmieniają. Jednakże znów — w procesie kształtowania pojęcia ułamka uczeń spotyka się z inną jego interpretacją, może wytworzyć sobie inny obraz tego pojęcia, nie skojarzony z pojęciem stosunku, więc symbol $\frac{a}{b}$ nie musi być kojarzony z pojęciem stosunku dwóch wielkości. Różna epistemologia pojęć skojarzonych ze znakiem $\frac{a}{b}$, spotęgowana indywidualnym rozumieniem tych pojęć przez każdego ucznia powodują, że funkcjonowanie tego symbolu w praktyce szkolnej spotyka się z problemami, zwłaszcza w zastosowaniu do pojęcia proporcji.

W tym artykule przedstawimy pewne wyniki badań prowadzonych wśród uczniów klasy II gimnazjum, dotyczących funkcjonowania symbolu ułamka w odniesieniu do pojęcia stosunku dwóch wielkości. Opis badań oraz wnioski z nich płynące pokażemy na tle rozważań o symbolach w matematyce i naukach pozamatematycznych.

1 Znak i symbol w matematyce i w naukach pozamatematycznych

1.1 Symbol a myślenie matematyczne

Słowo symbol pochodzi od starogreckiego słowa „symballein", które znaczyło łączyć w całość, rzucać razem, zbierać razem. W znaczeniu rzeczowym symbol w starożytności oznaczał rzecz złożoną z dwóch części należących do różnych osób. Konkretne części pierścienia, tabliczki lub monety (określane mianem symbolon) dawały się rozpoznać przez abstrakcyjnie pojmowaną wspólnotę ich właścicieli (Lurker, 1994, s. 23). Dzisiejsze rozumienie symbolu, w tym symbolu matematycznego, w pewnym stopniu nawiązuje do jego etymologicznego znaczenia: istota symbolu polega na skojarzeniu i połączeniu obrazu z tym, co na nim jest uobecnione. W znaczeniu przenośnym symbole uzmysławiają świat duchowy. Nie chodzi o złączenie z sobą dwóch części jednego przedmiotu, lecz o spotkanie tego, co konkretne, z reprezentowaną przez siebie rzeczywistością wyższego porządku. Symbol dotyczy rzeczywistości trudnej do zdefiniowania, i ją reprezentuje. Przy pomocy symbolu można w obrazowym skrócie przedstawić kompleks myśli nie dający się ująć w inny sposób (Drewniak 2001, s. 191).

Jeżeli przyjmiemy istnienie abstrakcyjnego „świata matematyki" — świata matematycznych idei, pojęć, relacji, struktur — to przyjmujemy istnienie pewnego świata niewidzialnego. Człowiek, jako istota zmysłowa, potrzebuje symboli, aby zbliżyć się poprzez nie do tego, co niewidzialne. Symbole i tzw. myślenie symboliczne to naturalny ludzki sposób percepcji rzeczywistości.

Z. Semadeni (2002a) używa (za Skempem, 1982) rozróżnienia *struktury głębokie i struktury powierzchniowe*, podkreślając różnicę między znaczeniem matematycznych wiadomości a ich symbolicznym zapisem. Cytuje poglądy Skempa dotyczące związku pojęcia matematycznego i symbolu matematycznego, za pomocą którego jest to pojęcie reprezentowane.

> (...) Te idee [matematyczne] są obiektami czysto umysłowymi: niewidoczne, niesłyszalne i nie łatwo osiągalne nawet dla ich posiadacza. Zanim je przekażemy, idee muszą być przypisane do symboli. Symbole zaś mają podwójny status: są tworami umysłowymi, o których i za pomocą których możemy myśleć, ale są też obiektami fizycznymi — znakami na papierze, dźwiękami — które możemy widzieć lub słyszeć. Służą też jako etykietki i jako „uchwyty" przekazywanych pojęć, którym są przypisane. Symbole to łączniki między wewnętrznym światem naszych myśli a zewnętrznym światem fizycznym. (Skemp, 1982, s. 281)

Można powiedzieć, że znak ma charakter dwojaki, złożony, mianowicie: z jednej strony daje się on opisać w sposób doświadczalny (wypowiadane słowa, zapisane symbole, gesty, itd.), ale zarazem jest też elementem czyjejś świadomości. Każdy znak z jednej strony o czymś nas informuje, z drugiej — coś zastępuje, czyli oznacza. Większość znaków ma charakter konwencjonalny, i taki właśnie umowny charakter mają znaki matematyczne.

1.2 Znak i symbol w naukach pozamatematycznych a w matematyce

Na ogół w matematyce nie ma ostrego rozgraniczenia między symbolem a znakiem, choć w niektórych podejściach takie rozróżnienie jest istotne. J. Pelc (1984) niemal całą swoją publikację poświęca wyjaśnieniu pojęcia znaku, pokazując, jak wielostronnie można ten problem rozważać. Nasze uwagi mają więc charakter marginalny i służą jedynie uwypukleniu roli znaku i symbolu w matematyce.

Znak jest nierozerwalnie związany z myśleniem. Cała wiedza, każda myśl, ma charakter znakowy. Poznanie to wg. Peirce'a (1977) system treści, a nie przeżyć czy doznań podmiotowych, a te treści wyrażają się poprzez znaki. Myśl będąca znakiem skierowana jest na zewnętrzny, niezależny od niej przedmiot,

który nigdy nie jest samoobecny w poznaniu. Myśl nie może być intuicyjnym oglądem. Każdy znak wskazuje swój przedmiot poprzez znaczenie z nim związane.

Znak jest to element rzeczywistości, który coś znaczy, ma dla kogoś znaczenie, o czymś informuje i dzięki temu stanowi środek służący do komunikowania się ludzi. Ch. S. Peirce pisał: *znak definiuję jako coś, co zostało określone przez coś innego, zwanego jego przedmiotem, i co w określony sposób działa na człowieka — działanie to nazywam interpretantem — tak iż ów interpretant zostaje wskutek tego określony przez ów przedmiot.* Opisywał też znak jako coś, *co w jakikolwiek sposób daje dowolne określone pojęcie o jakimś przedmiocie* (Peirce, 1977, s. 80-81).

Peirce (1977) zauważył również, że każda reprezentacja musi być triadyczna (jest relacją trójczłonową): wszelkie reprezentowanie jest zastępowaniem czegoś — dla — kogoś. Znak jest reprezentacją — przedstawia on pewien przedmiot dla kogoś. Każda reprezentacja jest mediacją, pośredniczeniem między dwoma elementami przez trzeci (Cackowski Z. i inn., 1987).

Cechą znaku jest jego przynależność do łańcucha interpretacji. Znak musi być interpretowany poprzez inny znak. Znak zakłada system znaków. Żadne znaczenie nie jest przez umysł poznający wychwytywane wprost, lecz jest zapośredniczone poprzez inne znaczenie. Nie ma prostych, ewidentnych, samodzielnie dających się poznać treści. Każda treść jest zrozumiała tylko poprzez inną treść. (Cackowski i inn. 1987, s. 482). Uniwersum znaków ma charakter ciągły, pozbawiony początku i końca.

Interpretant znaku to według Peirce'a zarówno znaczenie znaku, jak i inny znak. Znak realizuje swoje znaczenie poprzez jego przekład na inny znak. Interpretant jest elementem konstruktywnym triady znakowej . Odróżnia się trzy rodzaje interpretantów:

1. bezpośredni, który wynika z faktu, że znak ma szczególną zdolność bycia interpretowanym; zanim znajdzie się ktoś, kto go zinterpretuje — jest abstrakcją, możliwością jedynie;
2. dynamiczny, czyli to, czego doświadczamy w każdym akcie interpretacji i co za każdym razem jest inne — jest pojedynczym rzeczywistym faktem;
3. ostateczny, będący wynikiem interpretacji — jest tym, do czego wszystkie rzeczywiste odczytania zmierzają.

Znak jest to rzeczywistość, która odsyła do jakiejś innej rzeczywistości albo ją aktualizuje. Znak uwidacznia, a jednocześnie ukrywa jakąś rzeczywistość (Drewniak, 2001 s. 31), gdyż w każdym znaku wyróżnia się dwie warstwy: nosiciela znaczenia i znaczenie. Nosicielem znaczenia jest przedmiot materialny,

traktowany jako konkret, ale widziany w jego szczególnym aspekcie (kwadratowość, biel). Znaczenie wybiega poza rzeczywistość materialną.

Istnieje istotne rozróżnienie między znakiem a symbolem. Symbol jest też znakiem, ale o specyficznej wymowie. Pomiędzy symbolem, a tym, co on reprezentuje, zachodzi ścisły związek, który ma na celu istotową jedność. To, co oznaczające i to, co oznaczane, w przeciwieństwie do arbitralnie ustanawianych znaków nie są wymienialne. Jako przykład wymieńmy symbole narodowe: godło, barwy narodowe; inny przykład — czerń, jako symbol żałoby. (Drewniak, 2001 s. 56).

Z tego skrótowego zestawienia widać, że znak w filozofii i znak w matematyce mają pewne wspólne obszary rozumienia, ale też się różnią.

1. Znak w filozofii jest o tyle znakiem, o ile otwiera nas na ten system treściowy oraz rzeczywistość, jaką on wyraża i ułatwia nam uczestniczenie w niej. Owo odniesienie znaku do rzeczywistości oraz naszej świadomości polega na tym, że otwiera on nas na tę nieznaną rzeczywistość zarówno w sposób teoretyczny, jak i praktyczny. Znak nam tę tajemnicę przybliża (Drewniak, 2001, s. 32). Takie znaczenie znaku można porównać do dochodzenia do struktur głębokich poprzez zapoznawanie się ze strukturami powierzchniowym: jeżeli matematyk poznaje jakieś abstrakcyjne pojęcie poprzez definicję, i zajmuje się nim dłużej: analizuje przykłady, dowodzi twierdzeń, stosuje dane pojęcie w matematyce i poza nią, to zaczyna ono mieć dla niego sens (Semadeni, 2002a, s. 53). W matematyce przyjmuje się, że znak — to przedmiot lub zjawisko, które wskazuje, zastępuje, odnosi się, czyli oznacza inny przedmiot, zjawisko, stan rzeczy konkretny lub abstrakcyjny. To, co znak oznacza, jest jego desygnatem. Relacja między znakiem a desygnatem jest relacją oznaczania lub ogólniej — znaczenia; znak traktowany jest jako nośnik znaczenia (Semadeni, 2002c, s. 148)
2. Symbol w naukach pozamatematycznych ma jednoznaczny, niewymienialny związek z tym, co reprezentuje. W matematyce jest inaczej. Zarówno znaki, jak i symbole są konstruowane przez człowieka dla zapisania pewnych idei, dla komunikowania się — i związek zarówno między tym, co nazywamy zwyczajowo symbolem, a znakiem — jest wymienny. „Gdy mamy na myśli, że „x" znaczy „y", to „x" może oznaczać znak lub układ znaków; w węższym sensie mogą to być symbole lub nazwy pojęć matematycznych, a w szerszym — mogą to być również wyrażenia matematyczne, zdania logiczne lub formy zdaniowe, figury geometryczne, wykresy, algorytmy, zdania o treści matematycznej wypowiedziane lub napisane w jakimś języku narodowym" (Semadeni, 2002c, s. 148).

2 Pojęcie stosunku dwóch wielkości a symbol ułamka

Granica między pojęciami: stosunek i proporcja jest bardzo nieostra. T. van der Valk , H. Broekman (2001) podają opinię Confrey'a i Smith'a (Confrey and Smith, 1995):

> Stosunek nigdy nie jest przykładem jednostkowego związku pomiędzy wielkościami, lecz jest konstruowany poprzez obiektywizowanie i nazywanie tego związku, który istnieje poprzez istnienie proporcji. Rozpoznanie stosunku polega na rozpoznaniu homogenizmu stosunku w więcej niż jednym przypadku (s. 74).

W tej wypowiedzi zwracają uwagę sformułowania, konstruowanie, rozpoznanie. Zrozumienie pojęcia stosunku nie jest osiągalne przez jednostkowy akt myśli, przez jednostkowe ustalenie związku między dwiema wielkościami. Taki związek staje się czytelny poprzez porównywanie wielu sytuacji. S. Turnau, analizując związek między równością ułamków a proporcjonalnością pisze: *Głębokie i operatywne rozumienie [...] może nastąpić tylko w sytuacjach, gdy stosunek pewnych wielkości okazuje się ważniejszy od samych wielkości, gdyż nie zmienia się, mimo, że zmieniają się te wielkości, innymi słowy, gdy pewne wielkości okazują się* ***proporcjonalne*** (Turnau, 1988, s. 9).
Można postawić hipotezę, że oba te ujęcia nawiązują do najstarszej definicji wielkości proporcjonalnych, zawartej w szóstej księdze Elementów Euklidesa. W terminologii dzisiejszej definicja ta brzmi:

> Wielkości A i B (pewnego rodzaju) są proporcjonalne do wielkości C i D (tego samego lub innego rodzaju), jeżeli dla dowolnie dobranej pary liczb naturalnych m i n z zależności $mA > nB$, $mA = nB$, $mA < nB$ wynikają zależności $mC > nD$, $mC = nD$, $mC < nD$. (Czech, 1817)

W Encyklopedii Matematycznej (1990) nie ma hasła „stosunek dwóch wielkości", w związku z tym nie ma też symbolicznego zapisu tego stosunku. Są za to: stosunek jednokładności, stosunek odcinków, stosunek podziału odcinka (skierowanego).

Definiowane jest pojęcie **proporcji**: jest to relacja równości dla dwóch stosunków $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (lub $a : b = c : d$) wyrażająca fakt, że stosunek a do b jest taki sam, jak stosunek c do d. W tym zapisie stosunek jest reprezentowany różnymi znakami: jako zapis słowny, ilorazowy oraz ułamkowy.

Współczesne szkolne podręczniki dla gimnazjalistów różnie traktują stosunek i proporcje. Na przykład w podręczniku pod redakcją M. Dobrowolskiej (1999) znajduje się rozdział *Proporcjonalność*, który zaczyna się następująco:

W tym rozdziale rozwiązywać będziemy równania postaci

$$\frac{1}{2} : x = \frac{3}{7} : 2 \quad \frac{2}{x-5} = \frac{3}{7} \quad \frac{3}{x} = \frac{5}{x-1} \quad \frac{x+1}{x+2} = \frac{3,3}{2,5}$$

Zauważ, że w równaniach tych po obu stronach występują ilorazy.

Równość dwóch ilorazów nazywa się **proporcją**

$$a : b = c : d \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

W tej propozycji dydaktycznej autorzy zarówno zapis typu $a : b$, jak $\frac{a}{b}$ nazywają „ilorazem". W całym dziale nie pojawia się pojęcie „stosunek", ani nie ma odwołania do pojęcia ułamka.

3 Symbolika i metody kształtowania pojęcia proporcji sugerowane przez wybrany podręcznik dla gimnazjalistów

3.1 Uwagi ogólne

W praktyce szkolnej podstawowym zagadnieniem jest samo kształtowanie pojęcia proporcji oraz doprowadzenie do umiejętności jego zastosowania. Jednak ponieważ pojęcie nie może funkcjonować bez symbolu, który to pojęcie reprezentuje, autorzy koncepcji kształcenia muszą zdecydować się na operowanie odpowiednim symbolem.

Rozumienie proporcji jest przedmiotem badań dydaktyków matematyki od wielu lat (Brink, Streefland, 1979, Panhuizen, 1991). Jak wykazują wyniki wielu badań, pojęcie to jest dla uczniów bardzo trudne (Hart, 1981, de Bock i in. 1998, Keret, 1999). Podejmowane są więc różnorodne zabiegi dydaktyczne, by to pojęcie kształtować w taki sposób, by jego obraz, ukształtowany u ucznia, zgodny był z matematycznymi własnościami proporcji, i zmiany proporcjonalnej.

Przeglądając propozycje dydaktyczne kształtowania pojęcia stosunku i proporcji znajdujące się w polskich podręcznikach dla gimnazjum, szukałyśmy takiego wprowadzenia, w którym uczeń poznaje to pojęcie nie poprzez definicję, lecz poprzez rozwiązywanie czytelnego dla siebie problemu. Zdecydowałyśmy się na propozycję zawartą w podręczniku serii „Matematyka 2001".

3.2 Koncepcja podręcznikowa

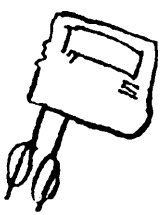
W podręczniku „Matematyka 2001" dla II klasy gimnazjum znajduje się osobny moduł dotyczący wielkości proporcjonalnych. Moduł zatytułowany jest

„Kruche ciasteczka". Autorzy wprowadzają tutaj pojęcie stosunku dwóch wielkości, jak i stałości tego stosunku (zachowania proporcji) poprzez kontekst przepisu na ciastka, licząc na intuicje pozaszkolne uczniów. Równocześnie dbają o posługiwanie się odpowiednim zapisem, symbolem - proponując zapis głównie w postaci ułamkowej. Większość zadań w tym module ma kontekst sytuacyjny i odnosi się do „żywej matematyki". Proponowany jest podział modułu na 3 jednostki lekcyjne.

Twórcy podręcznika proponują poświęcenie pierwszej lekcji na uporządkowanie wiadomości o stosunku dwóch wielkości i na stosowaniu różnych sposobów zapisywania tego stosunku. W tę tematykę wprowadzić ma uczniów analiza przepisu na ciasteczka, zamieszczonego we wprowadzeniu. Oto ten przepis:

Kruche ciasteczka

6



Kruche ciastka z migdałami

SKŁADNIKI:
mąka
masło
cukier puder
migdały

Przesianą mąkę zmieszać w stosunku 4 do 3 z masłem (najlepiej, siekając długim, szerokim nożem). Dodać następnie cukier puder, w ilości o połowę mniejszej niż ilość użytej mąki, oraz sparzone, obrane ze skórki, posiekane migdały. Zagnieść szybko ciasto, rozwałkować na grubość 0,8 cm, ułożyć na blasze. Wstawić do gorącego piekarnika, piec 8–10 minut. Lekko zarumienione na jasnozłoty kolor wyjąć, pokroić na kwadraty, zdjąć z blachy i ułożyć na półmisku. Gotowe.

➤ Do ciasta użyto 20 dag mąki. Ile wzięto masła? Ile zużyto cukru pudru? Ile w sumie ważyły produkty, z których zrobiono ciastka? Jak myślisz, czy ciastka ważą tyle samo?

➤ Jeżeli wzięto 4 miarki cukru pudru, to ile zużyto mąki, a ile masła?

➤ Zapisz, jaką wartość mają ilorazy: $\frac{\text{ilość mąki}}{\text{ilość cukru pudru}}$ i $\frac{\text{ilość mąki}}{\text{ilość ciasta}}$.

Rysunek 1.

Z dydaktycznego punktu widzenia pytania tworzą pewną nitkę dydaktyczną wiodącą do idei stosunku dwóch wielkości oraz do skojarzenia tego wyobrażenia z odpowiednią symboliką. Każdy podpunkt miał spełniać inne zadanie:

- Podpunkt 1: reprezentowanie określonego stosunku przez dwie określone wielkości tego samego rodzaju; reprezentowanie stosunku za pomocą odpowiednio dobranych wielkości liczbowych. Sytuacja odwołuje się do naturalnych intuicji, do realnych reprezentacji. Kontekst odniesienia jest bardzo rzeczywisty, fizyczny.
- Podpunkt 2: jest to przejście od stosunku wyrażanego w liczbach mianowanych do stosunku reprezentowanego tylko za pomocą liczb naturalnych. Ma uniezależnić wartość stosunku od konkretnej jednostki pomiaru wielkości.
- Podpunkt 3: zaadoptowanie zapisu z kreską ułamkową jako symbolu wyrażającego ideę stosunku dwóch wielkości, nadanie symbolowi ułamka szerszego znaczenia.

Zadania umieszczone na następnej stronie wymagają zastosowania pojęcia stosunku dwóch wielkości. Na marginesie podręcznika, obok tych zadań umieszczona jest uwaga:

> Iloraz dwóch wielkości często nazywamy stosunkiem tych wielkości.
> Stosunek wielkości można zapisać w postaci ułamka.

Uwaga ta, w zamyśle autorów podręcznika miała zapewne werbalizować intuicje wytworzone w wyniku rozwiązywania zadania wstępnego. Miała też pomagać w budowaniu powiązań między pojęciami: iloraz dwóch wielkości, stosunek dwóch wielkości, ułamek.

4 Funkcjonowanie symbolu $\frac{a}{b}$ w świetle przeprowadzonych badań

4.1 Cele badania

Badanie to zostało przeprowadzone dla szukania odpowiedzi na następujące pytania:

- czy symbol $\frac{a}{b}$ wywołuje skojarzenia z pojęciem stosunku dwóch wielkości, lub z pojęciem proporcji;

- czy symbol $\frac{a}{b}$ jest w sposób naturalny używany przez uczniów w sytuacji kodowania pojęcia stosunku i proporcji;
- na ile symbol $\frac{a}{b}$ pomaga bądź przeszkadza w prawidłowym rozumieniu pojęcia stosunku dwóch wielkości;
- jakie symbole uczniowie spontanicznie kojarzą z pojęciem stosunku i proporcji.

4.2 Organizacja badań

Badanie składało się z dwóch etapów. W pierwszym etapie obserwowany był przebieg lekcji prowadzonej zgodnie z koncepcja podręcznikową. Specjalna uwaga obserwatora skierowana była na sposób tworzenia przez nauczyciela związku między pojęciem a symbolem. Druga część badania odbyła się pół roku później; uczestniczyli w niej uczniowie tej samej klasy, w której prowadzona była obserwowana lekcja. Miała formę indywidualnej rozmowy między badaczem a uczniem. Uczeń rozwiązywał dwa zadania, które otrzymał zapisane na kartce a badacz starał się wysondować, jaką symbolikę stosuje uczeń w związku z pojęciem stosunku i proporcji. Treść zadań zamieszczona jest poniżej, a przebieg spotkania był rejestrowany na taśmie magnetofonowej.

I. Przesianą mąkę zmieszać w stosunku 4 do 3 z masłem. Dodać następnie cukier puder, w ilości o połowę mniejszej niż ilość użytej mąki.

1. Do ciasta użyto 20 dag mąki. Ile wzięto masła? Ile zużyto cukru pudru?
2. Jeżeli wzięto 4 miarki cukru pudru, to ile zużyto mąki, a ile masła?
3. Zapisz jaką wartość mają ilorazy:

$$\frac{\text{Ilość mąki}}{\text{Ilość cukru pudru}} \qquad \frac{\text{Ilość mąki}}{\text{Ilość masła}}$$

II. Dokończ prostokąt tak, aby stosunek długości jego boków był taki sam jak stosunek długości boków narysowanego prostokąta.

Zadanie I jest dokładną kopią zadania zamieszczonego w podręczniku i analizowanego podczas lekcji.

Zadanie II testu nawiązywało w swoim sformułowaniu zarówno do zadania wykorzystanego przez Piageta w trakcie jego badań o rozumieniu proporcji (Piaget, Inhelder, 1967), jak i do zadań z testów prowadzonych w Anglii w ramach programu badawczego „Concepts in Secondary Mathematics and Science" (K. Hart, 1981). Zadanie w podobnym brzmieniu również było rozwiązywane przez uczennice podczas lekcji wprowadzającej pojęcie stosunku i proporcji. Zastosowana w badaniach skala podobieństwa dla prostokątów wynosiła $1 : 2,5$.

W tej pracy zostanie przeanalizowany przebieg spotkania z dwójką wybranych uczennic II klasy gimnazjum[2]. Anna jest uczennicą bardzo zdolną, nie mającą problemów z matematyka szkolną, zdobywającą wysokie oceny swej pracy. Barbara nie lubi matematyki, twierdzi, że jej nie umie, jej oceny z matematyki są bardzo niskie. Prowadzący badanie nie kontaktował się z uczącą dziewczyny nauczycielką, nie zasięgał informacji o ich postępach na lekcjach.

4.3 Symbolika wykorzystana podczas lekcji

Obserwowana przez nas lekcja była próbą wiernej realizacji propozycji podręcznikowej. Nie jest przedmiotem naszej analizy całokształt tej lekcji. Istotne jednak jest, że nauczycielka bardzo starała się zapis symboliczny stosunku ograniczyć do zapisu postaci $\frac{a}{b}$. Znaczenie werbalnego sformułowania *zmieszać mąkę w stosunku 4 do 3 z masłem* nie zostało wsparte żadnym symbolicznym zapisem. Praca wokół trzeciego podpunktu i przy następnych zadaniach wybiegła prawdopodobnie poza intencje autorów: nauczycielka wyraźnie dążyła do określenia wartości ilorazów w sposób „najbardziej uproszczony" (otrzymywano: $\frac{20}{10} = 2$, $\frac{12}{28} = \frac{3}{7}$, $\frac{3,8}{0,6} = 6,33$, $\frac{7}{1,1} = 6,36$). Generalnie, zapisując rozwiązania zadań z poleceniem: „oblicz stosunek", zapisz stosunek", „wyznacz stosunek", „sprawdź, czy stosunki są takie same" otrzymywano ułamki (zgodnie z poleceniem zadania), które często następnie były skracane. W końcowej fazie lekcji pojawiło się sformułowanie, że „stosunek dwóch wielkości jest to iloraz tych wielkości zapisywany za pomocą ułamka". W tabeli 1 zostały zestawione symbole występujące i nie występujące podczas lekcji.

[2]W analizie wykorzystano fragmenty pracy licencjackiej pani Moniki Mlaś: Stosowanie przez uczniów klasy II gimnazjum symboliki związanej z proporcjami, w świetle pewnych badań, napisanej pod kierunkiem E. Swobody.

symbole/słowa	
występujące podczas lekcji:	nie występujące podczas lekcji:
• **słowne określenie: stosunek dwóch wielkości;** • **słowne określenie a do b;** • **słowo: ułamek;** • **słowo: iloraz;** • **wizualna reprezentacja** (stosunek odpowiednich boków prostokątów podobnych); • **symbol $\frac{a}{b}$;**	• zapis ilorazowy $(a : b)$; • **słowo: proporcja;**

Tabela 1.

Jak z tego zestawienia widać, pojęcie stosunku było kodowane głównie słownie, przy czym funkcjonowały tutaj trzy słowa: stosunek (dwóch wielkości), iloraz, ułamek. Zapis symboliczny został ograniczony do symbolu $\frac{a}{b}$.

Po tej lekcji uczniowie jeszcze przez pewien czas realizowali moduł „proporcje", w trakcie którego rozwiązywali szereg zadań wymagających posłużenia się pojęciem stosunku i proporcji oraz stosowania symboliki związanej z tymi pojęciami. Toczyły się one bez udziału obserwatora.

4.4 Analiza spotkań z uczniami

Przebieg spotkań został dokładnie zanalizowany. Aneks 1 i 2 zawiera szczegółowy protokół spotkań, wraz z komentarzem dydaktycznym każdego jego fragmentu. Proponujemy czytelnikowi najpierw zapoznać się z aneksami; ułatwi to zrozumienie dalszej analizy. Tutaj zamieszczamy omówienie, uwypuklające funkcjonowanie symbolu ułamka.

Oznaczenia:

E: — wypowiedź eksperymentatora;

U: — wypowiedź ucznia;

3. — trzecia wypowiedź wywiadu;

Θ4 — przerwa w wypowiedzi, trwająca 4 sekundy;

tekst stanowiący treść zadania, jest pisany kursywą (*italic*);

tekst wyróżniony podczas analizy jest wytłuszczony (**bold**).

4.4.1 Pierwsza uczennica — Anna

Anna bez obaw przystąpiła do rozwiązywania zadań. Pracowała szybko i pewnie. W trakcie pracy wykazała się dobrym i elastycznym rozumieniem

stosunku i proporcji. Zwrócimy uwagę na pewne charakterystyczne elementy jej pracy.

Fragment I — uczennica przystępuje do pracy.

10. **U:** Czyli ta mąka **w stosunku** do masła jest **cztery do trzech**, tak, **i te cztery — to jest te 20 dag.**
11. **E:** Zapisz.
12. **U:** (pisze 4 : 3). I to teraz trzeba **na 4**.
13. **E:** Proszę Cię bardzo...
14. **U:** ... i to będzie 5 dag, Θ2, i razy trzy ponieważ jest, Θ1, stosunek cztery do trzech, czyli 15 dag masła trzeba.

Już na początku pracy widać, że Anna rozpoznała matematyczne relacje zachodzące między zmiennymi w zaproponowanej sytuacji zadaniowej. Wyraźnie miała świadomość, że zadanie jest zadaniem matematycznym, a kontekst (przepis na ciasteczka) jest tylko pewną reprezentacją dla pojęcia stosunku dwóch wielkości. Rozumiała ona *stosunek* jako ogólny związek między wielkościami (10.). Związek ten wyraziła słownie (*cztery do trzech*); dopiero na wyraźną prośbę obserwatora powstałą zapis 4:3 (patrz — kopia pracy Anny, Aneks 1). Potrafiła to pojęcie zastosować do wyrażenia związku między wielkościami tego samego rodzaju (tutaj — dag). W tej sytuacji, gdy dany stosunek ma zachodzić między wielkościami wyrażanymi w dag, przy zdeterminowanej jednej z tych wielkości (20 dag), uczennica przedstawiła tę określoną wielkość w tylu częściach, na ile wskazuje pierwszy wyraz proporcji, i drugą wielkość wyliczyła, biorąc tyle części, ile wskazuje drugi wyraz proporcji. Można przedstawić to postępowanie ((12.)–(14.)) następująco:

$$4 \text{ do } 3 = \underbrace{\square\square\square\square}_{20\text{ dag}} \text{ do } \underbrace{\square\square\square}_{?}$$

Stosunku 4 do 3 Anna nie wiąże ani z jednostką miary (może być dag, może być „miarka"), ani z liczbami, które ten związek wyrażają. Obrazuje to Fragment II.

Fragment II — uczennica rozwiązuje zadanie I podpunkt 2. Wcześniej wyliczyła, że potrzebuje 8 miarek mąki.

18a. **U:** A ile wzięto masła? Czyli, że **jeżeli znowu jest stosunek czterech do trzech**, to, Θ1, cukru pudru [nieistotne przejęzyczenie uczennicy] wzięto 6, bo znowu **to dzielimy, żeby było**, to jeżeli tu jest 4 to to **mnożymy przez 2** i wyjdzie tu 8, a tu będzie 6.

19. E: Proszę bardzo.
20. U: (pisze: 6 cukru).
21. E: **Czyli tu gdzie było 4, to...**
22. U: **Będzie 8, a tu będzie 6.**
23. E: **A tu gdzie jest 3, tu mi pokazujesz 3, będzie 6.**
24. U: **Tak.**

W (18a.) uczennica nie stosowała żadnego symbolicznego zapisu, jedynie słownie określiła związki między występującymi wielkościami (znowu jest stosunek czterech do trzech). Gdyby chcieć zapisać formalnie operacje, które odpowiadają drodze myślowej uczennicy, to taki zapis mógłby wyglądać następująco:

$$\frac{4}{3} = \frac{8:2}{?:2}, \quad \text{lub} \quad \frac{4}{3} = \frac{4\cdot 2}{?\cdot 2}$$

Mamy jednak duże wątpliwości, czy uczennica rzeczywiście wyobraziła sobie skracanie i rozszerzanie ułamków, czyli przedstawiła myślowo ułamek w postaci równoważnej za pomocą różnych liczb. Raczej było to działanie podyktowane intuicyjnym rozumieniem stosunku.

Ogólnie, działania Anny przy rozwiązywaniu dwóch pierwszych podpunktów pierwszego zadania miały bardzo oszczędną zewnętrzną reprezentację, uczennica niczego nie zapisała, nie kodowała swego postępowania, nie używała żadnych znaków ani symboli. Posługiwała się słownymi sformułowaniami (a do b), sprowokowana do zapisu — użyła zapisu $a : b$.

Fragment III

30. U: (czyta) *Zapisz, jaką wartość mają ilorazy: ilość mąki*, Θ2, mąki to było 20 dag... *do ilości cukru pudru*, ..., a cukru pudru było 10 (pisze). I to będzie, ... **to można skrócić**... no tak....
31. E: A jak skrócimy to ile będzie, jak będzie?
32. U: **To będzie 2, 2 dag.**
33. E: 2 dag, tak?
34. U: Tak. A ilość mąki to tutaj będzie znowu 20 dag, dekagramów (wraca do wcześniejszego) — to tutaj też się skrócą te dekagramy, czyli nie będzie?
35. E: Skrócą się dekagramy.
36. U: **Samo 2 będzie.** A ilość masła to było 15 dag, i tu się też skrócą, i się skróci przez 5 i to będzie **cztery trzecie.**

W momencie, gdy uczennica jest obligowana do zastosowania zapisu ułamkowego (30.), zupełnie odrywa się od wcześniejszego sposobu myślenia. Nie zdradza niczym, że widzi związek tego, co robi obecnie z wcześniejszymi operacjami i zapisami, ani ze sformułowaniami: cztery do trzech, dwa razy więcej. Zaczyna stosować reguły algorytmiczne operacji na ułamkach. Zapis ułamkowy $\frac{20\text{ dag}}{10\text{ dag}}$ przekształciła ostatecznie do wartości 2, a nie $\frac{2}{1}$, który to zapis mógłby świadczyć o myśleniu proporcjonalnym. Wynik przekształcenia $\frac{20\text{ dag}}{15\text{ dag}}$ odczytuje jako „cztery trzecie", podkreślając słownie, że taki zapis funkcjonuje dla niej jako ułamek. W takim razie wydaje się, że nie funkcjonował u niej wyraźny, równoważny związek między zapisem $\frac{a}{b}$ wyrażającym ułamek, a zapisem $\frac{a}{b}$ wyrażającym stosunek.

Fragment IV.

38. **U:** ... (zaczyna czytać) *Dokończ prostokąt... boków narysowanego prostokąta.* **Θ11.** Znaczy, Θ1, ten prostokąt będzie większy od tego, Θ1, mniejszego prostokąta, **i to będzie on, Θ4, cztery razy większy od tego**, tu dokończyć na tej kartce?
39. **E:** Dokończ.
40. **U:** (mierzy) Tu jest 3 cm, tu jest 7,5; czyli jest trzy razy więk... **(mierzy jeszcze raz), nie**; siedem i pół ... tu **będzie... dwa i pół razy większy jest.**

Tutaj uczennica zaczyna rozwiązywanie zadania od wizualnej oceny „obu" figur, którą to ocenę potem weryfikuje, mierząc długości odpowiednich boków. Liczbowe porównanie długości odcinków (40), to próba określenia stosunku ich długości. Otrzymany wynik „dwa i pół" to „myślenie wielkością 3"

$$7,5 = 3 + 3 + \frac{1}{2} \cdot 3.$$

Wyraźnie wskazuje na to procedura tworzenia rysunku, przedstawiona we fragmencie V.

Fragment V

42. **U: Trzy, sześć, ... i pół**, i ... jeden i pół; czyli tutaj też musi być **o tyle samo więcej**; jak tu jest 2 cm, razy dwa i pół, to będzie 5 cm. Czyli tutaj musi być na pięć.

W tym kolejnym kroku uczennica nie stosowała proporcji jako narzędzia do rozwiązywania zadania. Posługiwała się skalą podobieństwa, jako operatorem

powiększania. Jej metoda pracy była następująca: należało znaleźć **czynnik** powiększania (głównie przez odkładanie odpowiedniego odcinka modelu na odcinku „nowej" figury), a następnie ten czynnik wykorzystać dla obliczenia długości szukanego odcinka.

Z punktu widzenia stosowania symboliki, najciekawsze jest samo zakończenie pracy Anny. Oto stosowny fragment protokołu:

Fragment VI:

43. **E:** Czyli co — koniec.
44. **U:** Uhm, czyli tutaj jest taka **proporcja**, że **jeden odpowiada dwa i pół** (pisze: **1 : 2,5**).
45. **E:** Pięknie, tak mi jeszcze nikt nie napisał. Jak to rozumiesz?
46. **U:** Czyli, jeżeli tutaj jest **np. 1 cm**, to tutaj będzie **odpowiadał** dwu i pół centymetrom. To zależy jaka jest **jednostka**.
47. **E:** Czyli, jeżeli nie byłoby np. centymetra, gdyby było w calach?
48. **U:** Czyli jeden cal, a tutaj dwa i pół cala.

Ta wypowiedź jest spontanicznym wnioskiem z badania, dokonanym przez samą uczestniczkę obserwacji. Anna używa nowego słowa — „odpowiada". Wyraźnie podkreśla w ten sposób, że stosunek, odniesiony do wielkości geometrycznych, rozumie jak związek między dwiema wielkościami. Ten związek nie sprowadza się do jednej wartości. To, co łączy obie wielkości występujące w stosunku, to funkcjonowanie jednej, wspólnej jednostki. Wypowiedź (44) nastąpiła po wyraźnym sygnale badacza o zakończeniu pracy (43), czyli wtedy, gdy uczennica nie tylko miała świadomość, że zadania rozwiązała, ale też mogła przyjąć, że badacz już więcej niczego nie oczekuje. Jej wypowiedź, i zaprezentowany zapis można więc potraktować jako najbliższy własnemu rozumieniu opis pojęcia stosunku, i jako zaprezentowanie najbardziej adekwatnej symboliki.

4.4.2 Druga uczennica — Barbara

Barbara to uczennica mająca problemy z matematyką. Rozwiązanie tych zadań zajęło jej sporo czasu. Do pracy przystąpiła niepewnie. Protokół ze spotkania znajduje się w Aneksie 2.

Protokół pokazuje, że uczennica nie ma ukształtowanego pojęcia proporcji (6.), (26.), i że w trakcie rozwiązywania zadania wykorzystuje je w dość specyficzny, intuicyjny sposób. Bardzo istotne jest, że stara się wykorzystywać zapis $\frac{a}{b} = \ldots$ Głębsza analiza wykazuje jednak, że zapis symboliczny nie pozostaje w związku z rozumieniem proporcji.

Fragment VII

18. **U:** Θ6.
19. **E:** No właśnie, to lećmy. *Do ciasta użyto...*
20. **U:** *20 dag mąki...* (cisza, zaczyna pisać).
21. **E:** Aha, zaczynasz pisać: *dane: 20 dag mąki.*
22. **U:** (czyta cicho) *Ile...*
23. **E:** Ile wzięto masła.
24. **U:** Θ5.
25. **E:** Jest gdzieś w przepisie jakaś informacja, która by Ci mogła pomóc?
26. **U:** W stosunku **4 do 3... z masłem.**
27. **E:** Z masłem, o właśnie... mąka ma być w stosunku **4 do 3** z masłem.
28. **U:** Θ7.
29. **E:** Jest to jakaś informacja?
30. **U:** Tak.
31. **E:** Jak rozumiesz tę informację?
32. **U:** Może... $\frac{4}{3}$ **(cztery trzecie).**
33. **E:** Cztery trzecie... co to znaczy cztery trzecie?
34. **U:** Θ2, że to jest, Θ1, wię....cej ..., Θ2, że to jest jedna całość (szybko) i $\frac{1}{3}$ (wolniej).

W treści zadania pierwszego stosunek dwóch wielkości jest wyrażony słownie (4 do 3). Barbara znalazła to wyrażenie, wiedziała, że może ono być pomocne, jednak nie wiedziała jak z niego skorzystać. W dalszej części jej pracy widać, że nie traktowała tego stosunku jako związku między dwiema wartościami, była to dla niej jedna wartość (jedna liczba). Mechanizm, który doprowadził ją do traktowania stosunku jako liczby w dużej mierze to zaistnienie zapisu $\frac{a}{b}$, a nie posługiwanie się obrazem myślowym skojarzonym z pojęciem. Sformułowanie 4 do 3 trafia w pustkę (27.). Proszona o wytłumaczenie — jak rozumie tę informację — dziewczynka ratuje się, pisząc symbol, który był wielokrotnie ćwiczony na lekcji. Pisze, wymawia — i znajduje furtkę dla dalszego działania. Rozpoznaje bowiem w zapisie symbol ułamka, który potrafi już zinterpretować. Jest to ułamek wyrażający pewną wielkość, przynajmniej taką interpretację przyjmuje uczennica w dalszym przebiegu pracy, co obrazuje następny fragment protokołu.

Fragment VIII.

45. **E:** Czyli, jeżeli masła ma być więcej niż mąki, a mąki mamy 20 dag...

46. U: Θ8.

47. E: Jest szansa wymyślić, ile tego masła w końcu trzeba zmieszać z mąką?

48. U: Θ8. **Cztery dekagramy masła?** ... Nie wiem właśnie.

49. E: No to nic, zapisz **coś**.

50. U: *pisze*: $\frac{4}{3}$ **masła**.

51. E: No i teraz tak popatrzmy, tak na zdrowy chłopski rozum... Sama siebie się pytam, mam te 20 dag mąki, to ile w końcu tego masła?

52. U: Θ7, jeden, jedno masło, i... 50 gramów

Kwestia (48) protokołu pokazuje, że zawieszona na słowach, bez symbolicznego zapisu uczennica czuje się zupełnie zagubiona. Próbuje się ratować, i w sformułowaniu „cztery do trzech" (48.) znaleźć informację „wprost", ale sama zdaje sobie sprawę, że do problemu trzeba podejść inaczej. Proszona — zapisz coś — wraca do symbolu $\frac{4}{3}$, z dopiskiem „masła". Urealniając tę wielkość, (52) stwierdza — jedno masło.. i jeszcze trochę „trochę". Akceptuje przy tym zupełnie absurdalne wielkości liczbowe.

Nieco pewności nabiera przy pytaniu o ilość cukru, gdyż do odpowiedzi nie musi wykorzystywać szkolnych wiadomości o proporcjach, nie ma też żadnego zapisu uprzedzającego o występowaniu proporcji:

Fragment IX

68. U: Θ2. Ile zużyto cukru pudru? (*ciszej dla siebie czyta szybko: następnie cukier puder, w ilości o połowę mniejszej niż ilość użytej mąki*). Czyli, jeżeli zużyliśmy 20 dag mąki, to ... trzeba cukru pudru o połowę mniej, czyli 20 podzielone na dwa to jest 10 dag cukru pudru (*pisze*).

Zapiski, istniejące w jej rozwiązaniu okazują się bardzo istotne dla prowadzenia dalszych rozumowań. Zaprezentowany niżej Fragment X składa się z kilku sekwencji protokołu, które w takim zestawieniu są łatwiejsze w interpretacji.

Fragment X

76. U: (*czyta na głos*), Θ4. **Cztery miarki**, to mi się wydaje, że **to jest 40 dag**, Θ2.

82. U: Θ8. **Mąki 80...?**

85. E: No i teraz mi powiedz, dlaczego tak wymyśliłaś?

86. **U: Bo dodałam**, Θ2, ... do tego..., Θ3, **to znaczy się, pomnożyłam przez 4 razy 20 dag mąki.**

87. **E:** A dlaczego 4 razy 20 dag?

88. **U: Bo ... wzięto 4 miarki cukru pudru.**

89. **E:** I co dalej?

90. **U:** I pomnożyłam **te... mąki**, bo jest pytanie ile zużyto mąki, więc ...

93. **E:** ... . Czyli mąkę już mamy, a teraz...

94. **U:** Ile masła. Θ12. **Z 5 dag masła?**

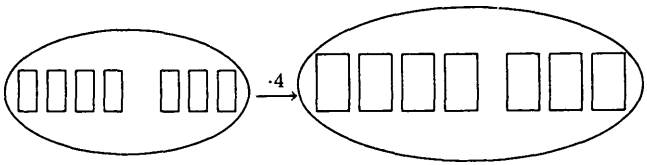
95. **E:** To napisz, zaraz oczywiście spytam się dlaczego?

96. **U:** Θ3. Dlatego, że pomnożyłam... 4 razy przez 1 to jest 4 i pomnożyłam jeszcze $\frac{1}{3}$, a jakby tak to wszystko dodać, to jest **jakby jedno całe masło.**

97. **E:** Aha.

98. **U:** To **z tych, połówek, z tych $\frac{1}{3}$.**

Matematyka jako idea, jako hipotetyczne zależności, przewidywane operacje i procedury - dla niej nie istniała. Wydaje się, że realne były dla niej jedynie te związki i fakty, które były już zapisane i w ten sposób uległy materializacji. Jedyna możliwość działania — to operowanie symbolami. Uczennica miała w swoich zapisach: 20 dag mąki, 10 dag — cukru pudru, 1 $\frac{1}{3}$ dag masła. Wyliczone składniki na ciasto potraktowała jako pewne miarki, a następnie stosowała zwielokrotnianie każdego składnika. W ten sposób nieświadomie zachowywała proporcje między tymi składnikami ((86.)–(93.). Nie było to zachowanie stosunku między określonymi wielkościami, lecz zwiększanie proporcjonalne; inaczej — Barbara nie myślała o zachowaniu stosunków wewnętrznych, lecz zachowywała zewnętrzne proporcje. Schematycznie można to przedstawić na rysunku.



Widać, że ten sposób postępowania był dla niej czytelny i logiczny ((94.)–(98.)).

W trzecim podpunkcie tego zadania, przy narzuconym zapisie ilorazowym, uczennica działała jedynie zgodnie z instrukcją. Było to automatyczne „wypełnianie okienek", bez skojarzenia tej czynności z procesem myślowym, a tym

bardziej z rozumieniem stosunku dwóch wielkości.

Fragment XI

104. **U:** *Zapisz jaką wartość mają ilorazy.* Ilość mąki, 20 dag, Θ3, ilość cukru pudru ... 10 dag (zapisuje); ilość mąki 20, ilość masła 1 $\frac{1}{3}$ (zapisuje).

105. **E:** Czyli taki jest ten **stosunek**, tak?

106. **U:** Tak.

Fizycznie istniejący zapis nic jej nie mówił. Zewnętrzna forma zapisu, gdzie w liczniku i w mianowniku należało wpisać nie liczby, ale wyrażenia mianowane, nie otworzyła ani pola pojęciowego dla stosunku dwóch wielkości, ani dla pojęcia ułamka. Barbara nie wyszła poza „wypełnienie okienek", nie przekształcała zapisu do jakiejkolwiek ostatecznej formy. Pozorna zgoda uczennicy na potraktowanie tego zapisu jako zapisu stosunku jest tak naprawdę stwierdzeniem, że skończyła pracę.

Przebieg rozwiązywania zadania II znów wskazuje, ze nie istnieje związek między symbolem $\frac{a}{b}$ a rozumieniem stosunku. Symbol ten najwyżej funkcjonuje jako kod dla słowa „stosunek". Samo rozwiązywanie sugeruje, że problem tkwi zarówno w rozumieniu pojęcia „stosunek", jak i określeniu „taki sam".

Fragment XII

140. **E:** To może sobie to napiszmy, ten stosunek. Jaki to byłby ten stosunek?

141. **U:** **Trzy do dwóch?**

142. **E:** No ... zapisz to jakoś.

143. **U:** **(pisze $\frac{3}{2}$).**

Symboliczne zapisanie sformułowania o stosunku wydaje się być jedyną aktywnością, na którą uczennica potrafiła się zdobyć.

Słowo „stosunek" w odniesieniu do boków prostokąta pozwoliło uczennicy odnieść to pojęcie do dwóch wielkości, a nie do jednej. Jest to jednak rozumienie wymuszone kontekstem, być może sugerowane przez badacza, a nie rozumienie związane z obrazem myślowym uczennicy, skojarzonym z pojęciem stosunku.

Fragment XIII

126. **E:** W czym tkwi problem? Nad czym się zastanawiasz?

127. **U:** Θ1. **Martwi mnie jak to zrobić.**

128. E: Tzn. — co nie wiesz jak zrobić?

129. U: **Ten stosunek.**

130. E: Θ2. **Właśnie, ten stosunek, znalazłaś, że jest najważniejszy.**

131. U: **Tak (wpada w słowo).**

132. E: Że to jest klucz do zadania.

133. U: Tak.

134. E: (czyta) ...*tak, aby stosunek długości jego boków...* — **o co to chodzi?**

135. U: Θ2.

136. E: Których boków?

137. U: No ... dłuższych.... **tych dwóch** boków (pokazuje).

138. E: Aha, pokazałaś 3 i 2.

139. U: Tak.

Tak więc jest możliwe, że Barbara wcale nie myślała kategoriami związku między wielkościami. Dwie wielkości „wychodzą same", bo prostokąt ma dwa boki. Problem, nad którym się zastanawiała, to zrealizowanie polecenia „taki sam" w sytuacji, gdy narysowany bok drugiego prostokąta w żaden sposób nie da się powiązać z istniejącymi bokami pierwszego prostokąta. Widać to w dalszych fragmentach protokołu. Są to fragmenty umieszczone w różnych miejscach w protokole (na co wskazuje numeracja), gdyż ten problem przewijał się przez całą pracę uczennicy.

Fragment XIV

124. E: Czyli, tu musi być jakiś większy prostokąt, tak?

125. U: **Θ50, (czyta jeszcze raz i myśli).**

145. E: **Jest możliwe, żeby był taki sam?**

146. U: **Nie.** (cichutko)

147. E: Dlaczego? (też cicho).

148. U: Bo... **bo jeden bok ma 7,5 cm.** (zdecydowanie).

149. E: Aha. No właśnie — jeden bok ma 7,5 cm. To **dlaczego drugi bok nie może być..., dlaczego ten stosunek na pewno nie będzie?**

150. U: Bo... ten, co jest już narysowany prostokąt, **jest już mniejszy.**

151. E: Ten narysowany prostokąt jest mniejszy, właśnie. A ten?

152. U: **Jest większy. Będzie większy.**

153. E: Będzie większy. Byłby większy.

154. U: Tak.

Widać, że w tym przypadku Barbara „taki sam stosunek" rozumiała jako stosunek przedstawiony za pomocą tych samych liczb ((148.)–(154.)). U niej TAKI SAM znaczył TEN SAM w rozumieniu identyczności wartości liczbowych. Albo — ignorując pojęcie stosunku — sformułowanie „taki sam" odniosła do prostokąta, myśląc o prostokącie przystającym. Rysując prostokąt przystający, ale w innym położeniu niż model, rozwiązała to zadanie.

4.5 Podsumowanie badań

Preferowany w omawianym ujęciu dydaktycznym zapis stosunku dwóch wielkości w postaci ułamka okazał się być barierą dla dobrego rozumienia pojęcia proporcji. Symbol $\frac{a}{b}$ nie został zasymilowany przez uczennice dla wyrażenia stosunku dwóch wielkości. Do takiego wniosku można dojść, analizując pracę zarówno uczennicy bardzo zdolnej, jak i nie radzącej sobie z matematyką.

W rozważanej sytuacji, kontekst (zadanie o ciasteczkach) miał służyć upoglądowieniu pojęcia stosunku dwóch wielkości, znana zaś uczniom notacja ułamkowa miała w trakcie nauki nabrać nowego znaczenia. Jednak w obserwowanej sytuacji tak się nie stało. Spróbujemy dokonać syntezy wyników pracy Anny i Barbary.

Anna — W przebiegu całej pracy widać, że uczennica bardzo świadomie łączyła różne fragmenty wiedzy matematycznej, związane z pojęciem proporcji. Znajdując się w różnych sytuacjach zadaniowych, dostrzegała proporcje, i do ich zapisania stosowała różne symbole. Generalnie, jej obraz pojęcia stosunku, wywołany kontekstem zadaniowym, sprowadzał się do rozumienia związku między dwiema wielkościami. Dwie liczby występujące w zapisie lub w określeniu stosunku to informacja o ilości jednostek, którą wymierzono najpierw jedną, a potem drugą wielkość. Symbol, który towarzyszył jej myśleniu o proporcjach, to głównie zapis ilorazowy $a : b$. Często słowne określała stosunek, nie stosując żadnego zapisu. Przy jej własnych, spontanicznych próbach zapisu związku między wielkościami ani razu nie pojawił się zapis ułamkowy. Jednak w momencie stosowania zapisu ułamkowego, widać było, że był to symbol obcy dla pojęcia stosunku i proporcji.

Barbara — Pojęcie proporcji rozumiała intuicyjnie, i w bardzo pierwotnym jej rozumieniu. Wyrażenie „w ilości o połowę mniejszej" jest potocznym odpowiednikiem sformułowania „w proporcji 2 do 1". Uczennica pokazała, że rozumie ten związek w sposób operatywny, potrafiła prawidłowo dobrać ilość mąki do ilości cukru. Czasem nieświadomie wykorzystywała pewne matema-

tyczne pojęcia i własności (jak przy zwielokrotnianiu). Pojęcie proporcjonalności funkcjonowało u niej prawidłowo przy zadaniu arytmetycznym (powiększała poszczególne składniki taką samą ilość razy), ale przy geometrycznym już boków powiększyć nie umiała. Zapis $\frac{a}{b}$, narzucony w podpunkcie trzecim był traktowany zupełnie inaczej; tutaj uczennica zapisu nie interpretowała, gdyż był dla niej obcy. W zadaniu geometrycznym zauważyła słowo stosunek, jednak nie potrafiła z niego skorzystać. Zastosowany tutaj zapis (ułamkowy) nie był w żaden sposób skojarzony z pojęciem stosunku.

Anna stosowała zapis typu $\frac{a}{b}$, jednak nie odzwierciedlał on jej rozumienia stosunku. Zapis ułamkowy stosunku dwóch wielkości, zastosowany samodzielnie w podpunkcie pierwszym zadania I „ciągnął" uczennicę w kierunku liczbowej interpretacji symbolu. W zadaniach arytmetycznych można więc było zauważyć następujący ciąg zależności symbolicznych:

stosunek zapisany słownie $\longrightarrow$ ułamek $\longrightarrow$ wartość liczbowa ułamka.

Przejście od stosunku wyrażonego (zapisanego) słownie do zapisu ułamkowego było czynnością automatyczną, wyćwiczoną na lekcji. Zaistniały już zapis ułamkowy powodował oderwanie symbolu od pojęcia stosunku, i zaczynał funkcjonować jako interpretant w obrębie pola pojęciowego ułamka. Uczennica często działała wtedy tak, jakby operowała wartością liczby wymiernej. W zadaniu geometrycznym funkcjonował krótszy ciąg zależności:

stosunek zapisany słownie $\longrightarrow$ zapis ułamkowy.

Przejście na zapis ułamkowy nie otwierało nowego pola pojęciowego. Było to jedynie przekodowanie jednego symbolu na inny.

Wydaje się że jeżeli uczeń rozumie pojęcie, to i tak zaadoptuje tylko ten symbol, który jest mu najbliższy. Anna rozumiała pojęcie, ale w spontaniczny sposób używała zapisu a : b. Barbara pojęcia nie rozumiała, działała w obszarze przekodowywania sformułowania słownego na zapis symboliczny; jednak wymowa tego symbolu była jej niedostępna.

W samym fakcie użycia symboliki ułamka do pojęcia proporcji nie ma niczego błędnego, bo przecież jednym ze sposobów zapisu proporcji jest właśnie zapis ułamkowy. Jednak w praktyce szkolnej ułamek jest kształtowany w innych aspektach niż jako stosunek dwóch wielkości. Na pierwotnym poziomie rozumienia występuje jako część całości lub jako wynik dzielenia. Jeżeli nawet pisze się, że $3 : 4 = \frac{3}{4}$, to ten związek jest rozumiany na poziomie operacji wykonywanych na liczbach 3 i 4 oraz na wyniku tej operacji; a nie na poziomie równoważności symboli. Pojęciowe zaakceptowanie tej równości jest też trudne, w literaturze można znaleźć opisy „nagłego olśnienia", spowodowanego odkryciem tego związku. Dlatego uczniowie mogą mieć problemy z patrzeniem na

ułamek jako na stosunek dwóch wielkości. Dodatkowo identyczny zapis 3 : 4 dla zapisu dzielenia oraz 3 : 4 dla zapisu proporcji wydają się w tej sytuacji bardzo od siebie odległe.

5 Zakończenie

Prezentowany artykuł dotyczy związku między znaczeniem a oznaczaniem (por. Semadeni 2002c, s. 165). Patrząc na problem bardziej dydaktycznie — dotyczy związku między indywidualnym rozumieniem pojęcia matematycznego a symboliką reprezentującą to pojęcie. Symbol $\frac{a}{b}$ wykorzystywany do reprezentowania stosunku dwóch wielkości jest symbolem dobrym z punktu widzenia matematyki. Jednak — co widać w przedstawionej analizie — uczniowie mogą wcale nie kojarzyć tego symbolu z omawianym pojęciem. Uczeń obcuje z obiektami matematycznymi poprzez rozpoznawanie ich w kontekście, poprzez sformułowanie słowne, reprezentacje wizualną, symbol. Ta ostatnia droga jest trudna, i ten problem nie dotyczy tylko omawianego przez nas symbolu. Dydaktyczne dyskusje dotyczące symboliki i jej związku z matematycznym myśleniem toczą się w ramach grup dyskusyjnych konferencji PME już od kilku lat[3]. Przykłady trudności, z jakimi boryka się uczeń (lub student) podczas interpretacji symboli znajdują się w pracy (Semadeni 2002a), gdy poprzez znak lub system znaków musi odczytać matematyczny sens. W podobnym duchu wypowiada się Konior (2002a, 2003), analizując i ukazując trudności związane z czytaniem tekstu matematycznego. Trudności te wynikają z nadawania indywidualnego znaczenia symbolom, znaczenia wynikającego z obrazu pojęcia skojarzonego z danym symbolem, niekoniecznie zgodnego z intencjami autora. Klasycznym przykładem niejednoznaczności w interpretowaniu symboliki jest odbiór symbolu/znaku równości (Semadeni 2002b, Konior 2002b). Kolejny problem — to podobieństwo symboliki. W literaturze dydaktycznej można znaleźć wiele przykładów nieporozumień wynikających z faktu stosowania podobnej symboliki dla *różnych* pojęć. Adda (1982) cytuje np. rozwiązanie podane przez studenta pierwszego roku, dotyczące liczb zespolonych:

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1,0)+(0,1)}{(1,0)-(0,1)} = \frac{1,1}{0,9} = 1,22.$$

Czyż nie jest to przykład podobnego postępowania, jaki prezentowała Barbara w zadaniu arytmetycznym?

[3]Są to głównie grupy dyskusyjne: Semiotyka w dydaktyce matematyki (Semiotics in Mathematics Education), Poznanie symboliczne w matematyce wyższej (Symbolic Cognition in Advanced Mathematics) (Proceedings of PME 25, PME 26).

Symbol nie jest utrwalonym już na zawsze, łatwym do zamknięcia w określonych granicach obrazem. Symbol podlega określonym zmianom, a jego znaczenie zależy od każdorazowego sposobu, w jaki się przejawia (Drewniak, 2001, s.191). Ten fakt wykorzystujemy w matematycznym kształceniu, nadając zarówno pojęciom, jak i symbolom nowe (w założeniu — pełniejsze) znaczenie. Jednak jeżeli dany symbol bardzo długo jest skojarzony z pewnym określonym matematycznym obiektem, rozumianym dość wąsko, trudno się dziwić, że rozszerzenie znaczenia symbolu postępuje opornie. Na pewno nie można oczekiwać, że przyjdzie ono „samo z siebie". Przykłady trudności, z jakimi boryka się uczeń lub student matematyki, kiedy dochodzi do zmiany notacji, i zmiany reprezentacji pojęcia, są badane i opisywane (Duval, 2001). Historia matematyki pokazuje też, że zmiana notacji matematycznej często towarzyszyła rewolucyjnym zmianom w rozumieniu pojęć matematycznych (Kvasz 2000, Rogers 2002). Utożsamianie pojęć, jak i utożsamianie symboli jest zabiegiem trudnym, być może nie zawsze możliwym, przynajmniej na pewnym etapie kształcenia. Skemp (1982) pisze:

> (..) Symbole [matematyczne] nie istnieją w izolacji jeden od drugiego. Mają swoją własną organizację, i przez to są czymś więcej niż tylko zbiorem oddzielnych symboli. Tworzą one system, na który składa się: zbiór symboli odpowiadający zbiorowi pojęć oraz zbiór relacji między symbolami odpowiadający zbiorowi relacji między pojęciami. (Skemp 1982, s. 281).

Symbol $\frac{a}{b}$ jest znaczącym przykładem takiego symbolu, który jest uwikłany w relacje z innymi symbolami matematycznymi, jak i w relacje między pojęciami. Wydaje się, że praca nad tworzeniem związków zarówno między symbolami: $\frac{a}{b}$, $a : b$, a do b, jak i między pojęciami: ułamek, stosunek, proporcja, proporcjonalność, (tę listę można jeszcze poszerzyć o podobieństwo, jednokładność) powinna w świadomy sposób ukierunkowywać koncepcje dydaktyczne kierowane do nauczycieli.

Literatura

A d d a, J.: 1982, Difficulties with Mathematical Symbolism: Synonymy and Homonymy, Guest Editor: R. Skemp, *Visible Language, Special Issue: Understanding the Symbolism of Mathematics*, Cleveland, Ohio. **XVI**, **3**, 205-214.

B a z y l u k, A., D a ł e k, K., D u b i e c k a, A., F r y s k a M., G ó r a l e w i c z, Z., Ł a k o m a, E., M i c z e k, Z., P i s k o r s k i, P., S i e n k i e w i c z, H., Z a w a d o w s k i, W.: 2000, *Matematyka 2001 — podręcznik dla klasy drugiej gimnazjum*, wyd. I, WSiP, Warszawa.

Brink, J. van den, Streefland, L.: 1979, Young children (6-8) — ratio and proportion, *Educational Studies in Mathematics* **10**, 403-420.

De Bock, D., Verschaffel, L. Janssens, D.: 1998 The predominance of the linear model in secondary students' solutions of word problems involving lenght and area of similar plane figures, *Educational Studies in Mathematics* **35**, 68-84.

Cackowski, Z., Kmita, J., Szaniawski, K., Smoczyński, P J.: 1987, *Filozofia a nauka. Zarys encyklopedyczny.* Wrocław, 481-482.

Confrey, J., Smith, E.: 1995, Splitting, convariation and their role in the development of exponential functions, *Journal for Research in Mathematics Education* **26, 1**, 66-86.

Czech, J.: 1817, *Euklidesa początków jeometrii xsiąg ośmioro, to jest sześć pierwszych, jedynasta i dwunasta*, Wilno.

Dobrowolska, M. (red.): 1999, *Matematyka 1. Podręcznik dla gimnazjalistów*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, Gdańsk.

Drewniak, H.: 2001, *Znaki liturgiczne i symbole jako narzędzie i treść katechizacji.* Wydawnictwo Naukowe PAT, Kraków.

Duval, R.: 2001, Pourquoi les Representations Semiotoques Doivent-elles etre Placees ay Centre des Apprentissages ed Mathematiques? A. Gagatsis (ed.) *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*, Nicosia, Cyprus, Intercollege Press vol. 1, 67-90.

Hart, K.: 1981, *Ratio and proportion. Children's Understanding of Mathematics: 11-16*, John Murray Ltd., London.

van den Heuvel-Panhuizen, M.: 1991, Ratio in special education, w *Realistic mathematics education in primary school*, Freudenthal Institute, Utrecht.

Keret, Y.: 1999, Change Processes in Adult Proportional Reasoning: Student Teachers and Primary Mathematics Teachers, after exposure to Ratio and Proportion Study Unit, *Proceedings of PME 23 Conference*, Haifa, 3. 145-152.

Konior, J.: 2002a, Specyfika tekstów matematycznych w procesie ich lektury, w: *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki pod red. J. Żabowskiego, t. IV.* Płock, 251-270.

Konior, J.: 2002b, Posługiwanie się przez uczniów znakiem równości w wyrażeniach matematycznych, w: *Materiały do studiowania dydaktyki matematyki pod red . J. Żabowskiego, t. IV.* Płock, 327-338.

Konior, J.: 2003, *Z badań nad konstrukcją tekstów matematycznych; o naturze analizy tekstu*, Referat wygłoszony podczas XVII Szkoły Dydaktyki Matematyki, Poznań.

K o w a l, S.: 1957, *Koło matematyczne. Zbiór materiałów* PZWS, Warszawa.

K v a s z, L.: 2002, Changes of Language in the Development of Mathematics, *Philosophia Mathematica*, **8(1)**, 47-83.

L u r k e r, M.: 1994, *Przesłanie symboli w mitach, kulturach i religiach*, Wydawnictwo Znak, Kraków.

M l a ś, M.: 2003, *Stosowanie przez uczniów klasy II gimnazjum symboliki związanej z proporcjami, w świetle pewnych badań*, Praca licencjacka, Rzeszów.

P e i r c e, C. S.: 1977, *Semiotic and Significs: the Correspondence Between Charles Sanders Peirce and Victoria Lady Welby*, Charles S. Harwich, Indiana University Press, Bloomington, 80-81.

P e l c, J.: 1984, Znak, w: *Wstęp do semiotyki*, Wiedza Powszechna, Warszawa, 34-229.

P i a g e t, J., I n h e l d e r, B.: 1967, Operacje umysłowe i ich rozwój, w: P. Oleron, J. Piaget, B. Inhelder, P. Greco: *Inteligencja*, Warszawa.

R o g e r s, L.: 2001, From Icon to Symbols: Reflections on the Historical Development of the Language of Algebra, *Proceedings of CERME 2, part 2*, Marianske Lazne, 577-589.

S e m a d e n i, Z.: 2002a, Trojaka natura matematyki: idee głębokie, formy powierzchniowe, modele formalne, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **24**, 41-92.

S e m a d e n i, Z.: 2002b, Utożsamianie pojęć, redukcjonizm i równość w matematyce, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **24**, 93-117.

S e m a d e n i, Z.: 2002c, Rola znaczenia w rozumowaniach matematycznych, *Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria V, Dydaktyka Matematyki* **24**, 145-174.

S k e m p, R.: 1982, Communicating Mathematics: Surfrace Structures and Deep Structures, w: Guest Editor: R. Skemp, *Visible Language, Special Issue: Understanding the Symbolism of Mathematics*, Cleveland, Ohio. **XVI.3**, 281-288.

S k e m p, R.: 1991, *Mathematics in The Primary School*, Routhedge Company, London.

S t e i n b r i n g, H.: 1997, Epistemological Investigation of Classroom Interaction in Elementary Mathematics Teaching, *Educational Studies in Mathematics* **32(1)**, 49-92.

v a n d e r V a l k, T., B r o e k m a n, H.: 2001, Science teachers' learning about ratio tables, *Proceedings of the 25th PME Conference*, Utrecht, The Netherlands, July, 12-17.

T u r n a u, S.: 1988, Ułamki, w: *Nauczanie początkowe matematyki, podręcznik dla nauczyciela, tom 4*, praca zbiorowa pod red. Z. Semadeniego, wyd. I, WSiP, Warszawa.
W a l i s z e w s k i, W. (praca zbiorowa pod przewodnictwem): 1990, *Encyklopedia Szkolna, Matematyka*, WSiP Warszawa.

Aneks 1 — przebieg spotkania z Anną

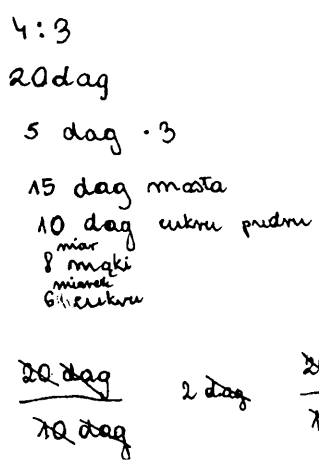
Przebieg spotkania	Komentarz
1. E: Pracujemy z Anną.	
2. U: Tak (szybko).	
3. E: Teraz Anna będzie rozwiązywała zadania. Proszę bardzo.	
4. U: (czyta na głos, Θ6, — „przepis").	Uczennica rozumie sytuację, w której się znajduje, szybko i pewnie czyta treść zadania.
99. E: To jest przepis...	
100. U: Tak.	
101. E: A tutaj są pytania raz, dwa, trzy.	
102. U: Tak (i czyta). *Do ciasta użyto 20 dag mąki. Ile wzięto masła? Ile zużyto cukru pudru?* (bez przerw między pytajnikami).	
Tak, jeżeli wzięto 20 dag mąki, Θ2, czyli...	Po przeczytaniu pytań do pierwszej części zadania od razu przystępuje do ich rozwiązywania – analizuje związki między danymi.
103. E: Tu jest kartka, długopis, gdybyś chciała coś pisać, to bardzo proszę.	
104. U: Czyli ta mąka **w stosunku** do masła jest **cztery do trzech**,	Widać, że uczennica czytała zadanie ze zrozumieniem. Używa słownego opisu stosunku.
tak, **i te cztery – to jest te 20 dag.**	**Widzi związki pomiędzy poszczególnymi wartościami, związanymi z pojęciem proporcji.** Stara się użyć proporcję do związków między wyrażeniami mianowanymi.
105. E: Zapisz.	
106. U: (pisze 4 : 3).	Pojawia się **zapis ilorazowy** stosunku mąki do masła **4 : 3.**
I to teraz trzeba **na 4.**	**Świadomie i prawidłowo korzysta z pojęcia proporcji:**
107. E: Proszę Cię bardzo...	

Przebieg spotkania	Komentarz
108. U: ... i to będzie 5 dag, Θ2, i razy trzy ponieważ jest, Θ1, stosunek cztery do trzech, czyli 15 dag masła trzeba.	**tworzy moduł (5 dag) odpowiadający jednostce występującej w proporcji, wtedy** 4 : 3 to 4 (5 dag) : 3 (5 dag).
109. E: Dobrze. Wszystko rozumiem, więc się nie pytam.	
110. U: Θ2. *Ile zużyto cukru pudru?* (ciszej dla siebie czyta szybko: *następnie cukier puder, w ilości o połowę mniejszej niż ilość użytej mąki*).	Po przeczytaniu kolejnego pytania, od razu szuka potrzebnych jej informacji w treści zadania i prawidłowo te informacje umie wykorzystać.
Czyli, jeżeli zużyliśmy 20 dag mąki, to... trzeba cukru pudru o połowę mniej, czyli 20 podzielone na dwa to jest 10 dag cukru pudru (pisze).	Po kolei wyjaśnia wszystko co robi. 20 dzieli na 2, bo cukru jest o połowę mniej niż mąki. **W specyficzny sposób wykorzystuje pojęcie proporcji**. Zapisuje obliczoną wartość.
111. E: Aha, też chyba wiem, to nie będę pytała.	Akceptowanie wyjaśnień uczennicy, tworzenie przyjaznej atmosfery.
112. U: (śmieje się). *Jeżeli wzięto 4 miarki... masła?* (czyta), Θ4, czyli jeżeli wzięto 4 miarki cukru pudru i jest to połowa mąki, czyli wzięto 8 miarek, Θ2, mąki. (pisze).	Jest rozluźniona, czuje się pewnie, od razu czyta kolejne polecenia. Poprawne **stosowanie informacji o cukrze i mące w odniesieniu do proporcji** (ignorując wartości liczbowe wyliczone w pierwszym podpunkcie); **jedna wartość stanowi połowę drugiej**. Operatywne myślenie. Pojawia się zapis: 8 mąki. Podanie właściwej odpowiedzi.
18a. E: A ile wzięto masła? Czyli, że jeżeli znowu jest stosunek czterech do trzech, to, Θ1,	**Po raz kolejny prawidłowe korzystanie z pojęcia proporcji**. Łatwo zauważyć, że uczennica to pojęcie rozumie.
cukru pudru wzięto 6, bo znowu **to dzielimy, żeby było**, to jeżeli tu jest 4 to **to mnożymy przez 2** i wyjdzie tu 8, a tu będzie 6.	Wyjaśnienie swojej metody rozumowania. Przejęzyczenie: zamiast „masła" mówi „cukru pudru" (bo zaczęła dobrze mówić – wie, że ma obliczać miarki masła, więc myśli dobrze, tylko źle to powiedziała).

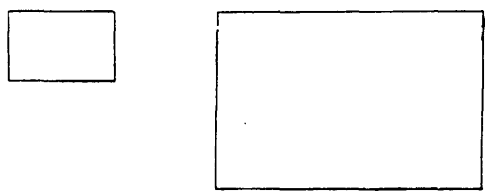
Przebieg spotkania	Komentarz
113. E: Proszę bardzo.	Eksperymentator nie zauważa pomyłki słownej, może dlatego, że ona nie jest tu tak bardzo istotna.
114. U: (pisze: 6 cukru).	(powinno być: „masła").
115. E: **Czyli tu gdzie było 4, to...**	Badacz upewnia się, czy uczennica potrafi wyrazić stosunek innymi liczbami, okazuje się, że tak.
116. U: **Będzie 8, a tu będzie 6.**	
117. E: **A tu gdzie jest 3, tu mi pokazujesz 3, będzie 6.**	
118. U: **Tak.**	
119. E: Czyli 6. Sześć czego?	Pytanie badacza o jednostkę/miano otrzymanych wyników, nawiązanie do treści zadania.
120. U: Dekagramów.	Odpowiedź ta mogła być podana dlatego, że do tej pory mianem wartości były dekagramy.
121. E: Dekagramów?	Zapytanie badacza sieje niepewność wypowiedzi i jak widać pomaga w prawidłowym sformułowaniu odpowiedzi.
122. U: Chyba tak (niepewnie). Miarek (zdecydowanie).	
123. E: Przepraszam, tak chciałam dokładnie.	
124. U: Na górze też będzie 8 miarek (dopisuje słowo „miarek").	Po „interwencji" badacza uczennica koryguje zapis. Kontynuuje pracę.
(czyta) *Zapisz, jaką wartość mają ilorazy: ilość mąki*, Θ2, mąki to było 20 dag ... do ilości cukru pudru, ..., a cukru pudru było 10 (pisze). I to będzie, ... to można skrócić... no tak...	**Zapisanie wartości ilorazów sprowadza się do podstawienia obliczonych wielkości, przy czym tu następuje przejście na zapis ułamkowy i operacje na ułamkach (skracanie).** **Uczennica traktuje te zapisy jak ułamki.**
125. E: A jak skrócimy to ile będzie, jak będzie?	
126. U: **To będzie 2**, 2 dag.	**Brak refleksji, że wcześniejsza informacja o związku między mąką a cukrem była wyrażona słownym sformułowaniem: *połowa*.** Następuje samo skracanie liczb, jednostki nie są brane pod uwagę.
127. E: 2 dag, tak?	Badacz próbuje naprowadzić uczennicę na sprawdzenie tej odpowiedzi.

Przebieg spotkania	Komentarz
128. U: Tak. A ilość mąki to tutaj będzie znowu 20 dag, dekagramów (wraca do wcześniejszego) – to tutaj też się skrócą te dekagramy, czyli nie będzie?	Dzieje się to dopiero przy zapisie drugiego ilorazu; zauważa, że jednostki również da się skrócić.
129. E: Skrócą się dekagramy.	Badacz potwierdza to stwierdzenie uczennicy.
130. U: **Samo 2 będzie**. A ilość masła to było 15 dag, i tu się też skrócą, i się skróci przez 5 i to będzie **cztery trzecie**.	**Brak związku między tak otrzymaną wartością ułamka, a stosunkiem 4 do 3 podanym w treści zadania.**
131. E: Pierwsze zadanie mamy?	
132. U: Tak (pewnie). (zaczyna czytać) *Dokończ prostokąt... boków narysowanego prostokąta.* **Θ11**. Znaczy, Θ1, ten prostokąt będzie większy od tego, Θ1, mniejszego prostokąta, **i to będzie on, Θ4, cztery razy większy od tego**, tu dokończyć na tej kartce?	Od razu zabiera się za drugie zadanie. **Prawdopodobnie następuje wizualna ocena danych z zadania. Uczennica nic nie mierzy. Posługuje się intuicją figur podobnych. Zauważa, że niedokończony prostokąt będzie większy od narysowanego, ale najpierw chyba patrzy na stosunki pól tych figur i podaje szacunkowy związek między tymi polami.**
133. E: Dokończ.	
134. U: (mierzy) Tu jest 3 cm, tu jest 7,5; czyli jest trzy razy więk... **(mierzy jeszcze raz), nie**; siedem i pół... tu **będzie... dwa i pół razy większy jest.**	Dopiero teraz mierzy boki prostokątów, porównuje odpowiednie boki (3 cm i 7,5 cm). **Weryfikacja wcześniejszej hipotezy, że niedokończony prostokąt będzie 4 razy większy. Kolejne mierzenie to raczej posłużenie się linijką dla wielokrotnego odłożenia odcinka z modelu.**
135. E: Dwa i pół razy, czyli na 6 tutaj sobie **odłożyłaś**, czyli tutaj...	Opisywanie działania uczennicy.
136. U: **Trzy, sześć, ... i pół**, i ... jeden i pół; czyli tutaj też musi być **o tyle samo więcej**;	połowa z 3 cm = 1,5 cm. Teraz pokazuje, poprzez wielokrotne odkładanie odcinka o długości 3 cm ile razy bok drugiej figury jest większy od boku figury

Przebieg spotkania	Komentarz
	pierwszej, czyli wyznacza stosunek długości jednego boku do drugiego (skalę powiększenia). (Powinno być powiedziane: **„tyle samo razy więcej"**).
jak tu jest 2 cm, razy dwa i pół, to będzie 5 cm. Czyli tutaj musi być na pięć. Ten bok jest ten sam, równoległy, czyli też będzie na pięć, i tutaj będzie tyle samo, ten dłuższy bok będzie miał tyle samo co ten równoległy.	**Stosowanie zależności jaką zauważyła (skali powiększenia) do następnego boku.** Wyjaśnienie uczennicy, że w prostokącie odpowiednie boki są sobie równe, dlatego nie trzeba ich wszystkich wyliczać tylko wystarczy odkładać odpowiednie odcinki równoległe.
137. E: Czyli co – koniec.	
138. U: Uhm, czyli tutaj jest taka **proporcja**, że **jeden odpowiada dwa i pół** (pisze: **1 : 2,5**).	Na zakończenie uczennica **sama formułuje wniosek i zapisuje go w postaci ilorazowej.**
139. E: Pięknie, tak mi jeszcze nikt nie napisał. Jak to rozumiesz?	Badacz pyta o wyjaśnienie tego sformułowania.
140. U: Czyli, jeżeli tutaj jest np. 1 cm, to tutaj będzie odpowiadał dwu i pół centymetrom. To zależy jaka jest **jednostka**.	Uczennica wyjaśnia co oznacza ta proporcja: jedna „miarka" odpowiada dwu i pół takim samym „miarkom".
141. E: Czyli, jeżeli nie byłoby np. centymetra, gdyby było w calach?	Badacz sprawdza czy uczennica będzie umiała wyrazić tę proporcję innymi jednostkami – ona rozumie pojęcie i wie, że rodzaj miana nie ma wpływu na tę zależność.
142. U: Czyli jeden cal, a tutaj dwa i pół cala.	
143. E: Tyle?	
144. U: Chyba tak.	
145. E: Dziękuję Ci serdecznie.	



Rysunek 2. Pisemna praca Anny — pierwsze zadanie



1 : 2,5

Rysunek 3. Pisemna praca Anny — drugie zadanie

Aneks 2 — przebieg spotkania z Barbarą

Przebieg spotkania	Komentarz
1. E: Tu są dwa zadania, to jest całe pierwsze, a tu jest drugie zadanie. Przeczytaj, kolejność dowolna, tutaj jest kalkulator, kartka, wszystko dla Ciebie.	
2. U: (cicho czyta).	Zapoznanie z treścią zadania
3. E: Czytasz pierwsze – tak?	
4. U: Tak.	
5. E: Aha, po kolei.	
6. U: Θ14.	**Uczennica nie widzi związku**
7. E: Rozumiesz?	**między treścią zadania a po-**

Przebieg spotkania	Komentarz
8. U: No, nie za bardzo.	**jęciem proporcji** Nie rozumie problemu, nie ma pomysłu na rozwiązanie
9. E: To lecimy razem, dobrze? Czytaj na głos.	
10. U: (natychmiast) *Przesianą mąkę ... użytej mąki.*	Sygnał oczekiwania na pomoc, gotowość współpracy.
11. E: Czyli wiesz - to jest taki przepis. A tutaj są pytania do tego przepisu. To są pytania matematyczne do życiowego przepisu.	Próba przybliżenia problemu, nawiązanie do intuicyjnego rozumienia proporcji.
12. U: Czyta pierwsze pytanie.	
13. E: Dobrze. Piekłaś kiedyś z mamą?	
14. U: Tak.	
15. E: Wiesz, mama wyciąga mąkę ... różne tam rzeczy. W tym przepisie jest o czym mowa?	
16. U: Żeby zmieszać przesianą mąkę i ... (szuka w przepisie).	
17. E: (patrzymy razem) mąkę, masło i cukier. Jakoś tam zmieszać. Wiadomo, że w przepisie jest: tyle tego, tyle tego, tyle tego. I tutaj też jest taki przepis.	Analiza związków pomiędzy zmiennymi występującymi w zdaniu.
18. U: Θ6.	
19. E: No właśnie, to lećmy. *Do ciasta użyto...*	Podpowiedź: zacznij analizować dane.
20. U: 20 dag mąki ... (cisza, zaczyna pisać).	Zaczyna wypisywać dane.
21. E: Aha, zaczynasz pisać: *dane: 20 dag mąki.*	
22. U: (czyta cicho) *Ile...*	
23. E: Ile wzięto masła.	
24. U: Θ5.	Brak pomysłu jak dalej postępować
25. E: Jest gdzieś w przepisie jakaś informacja, która by Ci mogła pomóc?	Badacz próbuje naprowadzić uczennicę
26. U: W stosunku **4 do 3... z masłem.**	Znalezienie informacji, która może być pomocna, bez świadomości, jak z niej skorzystać.
27. E: Z masłem, o właśnie... mąka ma być w stosunku **4 do 3** z masłem.	
28. U: Θ7.	W dalszym ciągu nie wie, co ma robić.
29. E: Jest to jakaś informacja?	
30. U: Tak.	

Przebieg spotkania			Komentarz
31.	E:	Jak rozumiesz tę informację?	
32.	U:	Może... $\frac{4}{3}$ **(cztery trzecie).**	**Użycie słownej symboliki, skojarzonej ze sformułowaniem *4 do 3*, wypowiedź słowna oddająca sens ułamka (liczby).**
33.	E:	Cztery trzecie... co to znaczy cztery trzecie?	Pytanie sprawdzające, czy ułamek jest rozumiany jako stosunek.
34.	U:	Θ2, że to jest, Θ1, wię....cej..., Θ2,	**Próba wyrażenia związku między ilością mąki i masła (mąki jest więcej niż masła) – rezygnacja z tej drogi myślenia.**
		że to jest jedna całość (szybko) i $\frac{1}{3}$ (wolniej).	**Przejście na „pewną" interpretację związaną z wartością ułamka.**
35.	E:	$\frac{4}{3}$ to jest 1 i $\frac{1}{3}$, ale powiedziałaś jeszcze takie słowo „więcej".	Próba nawiązania do intuicji proporcji.
36.	U:	Θ4.	Brak odzewu.
37.	E:	Do czego to słowo „więcej" się odnosi?	
38.	U:	Θ3, że jest więcej niż jedna całość.	**Próba znalezienia sensownej odpowiedzi; znalezienie tego wyjścia w interpretacji zapisu $\frac{4}{3}$ jako liczby.**
39.	E:	Czego jest więcej niż jedna całość?	
40.	U:	**Masła.**	
41.	E:	Masła tu będzie więcej w tym przepisie, niż mąki.	Forma pytania: *Czy rzeczywiście chodzi o masło?* Nieuświadomione przez badacza sugerowanie złej drogi myślowej.
42.	U:	Tak.	
43.	E:	Tak?	
44.	U:	...	Zagubienie.
45.	E:	Czyli, jeżeli masła ma być więcej niż mąki, a mąki mamy 20 dag...	Próba kontynuowania pracy zgodnie z dotychczasowymi ustaleniami, nawiązanie do rozumienia stosunku dwóch wielkości.
46.	U:	Θ8.	Uczennica w tej chwili jest całkowicie zagubiona.
47.	E:	Jest szansa wymyślić, ile tego masła w końcu trzeba zmieszać z mąką?	

	Przebieg spotkania	Komentarz
48.	U: Θ8. **Cztery dekagramy masła?** ... Nie wiem właśnie.	Rozpaczliwe poszukiwanie **liczby, na dodatek liczby mianowanej**.
49.	E: No to nic, zapisz **coś**.	
50.	U: pisze: $\frac{4}{3}$ masła.	**Zapis ten świadczy o tym, że uczennica w ogóle nie wie jak patrzeć na ten stosunek.**
51.	E: No i teraz tak popatrzmy, tak na zdrowy chłopski rozum... Sama siebie się pytam, mam te 20 dag mąki, to ile w końcu tego masła?	Nawiązanie do sensu stosunku 4 do 3.
52.	U: Θ7, jeden, jedno masło, i ... 50 gramów.	Powrót do interpretacji zapisu $\frac{4}{3}$ jako wartości liczbowej ($\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$). Odniesienie tej wartości do wagi masła (i widać, że u niej 1 to jedno masło, natomiast $\frac{1}{3}$ to jakaś część z całości, np. 50 gramów masła).
53.	E: ... czyli... a jedno masło, to jest co – jedna kostka?	Próba urealnienia związku między 20 dag mąki i ilością masła (działanie intuicyjne).
54.	U: Θ19. Jak pani mówiła?	Zagubienie
55.	E: Jedna kostka, jedna kostka i 50 gramów?	
56.	U: Mnie się widzi, że tak.	Zewnętrzna zgoda – autorytet badacza.
57.	E: Tak Ci się widzi, ... to zapisz to.	
58.	U: **1 i $\frac{1}{3}$ dag masła.**	**Działanie zgodnie z własnymi ustaleniami ($\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$, zaś miano jest takie samo jak dla ilości mąki).**
59.	E: No popatrz. **20 dag mąki i 1 $\frac{1}{3}$ dag masła**. Tak by z tego wynikało. Tak?	Badacz próbuje zwrócić uwagę na to, że jest „wielka różnica wagowa" między tymi składnikami (co mogłoby być u uczennicy skojarzone z realną/życiową sytuacją pieczenia ciasta i mieszania podstawowych składników).
60.	U: Tak.	Uczennica jednak tego nie zauważa (nie kojarzy tego z życiem codziennym, dla niej to nie jest nic dziwnego – tak jej „wyszło" w zadaniu).

Przebieg spotkania	Komentarz
61. E: Tak mieszamy.	Badacz dalej próbuje „zasiać ziarnko niepewności".
62. U: Tak.	Jednak uczennica nie wycofuje się z tej odpowiedzi – pewnie dlatego, że miała wielkie problemy z jej ustaleniem.
63. E: Dobrze, to mamy 1 $\frac{1}{3}$ dag masła. Mamy odpowiedź już na to?	
64. U: Tak. *Ile zużyto cukru pudru?* Θ8. **To jest 20 dag mąki** i ..., Θ3, **10 dag cukru.**	Uczennica czyta kolejne pytania. Od razu stara się na nie znaleźć odpowiedź i szybko tej odpowiedzi udziela. **Odpowiedź jest prawidłowa.**
65. E: To zapisz to i zaraz porozmawiamy – dlaczego.	Badacz chce wyjaśnienia sposobu myślenia, który doprowadził do tego wyniku.
66. U: (zapisuje, Θ12).	Pojawia się zapis: 20 dag mąki; 10 dag cukru pudru. **Jest to zapis bez użycia żadnej symboliki związanej z proporcjami.**
67. E: Dlaczego myślisz, że 10 dag?	*Badacz prosi o wyjaśnienie jak uczennica obliczyła tę wartość.*
68. U: Bo, Θ3, **później jest w przepisie, że cukier puder jest w ilości o połowę mniejszej niż zużyta mąka.**	Prawidłowe korzystanie z informacji zawartych w treści zadania, odnosi się to do pojęcia: część pewnej wielkości (tutaj: ilość cukru pudru to połowa ilości mąki).
69. E: Tak...	
70. U: **Czyli połowę ... połowa z 20 to jest 10.**	Dalsze wyjaśnienia jak to policzyła.
71. E: Aha, rozumiem. Rozumiem, tak sobie myślałaś, czyli 10 dag cukru pudru.	Akceptowanie objaśnień uczennicy.
72. U: Tak.	
73. E: Czyli co – pierwszy podpunkt...	
74. U: Skończony.	**Wypowiada to bardzo pewnie. Nie potrzebuje żadnego potwierdzenia ze strony badacza.**
75. E: Skończony, to fajnie. Teraz drugi.	Przechodzenie do dalszej części zadania.
76. U: (czyta na głos), Θ4. **Cztery miarki,** to mi się wydaje, że **to jest 40 dag,** Θ2.	**Pojawia się 40 dag. Uczennica prawdopodobnie traktuje obliczoną wcześniej wagę**

Przebieg spotkania	Komentarz
	cukru jako jedną miarkę (dlatego 10 dag · 4 = 40 dag).
77. E: To zapisz to.	Zapisuje: 40 dag cukru pudru.
78. U: Θ8.	
79. E: Czytasz teraz dalej, tak?	
80. U: *...to ile zużyto mąki, a ile masła?*	
81. E: Tak.	
82. U: Θ8. **Mąki 80...**?	Uczennica podaje gotowe stwierdzenie – odpowiedź na pytanie, ale trudno stwierdzić, jak do niej doszła.
83. E: To zapisz. Co się tak mnie pytasz, nie wiem, zaraz będziemy o tym rozmawiać.	
84. U: (zapisuje).	Zapis: 80 dag mąki.
85. E: No i teraz mi powiedz, dlaczego tak wymyśliłaś?	Badacz pyta uczennicę, dlaczego tak sądzi.
86. U: **Bo dodałam**, Θ2, ... do tego ..., Θ3, to **znaczy się, pomnożyłam przez 4 razy 20 dag mąki.**	**Formułuje wyjaśnienie, ale trochę się w nim gubi. Szukanie słów może wskazywać na to, że uczennica działała intuicyjnie, dopiero teraz porządkuje myśli. Dochodzi jednak do tego co zrobiła, mianowicie pomnożyła ilość zużytej mąki przez cztery.**
87. E: A dlaczego 4 razy 20 dag?	Pytanie o sens takiego mnożenia
88. U: **Bo... wzięto 4 miarki cukru pudru.**	**„Skoro wzięto 4 miarki cukru to też zwiększono ilość mąki" – jako bardzo dla niej logiczne.**
89. E: I co dalej?	
90. U: I pomnożyłam **te... mąki**, bo jest pytanie ile zużyto mąki, więc...	**Można przypuszczać, że uczennica zwielokrotnia liczby, występujące w pierwszym punkcie tego zadania (tam mąka = 20 dag).**
91. E: To jeszcze raz, jak Ci to 80 wyszło?	Kolejna prośba badacza o wyjaśnienie tych obliczeń.
92. U: Pomnożyłam 20 dag przez 4.	I odpowiedź uczennicy jasna i prosta.
93. E: To zapisz, żebym ja wiedziała, że to było 4 razy. Tak to było z mąką. Czyli mąkę już mamy, a teraz...	Do zapisu 80 dag mąki dopisuje w nawiasie (20 · 4).

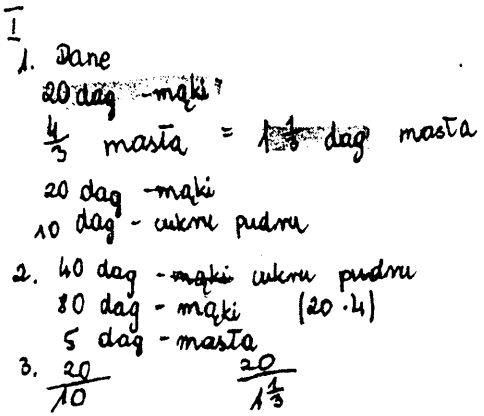
Przebieg spotkania	Komentarz
94. U: Ile masła. Θ12. **Z 5 dag masła?**	**Szacunkowe określenie ilości masła (trudno jest jej dokładnie wyznaczyć, gdyż masła było – według jej obliczeń – 1 $\frac{1}{3}$ dag).**
95. E: To napisz, zaraz oczywiście spytam się dlaczego?	
96. U: Θ3. Dlatego, że pomnożyłam... 4 razy przez 1 to jest 4 i pomnożyłam jeszcze $\frac{1}{3}$, a jakby tak to wszystko dodać, to jest **jakby jedno całe masło.**	Ta sama ustalona przez nią procedura: mnoży wagę przez 4. Otrzymuje: $4 \cdot 1 = 4$ oraz $4 \cdot \frac{1}{3} =$... Dodaje otrzymane wartości i wychodzi jej **„całe masło”**.
97. E: Aha.	Badacz jest „zdezorientowany”.
98. U: To z tych, połówek, z tych $\frac{1}{3}$.	Więc uczennica sama wyjaśnia jak to obliczyła (przez mnożenie: skoro $4 \cdot 1 = 4$, to $4 \cdot \frac{1}{3} = 1$, aby po zsumowaniu wyników otrzymać 5).
99. E: Czyli to 5 dag, to Ci wyszło...	
100. U: Masło.	
101. E: 5 dag masła, czyli tak to sobie robiłaś. Czyli mamy już?	
102. U: Tak.	
103. E: Dobrze. Drugi podpunkt mamy. A trzeci?	
104. U: *Zapisz jaką wartość mają ilorazy.* Ilość mąki, 20 dag, Θ3, ilość cukru pudru... 10 dag (zapisuje); ilość mąki 20, ilość masła 1 $\frac{1}{3}$ (zapisuje).	**W tej części zadania uczennica tylko podstawia otrzymane wartości z pierwszego podpunktu. Zapisuje ułamkowo i nic z tym już nie robi. Nie ma też żadnego komentarza – miała zapisać stosunek tych wielkości, więc to zrobiła (w miejsce wyrażeń słownych wstawia wartości liczbowe).**
105. E: Czyli taki jest ten stosunek, tak?	Badacz próbuje nawiązać ten zapis do pojęcia stosunku.
106. U: Tak.	Uczennica przytakuje, że otrzymała takie **stosunki, ale zapewne nie wie w ogóle, co to oznacza (nie myśli w kontekście stosunków liczbowych).**
107. E: Dobrze. I co, pierwsze zadanie mamy?	

Przebieg spotkania	Komentarz
108. U: Mamy.	Chyba jest szczęśliwa, że zakończyła to zadanie.
109. E: No to co, zabieramy się za drugie. (badacz daje następną kartkę). Teraz czytamy to drugie zadanie.	
110. U: (czyta), Θ20, (jeszcze raz czyta i bierze linijkę).	Powtórne czytanie treści zadania wskazuje na to, że uczennica nie wie, co ma robić. **Zaczyna mierzyć boki dokończonego prostokąta, najpierw tylko jeden bok. Nie jest to jeszcze realizowanie planu rozwiązywania zadania, jest to działanie „rób coś...".**
111. E: I co?	Badacz pyta o efekt mierzenia
112. U: I tu jest 3 cm, (mierzy drugi).	Badacz pyta o efekt mierzenia. Podaje długość zmierzonego boku i mierzy drugi.
113. E: Tu jest ile?	drugi.
114. U: 2 cm,	Wymierzyła do końca mały prostokąt
Θ14, (przykłada linijkę do narysowanego boku drugiego prostokąta).	Brak pomysłu co dalej. mierzy teraz bok prostokąta niedokończonego
115. E: Ile Ci wyszło?	
116. U: 7 i pół (zapisuje długości przy odpowiednich odcinkach na rysunku), Θ7.	Po zapisaniu odmierzonych odcinków widać zagubienie uczennicy, jej bezradność.
117. E: O czym myślisz?	Badacz stara się dowiedzieć nad czym uczennica się zastanawia, sprawdza, czy rozumie zadanie.
118. U: Θ2, że ... **ten prostokąt jest większy.**	Uczennica **dokonuje wizualnej oceny figur** i stwierdza, że drugi prostokąt jest większy.
119. E: Tak..., ten prostokąt jest większy, dlaczego?	Prośba o wyjaśnienie tego stwierdzenia.
120. U: Bo jakbym dodała 3 i 2 to jest 5 cm, a ten drugi jest 7,5 cm.	Uczennica przedstawia swój tok myślenia, a mianowicie, że: 3 cm + 2 cm = 5 cm, a bok w drugim prostokącie **już sam** ma 7,5 cm. Wyjaśnia swoje wnioskowanie badaczowi (dorosły lubi liczby).
121. E: **Już jeden bok ma 7,5 cm**	Badacz stara się dowiedzieć, co uczennica ma na myśli.

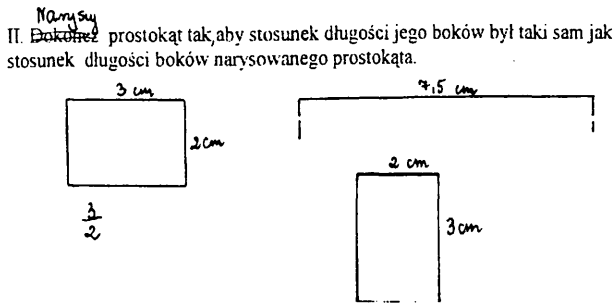
Przebieg spotkania	Komentarz
122. U: Θ7.	Zagubienie.
123. E: Czyli, tu musi być jakiś większy prostokąt, tak?	
124. U: **Θ50, (czyta jeszcze raz i myśli).**	Bardzo długa przerwa i powrót jeszcze raz do treści zadania wskazują na to, że ona zupełnie nie wie co ma robić.
125. E: W czym tkwi problem? Nad czym się zastanawiasz?	Badacz próbuje zareagować na zaistniałą sytuację poprzez prośbę o wyjaśnienie co jest dla niej niejasne.
126. U: Θ1. **Martwi mnie jak to zrobić.**	Uczennica czuje się bezradna.
127. E: Tzn. – co nie wiesz jak zrobić?	
128. U: **Ten stosunek.**	Zauważa słowo **stosunek**, ale zupełnie nie wie, jak z tego skorzystać.
129. E: Θ2. **Właśnie, ten stosunek, znalazłaś, że jest najważniejszy.**	Potwierdzenie dobrego spostrzeżenia.
130. U: **Tak (wpada w słowo).**	
131. E: Że to jest klucz do zadania.	Badacz nawiązuje do treści zadania; potwierdza uczennicy fakt, że tu najważniejszy jest właśnie ten stosunek.
132. U: Tak.	Wyraźnie zauważa to słowo, jednak powiązać go z zadaniem nie jest w stanie – **nie jest to słowo – klucz do działania.**
133. E: (czyta) *...tak, aby stosunek długości jego boków...* – **o co to chodzi?**	W dalszym ciągu nawiązywanie do pojęcia stosunku.
134. U: Θ2.	**Milczenie jako oznaka niemożności udzielenia odpowiedzi z powodu niewiedzy.**
135. E: Których boków?	Zadawanie pytań pomocniczych.
136. U: No... dłuższych... **tych dwóch** boków.	Mówi „dłuższych", ale ma na myśli boki narysowanego prostokąta (tak pokazuje).
137. E: Aha, pokazałaś 3 i 2.	
138. U: Tak.	**Kolejność pokazywania, najpierw bok o długości 3, potem o długości 2, może wskazywać na rozumienie stosunku jako związku między bokiem dłuższym i krótszym.**
139. E: To może sobie to napiszmy, ten stosunek. Jaki to byłby ten stosunek?	Sugestia podjęcia rutynowych działań związanych z rozwiązy-

Przebieg spotkania	Komentarz
	waniem zadania tekstowego.
140. U: **Trzy do dwóch?**	Niepewna.
141. E: No ... zapisz to jakoś.	
142. U: (pisze $\frac{3}{2}$).	Zapisuje stosunek długości boków pierwszego prostokąta w postaci ułamkowej.
143. E: Zapisałaś $\frac{3}{2}$-gich, trzy do dwóch, przepraszam. No i, ten stosunek ma być taki sam, ... w tym drugim.	**Próba zachowania sensu zapisu jako stosunku dwóch wielkości.**
144. U: Θ13.	
145. E: **Jest możliwe, żeby był taki sam?**	Inna forma tego samego pytania.
146. U: **Nie.** (cichutko)	
147. E: Dlaczego? (też cicho).	
148. U: Bo... **bo jeden bok ma 7,5 cm** (ta długość jest wypowiedziana jako argument nie do zbicia).	Liczba 7,5 nie występuje w zapisie stosunku $\frac{3}{2}$.
149. E: Aha. No właśnie – jeden bok ma 7,5 cm. To **dlaczego drugi bok nie może być..., dlaczego ten stosunek na pewno nie będzie?**	
150. U: Bo... ten, co jest już narysowany prostokąt, **jest już mniejszy.**	Czyli na pewno nie jest taki sam.
151. E: Ten narysowany prostokąt jest mniejszy, właśnie. A ten?	
152. U: **Jest większy. Będzie większy.**	Czyli na pewno nie będzie taki sam.
153. E: Będzie większy. Byłby większy.	
154. U: Tak.	
155. E: To wiesz, zignoruj to co jest tutaj narysowane i narysuj tutaj cokolwiek, nie na zasadzie „dokończ prostokąt", tylko – „narysuj", (napisz sobie tutaj na górze – „narysuj") tak, aby **stosunek długości jego boków był taki sam, jak stosunek długości boków narysowanego prostokąta. No narysuj jakiś inny prostokąt sama.**	Na stwierdzenie uczennicy, że niemożliwe jest, aby stosunek boków w drugim prostokącie był taki sam jak w pierwszym, badacz zmienia polecenie zadania. **Badacz sprawdza, czy uczennica potrafi zachować stosunek 3 : 2 reprezentowany przez inne liczby (np. 6 : 4).**
156. U: (rysuje w kolejności: 2, 3, 3, 2).	Teraz już wie, jak ma postępować, aby stosunki były takie same – od razu przystępuje do rysowania. Ponieważ prostokąt ma być INNY, więc rysuje prostokąt w innym położeniu.

Przebieg spotkania	Komentarz
157. E: Może podpisz. **I ten** (badacz pokazuje rysunek) **stosunek jest taki sam, jak ten stosunek. Tak?**	
158. U: **Tak.**	
159. E: Dobrze. Czyli co – tak to zadanie należałoby rozwiązać; gdybyś sama miała rozwiązywać to zadanie, to tak byś to rozwiązała?	
160. U: **Tak (szybko, zdecydowanie).**	Uczennica chce skończyć to zadanie. Nie musi być przekonana, że jest to pełne rozwiązanie, ale może sądzić, że takie rozwiązanie będzie zaakceptowane.
161. E: No to dziękuję.	



Rysunek 4. Pisemna praca Barbary — pierwsze zadanie



Rysunek 5. Pisemna praca Barbary — drugie zadanie

The symbol of fraction and its connection with the understanding of ratio and proportion by 2nd year gimnasium students

Summary

The symbol $\frac{a}{b}$ is an example of ambiguous symbols (signs). It is the sign of fraction, the sign of division of two numbers — $a : b$, or the sign of the ratio of two quantities a and b. Concepts connected with the symbol $\frac{a}{b}$ are linked to each other, yet different epistemologies of those concepts cause that functioning of this symbol when applied to the notions of ratio and proportion in the school practice comes up against certain problems. In this article we present certain results of a research conducted among 2nd grade gymnasium students, concerning the functioning of this symbol in connection to the concept of ratio of two quantities.

This research was conducted in order to search for answers to the following questions:

1. does the symbol $\frac{a}{b}$ evoke associations with the notion of ratio of two quantities or with the notion of proportion;
2. is the symbol $\frac{a}{b}$ used by students for coding ratios and proportions in a natural way;
3. to what extent the symbol $\frac{a}{b}$ helps or disturbs proper understanding of ratios;
4. what are the symbols that students spontaneously associate with the concepts of ratio and proportion?

The research consisted of two stages. In the first stage lessons introducing the concept of ratio accordingly to the course book were observed. In those lessons, to denote the ratio of two quantities the fraction symbol was used. The second stage of the research was conducted half a year later. The participants were the same students that took part in the first stage of the research. It was an individual conversation between each student and the researcher. The student was to solve two tasks, which he got written on a sheet of paper and the researcher was trying to find out what symbolism the student used in connection to ratio and proportion.

In this article the analysis of a meeting with two students with different mathematical attitudes is shown. It ocurred that a talented student brilliantly dealt with the notion of ratio but she did not use the fraction symbol. In the situation where recording was needed the student started using procedures typical for operations on fractions, in isolation from the ratio. The less talented student understood the notion of proportion in a very intuitive way. She remembered the fractional recording, she used it, but she could not interpret it and use in the task.

Thus it was proved that the symbol of fraction, preferred for denoting the ratio of two quantities, creates a barrier for a good understanding of ratio and proportion. The symbol $\frac{a}{b}$ was not assimilated by students to express this concept.