

Zbigniew Semadeni
Uniwersytet Warszawski

Utożsamianie pojęć, redukcjonizm i równość w matematyce

1. Wstęp. Celem tej pracy* jest: 1) zidentyfikowanie trudności pojawiających się przy *utożsamianiu* pojęć i sklejanu** przy tym ich znaczeń, 2) badanie sensu, jaki matematycy przypisują zapisom typu „ $a = b$ ” i stwierdzeniom typu: „ a jest tym samym co b ”. Przeanalizujemy trzy możliwe podejścia do kwestii synonimiczności pojęć matematycznych: 1) równość rozumianą jako *identyczność*, 2) definicja *Leibniza*, 3) *równoważność* obiektów (pomijanie cech nieistotnych).

Jako przykłady ilustrujące rozważania dotyczące tych trzech możliwych podejść do kwestii równości przedyskutujemy m. in. dwa stare problemy terminologiczne:

- Czy należy odróżniać „sumę” (np. $5 + 8$) od „wartości sumy”?
- Czy procent to ułamek?

Pokażemy przy tym, jak kwestie semantyczne rzutują na interpretacje takich stwierdzeń, w szczególności pokażemy na odpowiednich przykładach, że utożsamianie jest na ogół operacją lokalną, co jest źródłem rozmaitych trudności, gdy tę lokalność chce się pogodzić z rozpowszechnionym przekonaniem, że pojęcia matematyczne są uniwersalne. Przedyskutujemy pewne konsekwencje globalizacji utożsamień, typowej dla matematyki XX wieku.

*Praca ta była wykonana w ramach badań finansowanych z grantu KBN 2 P03A 024 18.

**Słowa *sklejanie* używamy w tej pracy nieformalnie, opierając się na intuicyjnym jego sensie. Sklejać można ze sobą zbliżone pojęcia (tworząc w ten sposób nowe pojęcie), sklejać można też zbliżone znaczenia jakiegoś pojęcia. Procesem odwrotnym jest *rozzszczepianie* pojęć, czyli analizowanie, z czego jakieś pojęcie jest sklejone. Sklejanie należy odróżniać od *abstrahowania*, które polega na pomijaniu, na niebraniu pod uwagę pewnych cech uważanych za mniej istotne. Przy sklejanu pojęć ich poprzednie znaczenia nie są pominięte, lecz włączone w nowe, bogatsze znaczenie.

W warunkach (a)–(b) występują nieostre sformułowania, toteż uzupełniamy je dodatkową uwagą: należy bądź szukać takich sytuacji w tekstach książek uznanych za autorytatywne, bądź próbować tak skonstruować odpowiednie przykłady, aby ich poprawność matematyczna była klarowna.

Oczywiście dysonanse znaczeniowe ujawniają się jedynie w specjalnie dobranych przypadkach. Powyższy warunek (a) orzeka, że mimo to mają to być przypadki w jakimś sensie typowe. Natomiast przypadki skrajne (takie, w których intuicja zawodzi, a przy próbach wykorzystania określeń formalnych mamy pewną swobodę wyboru i nie możemy jednoznacznie rozstrzygnąć wątpliwości) powinny być rozpatrywane później, po ustaleniu interpretacji w przypadkach ważnych i typowych.

(...) w filozofii nauki jest komunalem, iż teorię formułuje się tak, aby objęła ona przypadki wyraźne, a następnie używa się jej samej do rozstrzygania o przypadkach niewyraźnych (Lyons, 1998, s. 49–50).

Przykłady przypadków skrajnych, nieraz paradoksalnych, wymagających formalnego stosowania definicji, są rozważane w artykule (Wiweger, 1970) o trudnościach pojawiających się przy rozszerzaniu dobrze znanych operacji na przypadek zbioru pustego.

3. Utożsamianie pojęć. Zajmiemy się trudnościami związanymi ze sklejaniem pojęć. Matematycy nieraz używają zwrotów typu: *A można utożsamiać z B*. Na przykład, punkt trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej można utożsamiać z trójką liczb (x, y, z) (współrzędnych tego punktu). Jest to powszechnie stosowane w analizie matematycznej. Z drugiej strony punkt (x, y, z) można utożsamiać z wektorem wiodącym tego punktu, tzn. wektorem o początku $(0, 0, 0)$ i końcu (x, y, z) lub z odpowiadającym wektorem swobodnym o współrzędnych x, y, z ; jest to szczególnie wygodne w mechanice. Można też nie mówić o utożsamianiu, ale wprowadzić operacje: dodawania punktów i mnożenia ich przez liczby (Borsuk, 1950, s. 20); w praktyce oznacza to, że punkt zaczyna odgrywać rolę wektora.

Istotę utożsamiania trafnie ujął Mostowski (1948, s. 83). Uogólniając podany przezeń przykład, można jego myśl ująć następująco. Gdy mówimy, że pojęcie *A* utożsamiamy z pojęciem *B*, rozumiemy to w tym sensie, że wyrażenie *A* uważamy za równoznaczne z wyrażeniem *B*. Zamiast „*A*” możemy powiedzieć „*B*”. Innymi słowy, utożsamianie wyraża się tu w języku: pewne zwroty językowe dotyczące *A*, można zastąpić przez odpowiednio skonstruowane zwroty, dotyczące utożsamianego pojęcia *B* i oba takie zwroty uważamy za równoznaczne, tzn. przypisujemy im to samo znaczenie.

Myślą przewodnią takiego postępowania jest stwierdzenie, że między utożsamianymi pojęciami zachodzi tak bliski izomorfizm, że nie ma potrzeby ich

Ściśle związana z tymi zagadnieniami jest kwestia redukcjonizmu — ważna, choć niedoceniana przez dydaktyków. Tendencje redukcjonistyczne były jedną z przyczyn niewłaściwych tendencji głoszonych pod hasłami „nowej matematyki”. Redukcjonizm, który jest siłą matematyki (a więc nie można go odrzucić), bywa jednocześnie jej słabością w nauczaniu, zwłaszcza gdy jest nadużywany.

Ekspansja redukcjonizmu była ściśle związana z naciskiem na aksjomatyzowanie coraz większych części matematyki. Gdy rozwija się teorię aksjomatyczną, wygodnie jest mieć niewiele pojęć pierwotnych i ograniczać liczbę definicji. Prowadzi to do nastawienia typu: „niepotrzebne jest pojęcie A, skoro można je utożsamić z B”, np.: „Po co ma się tłumaczyć, że funkcja to jakieś trudne do objaśnienia przyporządkowanie, skoro istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między funkcjami a ich wykresami, a te z kolei można utożsamić z pewnymi zbiorami par?” (Semadeni, 2002b, 2.2). Podobnie jedną z przyczyn zanikania geometrii na studiach jest redukcjonistyczne utożsamianie pojęć geometrycznych z algebraicznymi i nadmierny nacisk na algebrę kosztem geometrii (np. rozpatrywanie linii prostych, stożkowych lub kwadryk sprowadza się do rozpatrywania odpowiednich wyrażeń algebraicznych).

2. Opis stosowanej metody. Metoda badawcza stosowana w tej pracy polega na konfrontowaniu wymienionych na wstępie określeń (identyczność, definicja Leibniza, równoważność) z konkretnymi przykładami dotyczącymi odpowiednio dobranych, podstawowych pojęć matematycznych. W przypadku poważniejszych wątpliwości dotyczących stopnia synonimiczności jakichś pojęć, zastosujemy metodę, którą nazwiemy tu metodą *testów kontekstowych*. Polega ona na tym, że szukamy takich sytuacji, w których pojawiają się owo dyskusyjne twory (pojęcia, symbole, wyrażenia) i wnioskujemy — analizując te sytuacje — jakie znaczenie należy przypisać tym obiektom w tym kontekście i w jakim sensie można uważać je za równe. Najlepiej do tego nadają się przykłady, w których ujawniają się dysonanse poznawcze (zbliżoną metodę stosował Thom, 1974, s. 122–129).

Istotnym założeniem jest to, że sytuacje dysonansowe, wybrane do analizowania w tej pracy mają spełniać następujące warunki:

- (a) mają być ważne i dotyczyć spraw dostatecznie często spotykanych,
- (b) pomimo paradoksów z nimi związanych mają odpowiadać standardom poprawności powszechnie przyjętym w matematyce*.

*Należy podkreślić, że chodzi tu wyłącznie o pojęcia z matematyki szkolnej i niezaawansowanej uniwersyteckiej. Rozważania te nie obejmują więc problemów dotyczących aktualnie prowadzonych badań z matematyki, takich jak w cyklu wypowiedzi w (Atiyah et al., 1994).

rozróżniania. Metoda ta jest bardzo ważna, upraszcza wiele rozumowań i odgrywa fundamentalną rolę w wielu teoriach. Należy jednak pamiętać o dwóch istotnych ograniczeniach, które teraz omówimy.

3.1. Utożsamianie odbywa się kosztem rozróżniania znaczeń. Na przykład, dowolną *własność* przedmiotów utożsamia się zazwyczaj ze zbiorem tych przedmiotów, które mają tę własność (Mostowski, 1948, s. 83–85, 89; Quine, 2000b, s. 76–78); *punkty* w przestrzeni euklidesowej utożsamia się z elementami aksjomatycznie zdefiniowanej przestrzeni wektorowej; w teorii prawdopodobieństwa *zdarzenia* utożsamia się z pewnymi zbiorami.

Pomijanie różnic znaczenia nie jest istotne w tych rozumowaniach, w których znaczenie nie odgrywa roli, w teoriach sformalizowanych. Są jednak sytuacje (zwłaszcza w nauczaniu szkolnym), w których sklepanie dwóch pojęć w jedno może stać się nie ułatwieniem, lecz utrudnieniem. Dotyczy to przede wszystkim fundamentalnych pojęć matematyki, takich jak liczba, wektor, figura geometryczna, zbiór, funkcja.

Sklepanie pewnych pojęć w jedno, będące ich syntezą, może być bardzo owocne, *gdy dana osoba rozumie każde z tych pojęć z osobna i pojmuje, że między nimi jest tak bliski związek, że można je utożsamić*. Utożsamianie, to kwestia języka, terminologii, a nie tożsamości znaczeniowej danych pojęć.

Jeżeli jednak utożsamianie — jak to się zdarza — ma służyć temu, że uczniowi wprowadza się tylko jedno pojęcie, bo drugie jest jakoby zbędne, to jest to złudne uproszczenie, bowiem nie daje się uczniowi szansy ukształtowania pominiętego znaczenia, a to zubaża, a może nawet wręcz blokuje pewne typy rozumowań.

Matematycy często nie zauważają trudności, jakie mogą pojawiać się przy utożsamianiu, bowiem potrafią interpretować dane pojęcie tak, jak tego wymaga dana sytuacja, a ich rozumowanie jest odpowiednio elastyczne.

3.2. Utożsamianie ma charakter lokalny, a w szczególności nie jest przechodnie. Z faktu, że A można utożsamić z B , a B można utożsamić z C , nie wynika bynajmniej, że A można utożsamić z C . Na przykład, punkt można utożsamić z wektorem, a wektor można utożsamić z przesunięciem, nie wynika stąd jednak, że punkt można utożsamić z przesunięciem; odległość semantyczna między punktem a przekształceniem geometrycznym jest tu zbyt wielka (inny przykład znajduje się poniżej w 7.3, test 3). *Deklarując jakieś utożsamianie, należy być świadomym zakresu, w jakim utożsamianie to ma być realizowane.*

Globalizacja utożsamiania na całą matematykę jest możliwa tylko przy eliminacji znaczenia.

4. Redukcjonizm. W filozofii i metodologii nauk przez redukcjonizm rozumie się pogląd głoszący, że zjawiska i procesy złożone należy wyjaśniać przez sprowadzanie ich do zjawisk i procesów prostszych oraz do praw nimi rządzących.

W matematyce *redukcjonizm* to postulat, aby maksymalnie starać się zmniejszyć liczbę wprowadzanych pojęć (zarówno pierwotnych, jak i definiowanych). Istotą matematyki jest to, że wiele różnych, niezbyt jasnych pojęć, dotyczących otaczającej rzeczywistości, sprowadza się do jednego klarownego pojęcia matematycznego. *Matematyka jest sztuką nadawania tej samej nazwy różnym rzeczom* (Poincaré, 1911, s. 20). Usuwając, w procesie abstrakcji, matematycznie zbędne cechy, jakie utożsamiane pojęcia mają poza matematyką, *umożliwiamy stosowanie w nowych sytuacjach twierdzeń poznanych w innym kontekście*.

Tak rozumiany redukcjonizm jest fundamentem właściwego pojmowania matematyki; przejawia się to m.in. w takim tworzeniu pojęć, aby dotyczyły wielu różnych sytuacji pozamatematycznych. Siłą matematyki jest to, że — wykorzystując rozmaite analogie i izomorfizmy — tworzy się pojęcie ogólne, obejmujące wiele innych.

4.1. Redukcjonizm bywa źródłem trudności, z których często nie zdajemy sobie sprawy. Matematyk uniwersytecki rozumie pojęcia matematyki szkolnej, wie przy tym, jak należy postępować w danym kontekście i jak się używa aparatu matematyki we właściwy sposób. Chodzi zarówno o te sytuacje, w których mówi się *explicite*, że jakieś pojęcie matematyczne *można utożsamiać* z jakimś innym, jak i te, w których matematycy nie są świadomi takiego utożsamiania, bowiem „tak było od zawsze”, to znaczy taką sytuację utożsamienia pojęć młody człowiek już zastał, gdy poznawał matematykę uniwersytecką i nikt nie zwracał uwagi na subtelne różnice. Jest to jedną z przyczyn, dla których matematycy często nie pojmują trudności, jakie napotykają uczniowie.

Z tego powodu ważna jest analiza procesu odwrotnego: rozszczepianie podstawowych pojęć matematycznych (takich, jak: liczba, funkcja, działanie algebraiczne, znak równości), analizuje się, co składa się na takie pojęcie i diagnozuje się trudności, zarówno potencjalne, jak i te, które się ujawniły u uczniów.

Pojęcia matematyczne, zwłaszcza te najważniejsze, mają na ogół bardzo bogate znaczenie. Na przykład, pojęcie „ułamek” pojawia się w wielu sytuacjach, w różnych rolach (Turnau, 1990). Podobnie wiele znaczeń mają liczby naturalne (Freudenthal, 1973). Liczba 2 może pojawić się w najprzeróżniejszych aspektach (kardynalnym, porządkowym, miarowym i w innych aspektach), w różnym sensie. Dla matematyka jest to zazwyczaj jedno tylko pojęcie. Wyjątkiem są teorie sformalizowane; Mostowski (1948, s. 174) podaje przy-

kład stwierdzenia: „równanie $x^2 + 2x - 5 = 0$ ma dwa pierwiastki”, którego nie daje się wyprowadzić w systemie aksjomatów Peano, bowiem słowo *dwa* nie jest nazwą tego przedmiotu 2 w arytmetyce ujętej aksjomatycznie. Warto dodać, że choć x^2 można zdefiniować w tym systemie jako $x \cdot x$, nie można jednak stwierdzić, że x^2 to iloczyn dwóch czynników.

Inaczej wygląda sytuacja przy rozszerzaniu podstawowych zbiorów liczb. Konstruując zanurzenie półgrupy $\mathbb{N}$ liczb naturalnych w grupę $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych lub zanurzenia $\mathbb{Z}$ w ciało ułamków, najpierw precyzyjnie odróżnia się „2 naturalne” od „2 całkowitego”, a to z kolei odróżnia się od „2 wymiernego”; czyni się tak aż do momentu, w którym oświadcza się, że odtąd będzie się je utożsamiać.

4.2. Jednym z przejawów redukcjonizmu jest dążenie do *minimalizowania liczby pojęć pierwotnych w teorii aksjomatycznej*. Wielu autorów uważało, że teoria, w której jest mniej pojęć pierwotnych, jest lepsza (a i dzisiaj spotyka się takie głosy).

W latach trzydziestych bardzo wybitni uczeni zajmowali się skracaniem aksjomatyki (długość formuły mierzona była liczbą znaków użytych do jej zapisu w symbolice beznawiasowej). Uważano, że to jest problematyka ważna i głęboka. Kryteria oceny się zmieniły i jest raczej pewne, że dzisiaj żadne czasopismo logiczne nie opublikowałoby nowego wyniku w tym zakresie (Szaniawski, 1994, s. 16).

Redukowanie liczby pojęć pierwotnych teorii jest z pewnością niekorzystne, gdy powoduje zwiększenie trudności opanowania danej teorii przez osobę uczącą się jej.

W pewnych sytuacjach jednak można również podać argumenty czysto naukowe przeciwko redukowaniu liczby pojęć pierwotnych. Na przykład, zgodnie ze standardowym dziś określeniem, *grupa* jest to zbiór G wraz z działaniem m z $G \times G$ w G spełniającym znane aksjomaty. W tym ujęciu element neutralny e i odwrotność a^{-1} nie są zaliczane do pojęć pierwotnych, są definiowane. Jeśli jednak chce się przedstawić grupy jako *algebry równościowo definiowalne* (tzn. takie, że w aksjomatach pojawiają się wyłącznie równości, bez implikacji i bez kwantyfikatora $\exists$), to grupę przedstawia się jako zbiór z trzema działaniami: dwuargumentowym m , jednoargumentowym $a \mapsto a^{-1}$ (z G w G) i zero-argumentowym e (z $\{\emptyset\}$ w G) lub jako zbiór z większą, czasem nawet nieskończoną liczbą działań* (por. Rasiowa 1968, s. 274, Sema-

*W czasie dyskusji na konferencji z algebry ogólnej (7–11 IX 1964) w Warszawie postawiono problem: Wiadomo, że istnieje wiele możliwości przedstawienia grup jako algebr rozmaitego typu; formalnie są to różne algebry, ale mimo to jest dla nas oczywiste, że każda z nich jest zwykłą grupą. Jak uzasadnić to poczucie? Na owo pytanie można odpowiedzieć, że są to różne, sformalizowane modele jednego pojęcia głębokiego: grupy (Semadeni, 2002a).

deni i Wiweger 1978, s. 197–200). Zwiększenie liczby pojęć pierwotnych okazuje się tu konieczne, gdy chce się potraktować teorię grup jako część ważnej teorii algebr równościowo definiowalnych.

Postulat redukcjonizmu jest jak najbardziej słuszny w podstawach matematyki (gdzie rezygnacja ze znaczenia rozpatrywanych termów jest założeniem badawczym), ma też znaczenie praktyczne. Gdy Gödel (1940) konstruował (w ramach teorii Zermelo-Fraenkla) model teorii mnogości, w którym da się udowodnić hipotezę continuum, to fakt, że liczba pojęć pierwotnych teorii i liczba aksjomatów zostały zredukowane, pozwalał na skrócenie procesu sprawdzania poprawności konstrukcji.

4.3. Podsumowując to, możemy stwierdzić, że *redukcjonizm jest w matematyce tendencją naturalną i korzystną pod warunkiem, że nie jest posunięty za daleko i stosowany elastycznie* oraz zależy od kontekstu prowadzonych rozważań, bez próby globalnego i maksymalnego „raz na zawsze” redukowania liczby pojęć. Utożsamianie powinno być czynione ze świadomością celu, jakiemu ma służyć.

5. Pojęcie równości w matematyce. Zasadniczo możliwe są trzy podejścia do tego, czym jest *równość* dwóch obiektów a i b : (a) identyczność, (b) definicja Leibniza, (c) równoważność. Omówimy je po kolei, objaśniając je w kontekście matematyki i nauczania matematyki.

5.1. Identyczność. Pierwsze z tych trzech podejść, które nazwiemy *identycznościowym*, można streścić następująco:

- (1) przedmiot może być równy tylko sam sobie.

Tak rozumiane pojęcie równości jest najczęściej spotykane we współczesnym podejściu do matematyki.

Równość, zwana też *tożsamością* albo *identycznością*, jest to relacja dwuczłonowa, która nie zachodzi nigdy między dwoma przedmiotami, ale zachodzi zawsze między dowolnym przedmiotem a nim samym.

Określenie to nie może być przyjęte za ścisłą definicję, gdyż używamy w nim słów *dwa* i *ten sam*, które dają się określić tylko za pomocą relacji równości; jest to więc tylko intuicyjne wyjaśnienie znaczenia słowa *równość*.

Widzimy z tego wyjaśnienia, że zdanie *a jest równe b* , w którym litery a i b są nazwami przedmiotów, jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy litery a i b są nazwami tego samego przedmiotu. Znaczenie, jakie nadajemy słowu *równość*, jest więc odmienne od tego, którego używa się nieraz w geometrii, mówiąc o równości odcinków lub figur geometrycznych (dających się na siebie nałożyć) (Mostowski, 1948, s. 109).

Konsekwencją przyjęcia w matematyce interpretacji (1) pojęcia równości oraz budowania rozmaitych teorii na gruncie teorii mnogości jest tendencja do posługiwania się *klasami równoważności*, która obecnie dominuje w matematyce uniwersyteckiej. Jeśli mamy jakieś pojęcie równości, przy którym $x = y$ nie oznacza, że x jest tym samym co y , to w pewnych typowych sytuacjach tworzymy klasy równoważności (przy oczywistym założeniu, że rozważana relacja równości jest zwrotna, symetryczna i przechodnia).

Ceną, którą za to płacimy, jest windowanie w górę poziomu abstrakcji i trudności pojęciowych, bowiem w miejsce poprzedniego pojedynczego elementu x rozpatrujemy zbiór zdefiniowany jako $\tilde{x} = \{z : z = x\}$. Na to często nakłada się potrzeba zastąpienia łatwiejszego pojęcia zbioru, składającego się z takich pojedynczych elementów x , przez znacznie trudniejsze pojęcie zbioru, którego elementy $\tilde{x}$ są zbiorami. Doświadczenie pokazuje, że znaczna część studentów matematyki (przyszłych nauczycieli) nie potrafi dostatecznie kompetentnie rozumować na tym podwyższonym poziomie abstrakcji zbioru zbiorów; użyteczność takiego podejścia (poza poziomem czystej nauki) jest więc wątpliwa.

5.2. Definicja Leibniza. Drugie możliwe podejście to przyjęcie *definicji Leibniza*, czyli przyjęcie *prawa równości przedmiotów nierozróżnialnych* (*identitas indiscernibilium*). Sformułujemy ją następująco^{*}:

- (2) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Przedmioty uważamy za równe, jeśli są nierozróżnialne,} \\ \text{to znaczy, gdy mają wszystkie cechy takie same.} \end{array} \right.$

W matematyce zazwyczaj przyjmuje się, że *równość identycznościowa jest tym samym, co równość w sensie (2)*.

Dwa przedmioty nazywamy więc równymi, jeśli każda własność, przysługująca jednemu z nich, przysługuje też drugiemu i na odwrót.

Dwa przedmioty, które mają wszystkie własności wspólne, nazywać można *nierozróżnialnymi*. Definicja Leibniza utożsamia zatem relację równości z relacją nierozróżnialności (Mostowski, 1948, s. 110).

Zgodnie z tym ujęciem, dla dowolnych elementów x, y równość $x = y$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru X warunek $x \in X$ jest równoważny warunkowi $y \in X$. Na gruncie formalnej teorii mnogości równoważność ta jest oczywista, wystarczy jako X przyjąć zbiór $\{x\}$.

^{*}W oryginalnej wersji Leibniza określenie to brzmiało następująco: *Eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri, salva veritate* (Tym samym są te, w których jeden można podstawić za drugi, zachowując prawdę); bywa też tłumaczone *Równe są rzeczy, które mogą być podstawione za siebie nawzajem bez zmiany prawdziwości* (Murawski, 1986, s. 182). Cztery wieki wcześniej św. Tomasz z Akwinu podał definicję zbliżoną: *gdziekolwiek są tym samym, mają się w ten sposób, że cokolwiek orzeka się o jednym, orzeka się też o drugim* (Stępień, 1995, s. 305, 350).

5.3. Równość zbiorów. Jako szczególny przypadek rozważań z 5.1 i 5.2 zajmijmy się kwestią równości zbiorów. Mostowski (1948, s. 94) określa najpierw *równość zakresową*, zgodnie z którą zbiory X i Y są równe, gdy $X \subset Y$ i $Y \subset X$, tzn. gdy każdy element zbioru X należy do Y i na odwrót. Później stosuje on podejście Leibniza do przypadku, gdy owe x i y są zbiorami, przechodząc zwyczajowo do dużych liter.

Zgodnie z definicją Leibniza dwa zbiory X i Y są równe, jeśli mają wszystkie własności wspólne (Mostowski, 1948, s. 112).

Następnie Mostowski rozważa związek między dwoma różnymi pojęciami równości zbiorów. Dowodzi, że równość Leibniza pociąga zakresową. Powołuje się też na następujący wynik Robinsona: nie da się wyprowadzić z samych tautologii logicznych, że równość zakresowa pociąga równość Leibniza; stawia więc problem, czy można przyjąć, że te dwa pojęcia równości są równoważne, tzn. czy zaakceptować implikację:

jeśli zbiory są równe zakresowo, to mają wszystkie własności wspólne.

Pisze dalej, że:

Pojęcie własności nie jest czymś z góry danym i nie możemy wobec tego sprawdzać, czy pojęcie to, tkwiące w wysłowieniu powyższej implikacji, spełnia ją, czy nie. Możemy zarówno przyjąć tę implikację za nowy aksjomat, jak i nie przyjąć, w zależności od tego, jak *chcemy* scharakteryzować pojęcie własności.

Własności zbiorów, rozpatrywane zazwyczaj w matematyce, zależą tylko od ich elementów, nie zależą zaś od tego, jak zbiór został zdefiniowany, ani od żadnych podobnych okoliczności. Ponieważ chcemy, by pojęcie własności, rozpatrywane w logice, było możliwie bliskie temu pojęciu własności, którym operujemy intuicyjnie w matematyce, więc przyjmujemy powyższą implikację za nowy aksjomat, dotyczący pojęcia własności. Nazywamy go *aksjomatem ekstensjonalności*.

5.4. Równoważność. Zmienimy teraz definicję Leibniza w jednym drobnym, ale bardzo istotnym szczególe:

- (3) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Przedmioty uważamy za równe, jeśli są nierozróżnialne,} \\ \text{to znaczy, gdy mają wszystkie interesujące nas cechy takie same.} \end{array} \right.$

(Wielka Encyklopedia Powszechna PWN, tom 10, hasło „równość”; Quine 2000a, s. 101–104). Określenie (3) różni się od (2) dodaniem kluczowych słów „interesujące nas”. Prowadzi nas to do trzeciego możliwego, alternatywnego podejścia: jest to *równość równoważnościowa*. Polega ono na uznaniu, że dwa obiekty (w określonym kontekście) uważamy za równe, gdy zachodzi między

nimi pewna *relacja równoważności*, adekwatna do danej sytuacji. Jest to wyraźnie niezgodne z (1). Przykłady takiego podejścia są dwojakiego typu:

(I) równoważności, w których jakieś wyjściowe pojęcie równości rozważanych obiektów jest już ustalone, a wprowadzane nowe pojęcie jest potrzebne przy rozpatrywaniu jakiejś innej, wspólnej, ważnej cechy — przykładami takimi są: kongruencje, np. kongruencja liczb całkowitych $m \equiv n \pmod{p}$, przystawanie kątów obrotu modulo 2π , a także równość odcinków (w sensie przystawania) i równość kątów;

(II) równoważności, w których dopiero będzie się definiować pewne nowe pojęcia — omówimy to dokładniej poniżej.

5.5. Równoważność przy konstruowaniu nowych obiektów. Chodzi tu o sytuację, w której określa się relację równoważności dla obiektów pomocniczych jako wstępny etap definiowania jakichś docelowych pojęć. Dobrymi przykładami są: równość ułamków traktowanych jako pary (p, q) , gdzie $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$ oraz równość wektorów określonych jako pary (a, b) , gdzie a i b są punktami przestrzeni euklidesowej. Równość par jest tym, co określa nowe pojęcie; stanowi to wstępny etap przed utworzeniem klas abstrakcji (tzn. odpowiednio: liczb wymiernych, wektorów swobodnych).

Powszechne obecnie nastawienie, że w przypadku równości równoważnościowej typu (II) konieczne jest przechodzenie do klas abstrakcji, podważył wybitny matematyk amerykański S. MacLane. Zwrócił on uwagę na możliwość alternatywnego — i zarazem równie poprawnego — ujmowania sprawy równości obiektów matematycznych, innego niż standardowe podejście przez klasy równoważności i struktury ilorazowe.

Unikamy tej trudności* przez rezygnację z rozpowszechnionej obecnie mody na klasy równoważności (*the current coset fashion*) na rzecz klasycznej idei kongruencji i rozpatrywania G/N jako grupy, której elementami są po prostu elementy grupy G , z nową relacją równości: $g_1 \equiv g_2 \pmod{N}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g_1 g_2^{-1} \in N$ (MacLane, 1950).

Konsekwentne stosowanie sugestii MacLane'a skomplikowałoby aksjomaty grupy i wymagałoby przeformułowania wielu definicji, toteż nie miał on bynajmniej na myśli wprowadzenia tego w praktyce; klasy równoważności są najlepszym sposobem ujmowania grup ilorazowych. Chodziło mu o zasygnalizowanie, że klasy te nie mają monopolu na poprawność matematyczną, toteż w pewnych przypadkach można z nich zrezygnować na rzecz dawniejszego

*Chodzi o to, że jeżeli H jest grupą ilorazową grupy G (tzn. istnieje podgrupa normalna N taka, że $H = G/N$) oraz K jest grupą ilorazową grupy H , to nie ma przechodniości w tym sensie, że K nie jest grupą ilorazową grupy G , istnieje jedynie izomorfizm między K i odpowiednią grupą ilorazową grupy G .

ujęcia. Jest to szczególnie istotne wówczas, gdy klasy równoważności są za trudne (w szczególności w szkole); wówczas można z powodzeniem posługiwać się pojęciem równości rozumianym jako kongruencja (tzn. jako równoważność zgodna z działaniami arytmetycznymi), bez potrzeby dostosowywania się do określenia (1).

5.6. Ograniczenia podejścia identycznościowego. Niezgodność różnych podejść do tego, co rozumiemy przez słowo „równe”, ujawnia się szczególnie wyraźnie właśnie w przypadku równości odcinków. Powszechnie równość tę określa się tak, jak u Euklidesa: odcinki są równe, gdy są przystające, tj. gdy mają tę samą długość. W okresie reform w duchu „nowej matematyki” odcinki zaczęto traktować jako zbiory punktów. Dwa zbiory uważa się za równe, gdy mają te same elementy; przy tym ujęciu odcinek może być równy tylko sam sobie, zgodnie z (1), jest to jednak mało użyteczne w geometrii szkolnej. O tym konflikcie terminologii powiedziała mi Zofia Krygowska, gdy przy okazji kolejnego wydania swojej geometrii dla klasy I liceum odkryła, że w jej zadaniach słowo „równość” zostało użyte w sensie Euklidesa, choć same odcinki uważane były za zbiory.

Pojęcie równości zbiorów jest niezbędne w dwóch sytuacjach:

1) gdy wykorzystuje się działania na zbiorach, np. gdy pisze się $A = \bigcup A_n$ (w szczególności w teorii miary Lebesgue’a w topologii),

2) gdy stosuje się przekształcenia zbiorów, np. rozpatrując przekształcenie $\varphi : A \rightarrow B$ i zbiory $C \subset A$, $D \subset B$, możemy napisać $\varphi(C) = D$.

Gdy nie ma działań na zbiorach ani przekształceń, tak ograniczone pojęcie równości zbiorów staje się dość jałowe (w szczególności niewiele jest sensownych przykładów takich równości w nauczaniu pogładowym, gdy elementami rozważanych zbiorów są przedmioty z życia codziennego).

Przy konstrukcjach geometrycznych (np. symetralnej odcinka) zwykle mówi się, że pewne odcinki są równe innym i stosuje się zapisy typu $EF = GH$. Gdybyśmy przyjęli, że odcinek może być równy tylko sam sobie, musielibyśmy zmienić sformułowania „odcinki EF i GH są równe” na „długości odcinków EF i GH są równe” lub „odcinki EF i GH są przystające”. Dokładnie te same uwagi stosują się do kątów (jeśli traktuje się je jako zbiory). Gdybyśmy przyjęli, że kąt może być równy tylko samemu sobie, wtedy konieczne byłoby zrezygnowanie z określeń „kąty równe” na rzecz określeń: „kąty o równych miarach” lub „kąty przystające”.

Z podobnym zjawiskiem mamy do czynienia w arytmetyce. Pojęcie równości jest potrzebne, gdy dotyczy *wyniku jakiegoś działania*. Gdy działań nie ma, możliwe są jedynie jałowe równości, np. $7 = 7$; jest to jedna z przyczyn niepowodzeń przedwczesnego wprowadzania trójki znaków $=$, $<$ i $>$ w nauczaniu

początkowym; zapisy typu $9 < 13$ i $14 > 12$ niosą treść istotną dla dziecka, natomiast zapisy typu $5 = 5$ są wprawdzie poprawne, ale zbyt ubogie, by nadawały się do kształtowania pojęcia równości.

5.7. Równość w algebrze. Gdy rozważamy wyrażenia algebraiczne, mamy do czynienia z dwoma pojęciami równości. Jedno z nich wynika bezpośrednio z (1): wyrażenie A jest równe wyrażeniu B jedynie w sytuacji, gdy budowa obu tych wyrażeń jest identyczna, np. $(a + b)^2$ jest równe tylko wyrażeniu $(a + b)^2$ i żadnemu innemu. Drugie — to w zwykły sposób rozumiana równość, np.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Jest to oczywiście równość równoważnościowa tych dwóch wyrażeń. Zauważmy, że nie przechodzi się tu do klas abstrakcji, bowiem jest to równoważność typu (I) w sensie 5.4. Wrócimy do tej kwestii w 7.2 (test 4).

6. Równość a kształtowanie pojęć. Przeanalizujemy definicje (2) i (3) na odpowiednio dobranych przykładach tak, aby móc sformułować ogólniejsze obserwacje.

6.1. Pojęcia powstałe przez abstrahowanie. W wersji (3) istotne są słowa „interesujące nas”. Pokażemy, że takie pojęcie równości może służyć do określania pewnych pojęć. Otóż znane jest zjawisko, że licealiści lub studenci, dostawszy typowe zadanie *kombinatoryczne*, sformułowane w języku potocznym („Na ile sposobów można ułożyć ...”), otrzymują dwa, a czasem trzy różne wyniki, przy czym wszystkie te wyniki są poprawne w tym sensie, że są zgodne z warunkami zadania, ale rozmaicie interpretowanymi. Podstawowym pytaniem, zmierzającym do ustalenia, kto ma rację, jest wówczas: *Jakie układy uważamy za równe?* Na przykład: Czy jeśli obrócimy taki układ, to otrzymany w ten sposób układ uważamy za równy czy za różny od poprzedniego?

Odpowiedzi na tego typu pytania prowadzą do pewnych pojęć, w których zasadniczą rolę odgrywa równość w sensie (3). Pojęcia te kształtują się nie przez formalne definicje, które byłyby na tym etapie zbyt trudne do sformułowania, lecz przez *abstrahowanie* z konkretnych, odpowiednio objaśnionych sytuacji.

W wielu przypadkach doprecyzowanie, jakie obiekty uważa się za równe, determinuje rozpatrywane pojęcie. Dotyczy to np. pojęcia zbioru, którego sens ekstensjonalny wynika z definicji równości zbiorów, rozpatrywanej powyżej. Podobnie istota pojęcia kąta ujawnia się, gdy określamy np. kiedy kąt α w jednym trójkącie uważamy za równy kątowi β w drugim trójkącie; kąty mogą być równe nawet wówczas, gdy jeden trójkąt jest mały, a drugi wielki, co

jest znaną trudnością uczniów szkoły podstawowej. Inny przykład: określenie równości wektorów swobodnych determinuje, czym są te wektory.

6.2. „Takie samo” i „to samo”. Wiadomo, że w języku potocznym z żadnego z tych określeń nie wynika drugie. Na przykład, Wisła jest obecnie ta sama, co przed rokiem, ale nie taka sama (kwestie tego typu analizuje Quine, 2000b, s. 63–65). Z drugiej strony dwa samochody mogą być identyczne, takie same, ale są różnymi przedmiotami, nie są tym samym. Poniższe przykłady są pomyślane jako ilustracja, że takie kwestie — w kontekście bliskim matematyki — istotnie zależą od tego, czy rozpatruje się przedmioty *konkretne*, czy *abstrakcyjne*.

Zacznijmy od uwagi, że w zadaniach dawanych dzieciom używa się rozmaitych wersji określenia „takie same”, np. w piagetowskim teście stałości liczby kardynalnej używa się słów „tyle samo”; w badaniach dotyczących podobieństwa figur mówi się „tego samego kształtu” lub np. „taka sama, ale mniejsza”; przy klockach logicznych „taki sam, ale innego koloru” itp. Często towarzyszy temu jakaś próba wyjaśnienia dziecku, w jakim sensie te słowa „takie samo” mają być rozumiane. Określa się w ten sposób pewnego typu równoważność rozpatrywanych obiektów, a tym samym określa się pewne pojęcie wyznaczone przez tę równoważność.

Przypuśćmy, że mamy zbiór K składający się z sześciu jednakowych klocków. Klocki te są fabrycznie identyczne, nie jesteśmy w stanie ich odróżnić; założmy, że wszystkie cechy, jakie możemy zbadać (nawet z użyciem specjalnej aparatury), są w tych klockach takie same. W myśl definicji Leibniza (2), klocki te można uważać za równe. Jednakże oczywiście uznamy, że zbiór K ma 6 elementów, bowiem klocki te, choć nierozróżnialne przez nas, są fizycznie różnymi przedmiotami. W latach siedemdziesiątych, w czasie jednego z kursów dla metodyków nauczania początkowego, pewna słuchaczka zadała pytanie: *Z ilu elementów składa się taki zbiór K ?* Twierdziła, że zbiór ten ma tylko jeden element, bowiem uczono ją, że w zbiorze $\{k, k, k, k, k, k\}$ elementy, które się powtarzają, nie są brane pod uwagę. Prawdziwa jest przecież równość

$$(4) \quad \{k, k, k, k, k, k\} = \{k\}.$$

Wywołało to dyskusję, ujawniającą znaczne trudności u sporej grupy osób. Spróbujemy to omówić w kontekście obecnej pracy. Przypuśćmy najpierw, że symbol k oznacza nie klocek, lecz literę „ k ” polskiego alfabetu. Wówczas rzeczywiście równość (4) musi zachodzić. Nawet jeśli napiszemy (4) ręcznie i poszczególne litery będą różniły się nieco kształtem, to i tak warunek (4) będzie spełniony. Wynika to po prostu z tego, że w polskim alfabecie jest tylko jedna litera „małe k ”; litera jest tu pojęciem abstrakcyjnym, mającym

wiele konkretnych reprezentacji na papierze, na tablicy itp.

Gdybyśmy rozważyli (4) w kontekście algebry i symbol k oznaczałby liczbę rzeczywistą, to oczywiście równość (4) byłaby prawdziwa.

Zestawiając powyższe przykłady widzimy, że równość taka jak (4) jest prawdziwa dla pojęć abstrakcyjnych, w których k jest symbolem pojedynczego elementu; zbiory w (4) są wówczas jednoelementowe. Natomiast zbiór K , owych 6 jednakowych klocków, składa się z 6 elementów $k_1, \dots, k_6$; są to bowiem konkretne przedmioty; choć te klocki są identyczne, każdy z nich zachowuje swą tożsamość, są więc różne jako przedmioty. Widać tu zasadniczą różnicę między identycznością dla przedmiotów konkretnych a identycznością dla tworów abstrakcyjnych.

Ongiś w publikacjach dla nauczycieli omawiano klocki logiczne (używane w nauczaniu początkowym do ćwiczeń związanych ze zbiorami).

Materiał klasyczny to zestaw przedmiotów reprezentujących kształtem trójkąty równoboczne, kwadraty, prostokąty niekwadratowe i koła dwóch wielkości, dwóch grubości i trzech kolorów. Każdy z przedmiotów zestawu można określić jednoznacznie, podając wartości jego czterech cech: koloru (trzy wartości), wielkości (dwie wartości), grubości (dwie wartości) i kształtu (cztery wartości). (Krygowska, 1977, s. 71).

Pojawiła się wówczas pewna trudność, którą uświadamiało sobie zapewne niewiele osób: czym innym są konkretne klocki, które dziecko układa na stole (klocki te mogą pochodzić z kilku pudełek, a może też ich zabraknąć, gdy się zgubią), a czym innym jedno abstrakcyjne pojęcie takie, jak np. „klocek żółty mały trójkątny cienki”. Zestaw klocków logicznych Dienes’a można więc traktować zarówno jako zbiór składający się z 48 konkretnych klocków w pudełku, ale można go też traktować jako zbiór 48 takich pomysłanych klocków; równość analogiczna do (4) zachodzi w przypadku klocków pomysłanych, a nie zachodzi dla konkretnych.

Przy okazji warto dodać, że w podręcznikach szkolnych zdarzało się, że w bliskim sąsiedztwie omawiane były przykłady: zbiór $\{a, \bar{a}, b, c, \bar{c}, \dots\}$ wszystkich liter alfabetu i zbiór $\{a, b, c\}$, w którym a, b i c oznaczały jakieś dowolne elementy (np. liczby); był to oczywisty błąd dydaktyczny: całkowita zmiana roli symboli a, b, c bez jakiegokolwiek sygnału dla ucznia i nauczyciela.

7. Równość a znaczenie. Równość $a = b$ rozumiana jako identycznościowa, tzn. w sensie (1), zakłada abstrahowanie od szerokokontekstowego znaczenia symboli a i b . Poniżej pokażemy przykłady sytuacji, w których — paradoksalnie dla matematyków — jakieś obiekty uznajemy za równe w tym sensie, że pisze się między nimi znak „=”, ale nie są tożsame w sensie (1) ani równoważne w sensie (3), bowiem ich znaczenie jest różne. Innymi słowy,

a i b mogą mieć tę samą *denotację* (tzn. ten sam zbiór obiektów określonych tą nazwą), a inną *konotację* (treść określoną tą nazwą); w innej terminologii, a i b mają to samo *extensio*, a inne *intensio* (Semađeni, 2002c, 6.1). Co więcej, obiekt zapisany dokładnie tymi samymi symbolami może mieć różne znaczenie, zależnie od kontekstu, to znaczy od sytuacji, w której się go używa.

7.1. Równość wyrażeń arytmetycznych. Zaczniemy od przykładu z nauczania początkowego. Przy analizie sensu równości typu $8 + 5 = 13$ powstaje problem, jak należy ją interpretować. Czy $8+5$ jest tym samym co 13? A przy okazji inne pytanie, stawiane dawniej przez dydaktyków: Co jest *sumą* liczb 5 i 8? Trzy odpowiedzi są możliwe:

- (α) sumą jest zarówno $5+8$ jak i 13;
- (β) mianem sumy można nazwać jedynie $5+8$;
- (γ) mianem sumy można nazwać jedynie 13.

Pytanie to może wydać się wydumane; jednak myśleli nad tym wybitni matematycy, a co więcej, dawali różne odpowiedzi. Okazuje się, że każda z powyższych trzech możliwych odpowiedzi nasuwa istotne wątpliwości.

W poprzednich klasach zapisy działań, np. $8 + 5$, rozumiane były czynnościowo: „do 8 dodać 5”. Obecnie powiemy, że $8 + 5$ jest to wyrażenie, które oznacza sumę liczb 8 i 5, czyli liczbę 13 i dlatego piszemy $8 + 5 = 13$ (Straszewicz, 1966, s. 113).

Jest to objaśnienie zgodne z (α). Uściślijmy je. Znaczenie równości $8 + 5 = 13$ interpretuje się tu następująco: symbol $8+5$ oznacza tę samą liczbę co symbol 13, a więc przyjąć należy odpowiedź (α). Takie podejście jest obecnie najbardziej rozpowszechnione wśród matematyków, toteż osobę przyzwyczajoną do niego zdziwić może poniższy tekst, napisany przez wybitnego matematyka.

Pospolicie wynik z dodawania nazywa się sumą. My tu używamy odmienniej terminologii, nazywając sumą *zespół znaków* $2+3$, a 5 *wartością sumy*. (...) W algebrze wyraz „suma” oznacza formę, np. „suma dwóch kwadratów”. Prawidła algebraiczne dotyczą raczej form niż liczb, tzn. podkreślają formalną stronę; (...) W stosowaniu praw algebraicznych rolę przede wszystkim postać wyrażenia. Tym kierując się, zarezerwowaliśmy nazwę „suma” dla formy. Wynik z dodawania trzeba więc było nazwać nieco inaczej. Nazwaliśmy go „wartością sumy”, a nazwa ta wydała się nam stosowną z tego powodu, że i więcej skomplikowane wyrażenia miewiają wartości. Gdyby wynik dodawania był uważany za sumę, to by nie można było mówić, że „suma ma wyrazy”. Jakkolwiek liczba np. 7 może być uważana za wartość sumy kilku wyrazów, jednak liczba ta, sama w sobie żadnych wyrazów nie ma.

$a + b$ ma dwa znaczenia: oznacza, że należy do a dodać b , a prócz tego oznacza wynik dodawania. (...)

Tyle o tym ze stanowiska dydaktycznego. Gdy staniemy na ściśle naukowym stanowisku, cała nasza dyskusja staje się, właściwie rzecz biorąc, bezcelowym i niezrozumiałym filozofowaniem. Istotnie, jakkolwiek obierzemy pogląd, oparty na naturalistycznym, konkretnym rozumieniu pojęcia liczby, zawsze zabrnijemy prędzej czy później w trudności natury logicznej. Właśnie z tych to powodów nauka zrezygnowała z takiego stanowiska i obrała czysto formalny, aksjomatyczny punkt widzenia. W naukowej części [tej książki] nie wspomina się wcale o „znaczeniu” wyrażen arytmetycznych, nie określa się „wyrażeń”, „wyrazów” itp., gdyż te pojęcia okazują się tam zbędne. Inaczej rzecz przedstawia się, gdy mamy cel dydaktyczny przed sobą. Tutaj każde stanowisko jest dobre, o ile tylko jest rozsądne, celowe, a przede wszystkim, gdy nie hamuje ono rozwoju ucznia. (Nikodym, 1930, s. 336–337).

Nikodym więc jednoznacznie opowiedział się za interpretacją (β), postulując, by za sumę liczb 5 i 8 uznać wyrażenie $5+8$, a 13 określić jako *wartość tego wyrażenia* czyli *wartość sumy* liczb 5 i 8.

7.2. Ekstensjonalność. Należy więc ustosunkować się do pytania: Czy równość $5 + 8 = 13$ znaczy, że $8+5$ jest tym samym co 13 w sensie (1)? W jaki sposób należy postępować z tego typu wątpliwościami w sytuacji, gdy zawodzi nas wyczucie? Zastosujemy wspomnianą w części 2 metodę testów kontekstowych.

Otóż bardzo ważnym aspektem relacji równości jest *prawo ekstensjonalności*, które w wersji podanej przez Mostowskiego (1948, s. 111) brzmi następująco: jeśli równość $a = b$ jest zdaniem prawdziwym, a litery a i b są nazwami przedmiotów, to możemy w każdym zdaniu zastąpić literę a przez b lub na odwrót i otrzymamy zdanie równoważne poprzedniemu. Nawiązuje się tu w sposób oczywisty do definicji Leibniza i do aksjomatu ekstensjonalności, o którym była mowa w 5.3.

Oczywiście, przez „zdanie”, w cytowanym wyżej prawie ekstensjonalności Mostowski rozumiał zdanie sformułowane w języku logiki matematycznej. Natomiast, jeśli rozszerzymy zakres dopuszczalnych zdań do wszelkich zdań orzekających o treści matematycznej formułowanych przez matematyków w ich tekstach, to interpretacja ekstensjonalności musi ulec pewnej modyfikacji. W pewnych sytuacjach może się bowiem okazać, że choć zachodzi równość $a = b$, to nie można symbolu a zastąpić dowolnie symbolem b , bowiem pojawia się dysonans różnicy znaczeń. Taką *rozszerzoną zasadę ekstensjonalności* wykorzystamy w jednym z testów, czy dwa pojęcia oznaczają to samo. A oto, co pisze na ten temat Quine:

Naturalną sugestią, zasługującą na bliższą analizę, jest myśl, że synonimiczność dwu form językowych polega po prostu na ich wzajemnej

wymienialności we wszystkich kontekstach bez zmiany wartości logicznej tych kontekstów — na wymienialności, mówiąc słowami Leibniza, *salva veritate* (Quine, 2000a, s. 56)

Dany kontekst jest *ekstensjonalny*, jeśli jego wartość logiczna nie może ulec zmianie w wyniku zastąpienia jakiegoś zdania składowego innym zdaniem o tej samej wartości logicznej, ani w wyniku zastąpienia jakiegoś predykatu składowego innym predykatem o tych samych denotatach, ani w wyniku zastąpienia jakiegoś występującego w nim terminu jednostkowego innym terminem o tym samym desygnacie. Te trzy warunki nazywa się zwięźle warunkami wymienialności *salve veritate* tego, co kowalentne, koekstensywne lub identyczne. Kontekst jest *intensjonalny*, jeśli nie jest *ekstensjonalny*.

Ekstensjonalność jest podstawowym walorem logiki predykatów, a także wszelkiej nauki, którą można gramatycznie zrekonstruować w logice predykatów. Ekstensjonalność teorii uważam za konieczny, choć nie wystarczający warunek tego, bym ją w pełni rozumiał. W szczególności fakt, iż jakieś prawdziwe zdanie staje się fałszywe, gdy pewien termin jednostkowy zastąpi się w tym zdaniu innym terminem nazywającym tę samą rzecz, stanowi afront wobec zdrowego rozsądku. (...)

Naruszenie trzeciego warunku — wymienialności członów identyczności — uważamy za najbardziej obraźliwe. (...) wszystkie trzy warunki są ze sobą nierozłącznie związane (Quine, 1998, s. 133–134; por. Quine 2000a, s. 148 i 171).

Pokażemy poniżej przykłady testów opartych na rozszerzonej zasadzie ekstensjonalności. W każdym z nich korzystamy z powszechnie zaakceptowanych interpretacji matematycznych, a mimo to testy te prowadzą do różnych konkluzji. Świadczy to o istnieniu dysonansów znaczeniowych.

TEST 1. Do równości $8 + 5 = 13$ zastosujemy prawo ekstensjonalności w sensie węższym, tj. w sensie sformułowanym przez cytowanego wyżej Mostowskiego. Jest oczywiste, że w każdym zdaniu sformalizowanym zamiast 13 można napisać $8+5$ (pamiętając o dopisaniu nawiasów tam, gdzie trzeba) i odwrotnie, zamiast $8+5$ można napisać 13.

TEST 2. Poprawne jest napisanie, że $8 + 5 \in \mathbb{N}$ (wszak w aksjomatach teorii grup zakłada się, że $g_1 + g_2 \in G$), ponadto $13 \in \mathbb{N}$, zatem $8+5$ jest liczbą naturalną i 13 jest liczbą naturalną; musi to być oczywiście ta sama liczba. test ten potwierdził, że symbole $5+8$ i 13 oznaczają ten sam obiekt matematyczny. A więc należy przyjąć interpretację (α).

TEST 3. Do równości $8 + 5 = 13$ zastosujemy prawo ekstensjonalności w sensie szerszym, nie ograniczając się do zdań sformalizowanych, lecz uwzględniając też inne zdania, pojawiające się w zwykłych tekstach matematycznych. Rozpatrzmy zdanie: „W wyrażeniu $8+5$ składnikami są liczby 8 i 5”.

W zdaniu tym nie można za $8+5$ podstawić 13, bowiem mielibyśmy wtedy jedynie potencjalną i niejednoznaczną możliwość rozkładu liczby 13 na składniki. Zatem $8+5$ nie jest tym samym co 13, bowiem wyrażeniu $5+8$ możemy przypisać pewne sensowne stwierdzenie matematyczne, którego nie możemy przypisać liczbie 13. Przykład ten wskazuje, że $8+5$ i 13 nie są tym samym, choć zachodzi równość $8 + 5 = 13$. Zarazem test ten nie rozstrzyga kwestii wyboru między (α) , (β) i (γ) ; wybór odpowiedniej terminologii zostaje sprawą otwartą.

TEST 4. Wyrażenia $(a + b)^2$ i $a^2 + 2ab + b^2$ są tożsamościowo równe, ale mimo to, są to dwa różne wyrażenia algebraiczne; różnią się bowiem swą strukturą powierzchniową (Kieran, 1989). Krygowska (1977, s. 84) odróżniała statyczną i operatywną interpretację takich par wyrażen. Równość tych wyrażen (w danym systemie algebraicznym) nie znaczy ich tożsamości, bowiem są one różnymi elementami zbioru formalnych wyrażen, rozumianych jako ciągi znaków (Malcew, 1970). Sytuacja z $8+5$ i 13 jest analogiczna. Test ten daje ten sam wynik, co poprzedni: wyrażenia arytmetyczne $8+5$ i 13 są różne, ale mają tę samą wartość. Wnioski z tego testu dają się pogodzić z każdą z interpretacji (α) , (β) i (γ) .

TEST 5. Wyrażenie $5+8$ jest szczególnym przypadkiem wyrażenia algebraicznego $a + b$, gdzie $a, b \in \mathbf{R}$. Formułując np. aksjomaty teorii grup, uważamy $a + b$ za pojedynczy element. W arytmetyce możemy obliczyć sumę $5+8$ (tzn. przedstawić ją w systemie dziesiętnym bez użycia znaków działań), ale przy symbolach literowych obliczenie wartości jest niemożliwe. Można wprowadzić napisać $a + b = c$ i uznać, że to c jest sumą a i b , ale jest to nie to samo, co wartość liczbową w przypadku arytmetyki. Test ten potwierdza interpretację (α) .

Powyższe rozważania prowadzą do następującej konkluzji. Sumę taką jak $5+8$ można nazwać *dubletem pojęciowym* w sensie wprowadzonym w (Semadeni, 2002a, 11.1). Symbol $5+8$ oznacza dwa różne pojęcia. Pierwsze z nich, to wyrażenie rozumiane jako term $(5, +, 8)$; drugie to liczba 13. W pewnych sytuacjach ujawnia się jedno z nich, w innych drugie, a jeszcze w innych są one nierozróżnialne. Co więcej, pojęcia te są tak silnie ze sobą zrośnięte, że nie byłoby celowe traktowanie ich jako dwóch osobnych pojęć (z wyjątkiem pewnych specjalnych sytuacji). Nie byłoby np. celowe używanie dwóch różnych oznaczeń, bowiem znaczenie symbolu $5+8$ może doznać subtelnych przesunięć w trakcie pojedynczego rozumowania. Z drugiej jednak strony czasem pojawiają się dysonanse znaczeniowe. Nie przeszkadzają one matematykom w ich normalnej działalności, w pewnych analizach dydaktycznych należy je jednak brać pod uwagę.

Na marginesie tych rozważań zauważmy jeszcze, że gdyby potraktować wyrażenie „ $5+8=$ ” jako ciąg czynności do wykonania na kalkulatorze, to na ekranie pojawi się wynik: 13. Nie da się jednak zastosować tej procedury w przeciwną stronę, odpowiadająca równości $13 = 8+5$. Znak równości na kalkulatorze nie wyraża więc równości w sensie (1), (2) lub (3).

Dubletem pojęciowym jest też ułamek, np. $\frac{6}{8}$ oznacza w jednych sytuacjach parę liczb (gdy mówimy, że 6 jest licznikiem tego ułamka), a w innych oznacza iloraz $6:8$, tj. pojedynczą liczbę; to drugie jest szczególnie widoczne np. w zapisie $\frac{6}{8} + \sqrt{2}$. Na opisaną tu trudność zwracał uwagę Mostowski:

Inny, często popełniany błąd wiąże się z takimi pojęciami, jak ułamek, licznik, mianownik itp. Mówi się np. o mianowniku liczby wymiernej, jak gdyby to była pewna liczba, przyporządkowana jednoznacznie każdej liczbie wymiernej. (...) Niektórzy dawniejsi logicy wysuwali stąd wniosek, że należy odrzucić pewnik ekstensjonalności lub Leibniz’owską definicję równości, por. J. Sleszyński, *Teoria dowodu*, Kraków 1925, s. 163. Jest też wątpliwe, czy ktokolwiek zgodziłby się na twierdzenie, że mianownikiem liczby

$$(5) \quad \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right)$$

jest 2, mimo, że liczba ta jest dokładnie równa $\frac{1}{2}$. Trudność zniknie, gdy zgodzimy się uważać ułamek za nazwę liczby wymiernej, mianownik zaś za tę część ułamka, która jest wypisana pod kreską poziomą. Jedna i ta sama liczba wymierna ma różne nazwy, z których pewne są uławkami i posiadają mianowniki, inne zaś jak np. (5), nie są uławkami i nie mają mianowników. W tym sensie mianownik nie jest liczbą, lecz nazwą liczby (Mostowski, 1948, s. 314).

W okresie „nowej matematyki” niektórzy dydaktycy głosili, że należy w szkole odróżniać pojęcia: „ułamek” (para) i „liczba wymierna” (pojedyncza liczba). Jest jednak oczywiste, że takie staranne rozróżnianie terminologiczne jest nierealne nie tylko w szkole, ale nawet w wykładach uniwersyteckich; podobnie nie da się w praktyce wprowadzić tego, że mianownik jest nazwą liczby, a nie liczbą, skoro mówi się np. o mnożeniu mianowników (mnoży się liczby, a nie ich nazwy).

Po prostu trzeba pogodzić się z tym, że pewne symbole i nazwy są niejednoznaczne. W przypadku wątpliwości, co oznacza $\frac{6}{8}$, należy poprzedzić taki symbol odpowiednim słowem. Trzeba pogodzić się z tym, że ułamek jest dubletem pojęciowym. Dubletami analogicznymi do $5+8$ i $\frac{6}{8}$ są też wyrażenia arytmetyczne podobnego typu, w szczególności dwuargumentowe, np. $12-3$.

Pytanie, którą z powyżej rozważanych odpowiedzi (α), (β), (γ) należy zaakceptować, pozostaje bez definitywnej odpowiedzi. W szkole przeważa obecnie interpretacja (α). Jednakże w nauczaniu początkowym najwłaściwsza wy-

daje się osłabiona interpretacja (γ), uznająca 13 za sumę liczb 5 i 8, pomijająca milczeniem kwestię, czy $5+8$ też można nazwać sumą tych liczb, aż do czasu, gdy to będzie do czegoś potrzebne, a zarazem uczniowie dojrzeją do rozumienia tej podwójnej terminologii. Uczniowie muszą przedtem być w stanie pojąć, że wyrażenie $5+8$ jest symbolem pewnej liczby, a nie tylko wynikiem obliczenia. Jest faktem empirycznym (Gray i Tall, 1994), że dla dzieci symbol $5+8$ początkowo jest jedynie zadaniem do wykonania, jest symbolem procesu; samodzielnym obiektem $5+8$ staje się później, na wyższym poziomie świadomości matematycznej (na przykład, gdy uczeń, mając do czynienia z wyrażeniem typu $7 \cdot (5 + 8)$ potrafi spojrzeć na to strukturalnie i widzieć w tym m.in. iloczyn dwóch liczb, a nie tylko ciąg kolejnych obliczeń do wykonania).

Dodajmy, że do szerokontekstowego znaczenia symbolu $a+b$ wchodzi m.in. przyporządkowanie $(a, b) \mapsto a+b$, ale nie ma powodu, dla którego przyporządkowanie to mielibyśmy utożsamiać z $a+b$.

7.3. Procenty. Oto następny przykład, będący źródłem polemik. Wielokrotnie stawiano pytanie, czy 1% to to samo co ułamek 0,01 lub $\frac{1}{100}$. Oto przykłady różnych stanowisk.

Pojęcie procentu wprowadzamy objaśniając, że wyrażenie „jeden procent” lub „1%” oznacza ułamek $\frac{1}{100}$ (...). Jednocześnie trzeba wyraźnie zaznaczyć, że wyrażenia tego nie używamy samego w sobie jako nazwy liczby, lecz jedynie w połączeniu z nazwą jakiejś wielkości lub liczby (Straszewicz, 1972, s. 97–98).

Otóż, 1% oznacza dla mnie funkcję liniową (...) $1\%(x) = \frac{1}{100}x$ (...) Uważam, że wykorzystanie pojęcia funkcji przy wprowadzaniu pojęcia 1% nie byłoby szczęśliwym pomysłem dydaktycznym. Natomiast konieczne jest uświadomienie uczniom faktu, że istotne jest, z jakiej wielkości obliczamy 1%. *Nie jest prawdą, że 1% jest równy liczbie 0,01.* (...) tak określony 1% daje niepoprawne skojarzenia, bo 1% (jeśli nie podamy, z czego go wyznaczamy) nie oznacza żadnej wielkości (Wawrzyniak-Kosz, 1997).

Odkąd to odkryłam [opisany wcześniej błąd ucznia], nigdy nie mówię uczniom, że np. 10% to $\frac{1}{10}$, ale że jest to $\frac{1}{10}$ czegoś. Można by myśleć, że powtarzanie słówka „czegoś” jest zbyteczną pedanterią. Tak jednak nie jest, skoro jego brak powoduje poważne błędy, podobne do wspomnianego powyżej. (...) Ważnym momentem, w którym złe rozumienie procentów może się utrwalić, jest sam początek, a szczególnie rozwiązywanie zadań typu: zamień procent na ułamek” lub „zamień ułamek na procent”. (...) Zamiast pytać: „15% — jaki to ułamek?”, pytam na przykład: „15% czekolady — jaka to część czekolady?” (Kochańska, 1999).

Z punktu widzenia matematyki zapis $\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0,5 = 50\%$ jest notacją tej samej liczby, a jej użycie stosuje się w zależności od sytuacji.

(...) Przyjmując w podręcznikach szkolnych równość $1\% = 0,01$, podkreśla się identyczność zasad rachunków na procentach i ułamkach (...) Wyrwane z całego kontekstu nauki o ułamkach i procentach pytanie: czy $1\% = \frac{1}{100}$? nie może być rozstrzygnięte za pomocą krótkiej odpowiedzi (Siwek i Wachnicki, 1998).

Kontrowersję tę, która dotyka bardzo istotnych problemów, można rozstrzygnąć w jeszcze inny sposób, stwierdzając, że wprawdzie zachodzi równość $1\% = \frac{1}{100}$, ale 1% *nie jest tym samym co* $\frac{1}{100}$, *bowiem znaczenie tych symboli jest różne*. Zastosujemy metodę testów kontekstowych do wyjaśnienia tych kwestii.

TEST 1. Możemy napisać „ $\sin \frac{1}{100}$ ”, ale zapewne zachniemy się, zobaczymy napis „ $\sin(1\%)$ ”, zbyt duży jest tu bowiem dysonans znaczeniowy, a co najważniejsze, nie widać żadnego powodu, dla którego mielibyśmy rozpatrywać $\sin(1\%)$. Procenty mają swój sens w pewnym zakresie rozumowań i choć w obliczeniach nieraz wykorzystujemy równość $1\% = \frac{1}{100}$, pojęciowo 1 procent nie jest tożsamy z $\frac{1}{100}$. Tak więc test z podstawieniem procentu do wyrażenia trygonometrycznego pokazuje, że pomimo równości $1\% = \frac{1}{100}$ znaczenie szerokokontekstowe tych pojęć jest różne. Jakkolwiek z tej równości korzysta się w obliczeniach, nie można dowolnie zastępować jednego wyrażenia drugim.

TEST 2. Zadanie z podręcznika szkolnego: należy wskazać liczbę przeciwną do 200%. Mechaniczne zastosowanie równości $1\% = \frac{1}{100}$ daje odpowiedź: -2 (lub -200%). Zgadzam się tu z opinią (Wawrzyniak-Kosz, 1997), że takie zadanie trudno zaakceptować, nie widać bowiem, jaki sens miałyby stosowanie ujemnych procentów. Wykracza się tu, stosując niewłaściwy formalizm, poza ich uznany powszechnie zakres znaczeniowy. Oczywiście zdarzało się niejednokrotnie w historii matematyki, że ktoś wychodzi z nową ideą poza zakres pojęciowy ustalony przez poprzedników, zawsze jednak miało to jakiś określony cel, służyło to rozwiązaniu jakiegoś zagadnienia, do którego wcześniej znane środki były niewystarczające.

Warto dodać, że podobne zastrzeżenia budzi stosowanie porównywania ilorazowego (które powiązane jest pojęciowo z procentami i proporcjami) do liczb ujemnych; do tego typu niestosownych uogólnień należy np. polecenie typu: „oblicz liczbę -3 razy większą od liczby 7 ”; takie zadania daje się czasem obecnym uczniom (np. w klasie VI) do rozwiązania, choć nawet dla matematyka nie jest jasne, jaka odpowiedź miałyby być poprawna (liczba -21 jest przecież mniejsza od 7), a już zupełnie nie widać, czemu to miałyby służyć.

TEST 3. Pytamy, czy 1% jest funkcją. Oto kryterium testowe: jeśli 1% byłby funkcją, to miałyby sens różniczkowanie tej funkcji. Czy zaakceptujemy

$\frac{d}{dx} 1\%$ lub też $(1\%)'$? Funkcją jest $x \mapsto 1\%x$, samo 1% trudno uznać za funkcję. Podobnie $x \mapsto 3x$ jest funkcją, choć 3 jest liczbą, a nie funkcją. Można oczywiście, w pewnych sytuacjach, identyfikować 1% z odpowiednią funkcją (tak jak w powyższym cytacie), ale znaczenie pojęcia 1% nie pokrywa się ze znaczeniem tej funkcji (nie mówiąc o tym, że dydaktycznie bezcelowe byłoby objaśnianie procentów przez odwołanie się do, bez porównania trudniejszego pojęcia funkcji). Gdyby ktoś koniecznie chciał różniczkować 1% , traktując procent jako funkcję $x \mapsto 1\%x$ (innymi słowy, utożsamiając 1% z tą funkcją), to otrzymałby wynik $\frac{1}{100}$. Jeśli jednak uzna się, że procent to ułamek i $1\% = \frac{1}{100}$, to różniczkować nie wolno (różniczkować można jedynie funkcje, a nie liczby). Ale jeśliby dokonać jeszcze innego, nieraz stosowanego, utożsamienia: liczby c z odpowiednią funkcją stałą o wartości c , to pochodna musiałaby być równa 0 .

Aby lepiej zrozumieć źródło poczucia, że 1% jest funkcją, porównajmy status trzech pojęć, określonych przez symbole 3 , $\frac{3}{4}$ i 3% . Dla dziecka początkowo sama liczba 3 nic nie znaczy; sens mają 3 jabłka, 3 stoły itd. Później stopniowo liczba 3 odrywa się w umyśle dziecka od konkretności i jest ono w stanie zaakceptować samo 3 , bez podania, czego to ma być 3 . Podobną sytuację mamy z ułamkiem $\frac{3}{4}$; początkowo musi to być $\frac{3}{4}$ czegoś konkretnego: $\frac{3}{4}$ jabłka, $\frac{3}{4}$ pizzy itp. Później dziecko jest w stanie zaakceptować $\frac{3}{4}$ bez żadnego konkretności. Natomiast praktyką matematyków jest to, że na ogół nie używa się 3% bez podania, czego to miałoby być 3% . Stąd bardzo naturalne jest poczucie, że sens ma jedynie 3% jakiejś wielkości x , a więc poczucie, że należy uważać 3% za funkcję.

TEST 4. Pojęcie skali tradycyjnie określano jako stosunek odpowiednich liczb; warto przy tym zauważyć, że pisze się np. $1 : 1000$, a nie pisze się $\frac{1}{1000}$, zapewne chcąc podkreślić, że chodzi o stosunek dwóch liczb, a nie o jedną liczbę; mamy tu przesunięcie znaczenia dubletu pojęciowego $\frac{1}{1000}$ w kierunku pary liczb $(1, 1000)$. Obecnie często obserwujemy praktykę podawania skali w procentach, np. na kserografie naciska się przycisk 70% . Jest to procent pewnej wielkości, a więc mieści się w schemacie opisanym w powyższym cytacie Straszewicza. Chodzi tu o stosunek dwóch długości, a więc nadal jest to procent czegoś.

TEST 5. Wielu matematyków używa nieraz procentów przy określaniu, jak duże jest prawdopodobieństwo czegoś. Odnosi się to w zasadzie tylko do sytuacji praktycznych, np. mówi się „prawdopodobieństwo wyrzucenia orła wynosi 50% ”, „prawdopodobieństwo (czegoś) wynosi mniej niż 1% ”. Tutaj symbol „ 1% ” traktowany jest jako samodzielna liczba, ale można uważać, że nadal chodzi o pewien stosunek ilościowy (zarówno klasyczna definicja prawdopo-

dobieństwa, jak i definicja prawdopodobieństwa geometrycznego ujęte są w terminach ilorazu dwóch wielkości tego samego typu).

W przeciwieństwie do poprzednich przykładów: sumy $5+8$ i ułamka $\frac{6}{8}$, procentu nie należy zaliczać do dubletów pojęciowych; 1% to pojedyncze pojęcie, którego zakres znaczeniowy w większości typowych przypadków pokrywa się z liczbą $\frac{1}{100}$, ale mimo to 1% i $\frac{1}{100}$ nie są pojęciami tożsamymi.

8. Konkluzje. Pokazaliśmy na przykładach, że pytanie, czy dane pojęcia matematyczne są tym samym lub czy dane obiekty są równe, może nie mieć jednoznacznej odpowiedzi. Problemów sklejania i rozszczepiania znaczeń nie da się rozstrzygnąć na drodze dedukcyjnego rozumowania. Powyżej zarysowane trudności i brak jednoznacznych rozstrzygnięć typu: prawda-fałsz, mogą być trudne do pogodzenia z ideałem ścisłości, który według powszechnej opinii powinien cechować matematykę. Stulecie, między rokiem 1900 a 2000 przyniosło ogromny postęp w dziele oczyszczania matematyki z niejasności i dysonansów pojęciowych, jednakże pewne problemy wydają się nieusuwalne.

Czy jednak to zdobycie przez matematykę absolutnej ścisłości odbyło się bez ofiary? Bynajmniej, co wygrała ona na ścisłości, to straciła na obiektywności. Właśnie przez oddalanie się od rzeczywistości zdobyła ona ową doskonałą czystość. Można dziś swobodnie przebiec cały jej obszar, niegdyś najeżony przeszkodami, lecz przeszkody te nie znikły. Przeniesiono je tylko na granicę, i trzeba je znowu przezwyciężyć, jeśli chce się przekroczyć tę granicę i przeniknąć do królestwa praktyki (Poincaré, 1911, s. 92).

Problemy omawiane w tej pracy ukazują trafność opinii Poincarégo: pewne trudności zostały przeniesione w dalsze rejony, nie ma ich już w teorii dedukcyjnej, ale ujawniają się w praktyce.

W okresie reform pod hasłami „nowej matematyki” głoszono, że źródłem trudności uczniów są nieścisłości w przekazywanych treściach i że precyzyjniejsze ujęcie materiału nauczania doprowadzi do poprawy wyników. Okazało się to, w znacznym stopniu, iluzją. Doprecyzowanie matematycznych wyśłożeń i oznaczeń przynosi korzyści tylko do pewnego poziomu (zależnego od zaawansowania uczących się i od natury zagadnienia); powyżej tego dalsze próby uściślenia utrudniają lub wręcz uniemożliwiają rozumienie.

Dysonanse znaczeniowe są rzeczą normalną, trzeba się z nimi pogodzić; są ceną, jaką płacimy za uniwersalność matematyki. Warto je poznać, by lepiej wiedzieć, jak sobie z nimi radzić.

Literatura*

- A t i y a h, M. et al.: 1994, Responses to "Theoretical mathematics: toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics" by A. Jaffe and F. Quinn, *Bulletin of the American Mathematical Society* **30**, 178–207.
- B o r s u k, K.: 1950, *Geometria analityczna w n wymiarach*, Czytelnik, Warszawa.
- F r e u d e n t h a l, H.: 1973, *Mathematics as an Educational Task*, Reidel, Dordrecht.
- G ö d e l, K.: 1940, *The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory*, Princeton.
- G r a y, E. M., T a l l, D. O.: 1994, Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic, *Journal for Research in Mathematics Education* **25**, no. 2, 115–141.
- K i e r a n, C.: 1989, The early learning of algebra. A structural perspective, w: Wagner i Kieran (red.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, NCTM, Reston (Virginia).
- K o c h a ń s k a, A.: 1999, Procent to nie ułamek, *Matematyka w Szkole (GWO)* **2**, 27.
- K r y g o w s k a, Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki*, część 1, WSiP, Warszawa.
- L y o n s, J o h n: 1998 [1977], *Chomsky*, Prószyński i S-ka, Warszawa.
- M a c L a n e, S.: 1950, Duality for groups, *Bulletin of the American Mathematical Society* **56**, 485–516.
- M a l c e w, A. I.: 1970, *Algiebraiczeskije sistemy*, Nauka, Moskwa.
- M o s t o w s k i, A.: 1948, *Logika matematyczna*, Monografie Matematyczne, Warszawa.
- M u r a w s k i, R.: 1986, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Wydawnictwo Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza, Poznań.
- N i k o d y m, O.: 1930, *Dydaktyka matematyki czystej w zakresie gimnazjum wyższego, tom I, Liczby naturalne*, Książnica-Atlas, Lwów.
- P o i n c a r é, H.: 1911 [1908], *Nauka i Metoda*, Warszawa 1911.
- Q u i n e, W. V. O.: 1998 [1995], *Od bodźca do nauki*, Aletheia, Warszawa.
- Q u i n e, W. V. O.: 2000a [1947–1951], *Z punktu widzenia logiki*, Aletheia, Warszawa.
- Q u i n e, W. V. O.: 2000b [1987], *Różności. Słownik prawie filozoficzny*, Aletheia, Warszawa.
- R a s i o w a, H.: 1968, *Wstęp do matematyki współczesnej*, PWN, Warszawa.

*W nawiasie [] podajemy rok ukazania się oryginalnej wersji.

- S e m a d e n i, Z.: 2002a, Trojaka natura matematyki: idee głębokie, formy powierzchniowe, modele formalne, *Dydaktyka Matematyki* **24**, 41–92.
- S e m a d e n i, Z.: 2002b, Trudności epistemologiczne związane z pojęciami: pary uporządkowanej i funkcji, *Dydaktyka Matematyki* **24**, 119–144.
- S e m a d e n i, Z.: 2002c, Rola znaczenia w rozumowaniach matematycznych, *Dydaktyka Matematyki* **24**, 145–174.
- S e m a d e n i, Z., W i w e g e r, A.: 1978, *Wstęp do teorii kategorii i funktorów*, wyd. II, PWN, Warszawa.
- S i w e k, H., W a c h n i c k i, E.: 1998, Procenty jako szczególne ułamki. Czy $1\% = 0,01$?, *Matematyka* 2/1998, 97–100.
- S t ę p i e ń, A. B.: 1995, *Wstęp do filozofii*, wyd. III. Towarzystwo Naukowe KUL, Lublin.
- S t r a s z e w i c z, S.: 1966, *Arytmetyka i algebra w klasach V–VIII szkoły podstawowej*, PZWS, Warszawa.
- S z a n i a w s k i, K.: 1994, *O nauce, rozumowaniach i wartościach*. PWN, Warszawa.
- T h o m, R.: 1974 [1971], Matematyka „nowoczesna”: pomyłka pedagogiczna i filozoficzna?, *Wiadomości Matematyczne* **18**, 113–129.
- T u r n a u, S.: 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa.
- W a w r z y n i a k - K o s z, W.: 1997, Czy 1% równa się $0,01$?, *Matematyka* 2/1997, 118–119.
- W i w e g e r, A.: 1970, Kłopoty ze zbiorem pustym, *Wiadomości Matematyczne* **11**, 187–199.

Identification of concepts, reductionism and equality in mathematics

S u m m a r y

The purpose of the paper is to discuss various epistemological difficulties related to questions of *equality*, *sameness*, *identification* and *equivalence* of mathematical objects; in particular, various interpretations of Leibniz's extensionality are shown. Reductionism (maximal reduction of the number of concepts) is the strength of mathematics in research and its weakness in education; when it is stated that a concept A is the same as concept B , often the price for it is the abandonment of the meaning. Identification is not transitive (e.g. when 'point' is identified with 'vector' and 'vector' is identified with 'translation'); in such a case the identification cannot be global in mathematics. Several specific educational questions are discussed as examples, e.g. 'Is $5+8$ the same as 8 ?' and 'Is 1% the same as $\frac{1}{100}$?' (with no simple answer 'yes' or 'no').