

Małgorzata Przeniosło
Akademia Świętokrzyska w Kielcach

Trudności związane z procesem poznawania podstawowych pojęć analizy matematycznej

Wstęp

Zgodnie z poglądami konstruktywistycznymi¹, opartymi na teorii J. Piageta², tworzenie i rozwój struktur poznawczych zachodzi dzięki dostarczaniu nowych informacji powodujących zakłócenie równowagi, dzięki usuwaniu tych sprzeczności i świadomemu abstrahowaniu. Jak bardzo rzeczywistość w polskich szkołach różni się od tego, miałam okazję przekonać się, prowadząc badania dotyczące rozumienia granicy funkcji i pojęć z nią związanych — funkcji, ciągłości, pochodnej, nieskończoności — przez osoby rozpoczynające i kończące studia matematyczne. Oprócz szeregu ustaleń związanych ze stanowiącym istotę badań rozumieniem pojęcia granicy³, dociekania pozwoliły na dostrzeżenie bardziej ogólnych problemów. Wnioski te dotyczą trudności, które mogą pojawiać się w procesie poznawania abstrakcyjnych pojęć matematycznych⁴. Problemom tym będzie poświęcony niniejszy tekst.

1 „Dołączanie” zamiast akomodacji

Najistotniejszym problemem związanym z tworzeniem struktur poznawczych, zauważonym w toku badań, były zakłócenia w procesie akomodacji.

¹Zob. np. (Wygotski, 1977); (Goldin, 1990); (Noddings, 1990); (Turnau, 1995).

²Zob. np. (Piaget, 1977, 1981).

³Szczegółowe wyniki badań dotyczących rozumienia granicy funkcji przedstawiłam w książkach: (Przeniosło, 2000, 2001).

⁴Ujawnienie tych problemów umożliwiły zastosowane metody badawcze. Analiza odpowiednio skonstruowanych, obszernych sprawdzianów pisemnych, a szczególnie wywiady (rozmowy indywidualne) i prowadzenie ich w sposób otwarty, a nie według sztywnego scenariusza, wyjątkowo sprzyjało bowiem głębokiemu zbadaniu skojarzeń studentów.

U wielu osób, szczególnie rozpoczynających studia, obraz pojęcia⁵ powstawał głównie poprzez mechaniczne dołączanie nowych informacji, często już zniekształconych. Nie dochodziło przy tym do konfrontacji z już istniejącymi skojarzeniami, ani do rzeczywistej zmiany struktur poznawczych prowadzącej do wyabstrahowania sensu pojęcia⁶. O takim sposobie tworzenia świadczy wielość ujawnionych, a nieuświadomionych wcześniej, sprzeczności, niedostrzeganie zależności między poszczególnymi elementami obrazu, czy też różne zachowania w stosunku do analogicznych sytuacji, różniących się na przykład jedynie sposobem przedstawienia funkcji (choćby za pomocą wzoru i wykresu). Proces zakłócania i przywracania równowagi, umożliwiający rozwój rozumienia przyswajanych pojęć, często więc w ogóle nie zachodził.

Taki sposób przyswajania wiedzy spowodował ogromny chaos w strukturach poznawczych części badanych osób, szczególnie rozpoczynających studia. Wiele świadczących o tym przykładów zachowań zamieściłam we wspomnianej już pracy, poświęconej rozumieniu granicy funkcji wyniesionemu ze szkoły średniej. Ilustracją skrajnego chaosu i zarazem osobliwości ujawnionych skojarzeń, związanych z granicą funkcji, są dość wyczerpująco analizowane fragmenty rozmów z jedną z badanych osób, rozpoczynających studia⁷. Sądziła ona na przykład, że istnieją dwa różne pojęcia granicy — w punkcie x_0 (granica równa wartości) i przy x dążącym do x_0 . Równie osobliwy okazał się sposób ustalania granicy tego drugiego typu. Był on oparty na przekonaniu, że jeśli wartości coraz mniej się różnią na przykład od 1, to różnią się też coraz mniej od 2. To przeświadczenie prowadziło do przyjmowania, że różnica między wartościami funkcji dla argumentów dążących do x_0 a liczbą będącą granicą nie musi być dowolnie mała. Czasem studentka pytana o granicę przy x dążącym do x_0 , obserwując wykresy, postępowała jeszcze inaczej. Interesowało ją dążenie „końców” wykresu bez względu na to, jaki był punkt x_0 . Przyjmo-

⁵Przez obraz pojęcia (porównaj „concept image” w: Tall, Vinner, 1981, s. 152 oraz „koncepcja pojęcia” w: Sierpińska, 1985, s. 114) wytworzony przez studenta rozumem strukturę poznawczą zawierającą wszelkie skojarzenia i wyobrażenia myślowe, które wiąże on z tym pojęciem (także z własnościami i twierdzeniami), w tym intuicję, elementy formalnego rozumienia, schematy (również swoiste) i strategię operowania. W strukturze tej istotne jest ponadto dostrzeganie zależności między jej elementami i związków z obrazami innych pojęć. Przy czym nie wszystkie jej elementy bywają uświadomione, a niektóre mogą pozostawać w sprzeczności ze sobą.

⁶Użycie słowa „dołączanie” a nie asymilacja (por. Turnau, 1990, s. 83; 1995, s. 137) podyktowane jest właśnie faktem, iż działania tych studentów były jedynie mechaniczne. Prawdopodobnie w ogóle nie dochodziło u nich do przepuszczania nowej informacji przez filtr posiadanych już skojarzeń i dopiero wtedy przyswajania niezbyt odległych wiadomości, nie mówiąc już o zmianie struktur poznawczych pod wpływem nie pasującej informacji.

⁷Analiza zachowań studenta i opis podjętych prób korygowania jego skojarzeń — zob. (Przeniosło, 2000, s. 99-100, 122-124, 135-136 oraz załączniki 4, 7, 9).

wała przy tym, że nie naniesione już na rysunku punkty wykresu zachowują się tak, jak te dane. Takie postępowanie było związane z obserwowaniem jedynie punktów wykresu w oderwaniu od dążenia argumentów. Innym razem studentka brała pod uwagę tylko liczbę, która ma być granicą; patrzyła na dziedzinę funkcji w sposób wzrastający, „poruszała się” po wykresie, szukając punktów o drugiej współrzędnej równej tej liczbie. Z kolei uzupełniając podane w zadaniu wykresy tak, by pewna liczba była granicą przedstawionych funkcji w danym punkcie, dorysowywała fragmenty pewnych krzywych spełniających — jej zdaniem — żądany warunek, ignorując przy tym istniejący już fragment wykresu. Patrząc na tak uzupełnione rysunki, mówiła o granicy funkcji „starej” — danej w zadaniu i „nowej” — tej, którą dorysowała. Nawet po uzmysłowieniu sobie w toku dyskusji, że uzupełnione przez nią rysunki nie przedstawiają funkcji i poprawieniu ich tak, by usunąć ten problem, wciąż wskazywała granicę funkcji „starej” i „nowej”⁸.

Budowanie obrazu pojęcia poprzez dołączanie kolejnych informacji jest zapewne odzwierciedleniem powszechnego (do niedawna?) w polskich szkołach „dogmatycznego” stylu pracy nauczyciela⁹. Styl ten charakteryzuje się właśnie transmisją gotowej wiedzy zamiast kształtowania struktur poznawczych. Nie ma w nim miejsca na konfrontację nowych informacji z posiadaną już wiedzą, na poszukiwanie sprzeczności i ich usuwanie.

Interesujące jest jednak to, że poziom rozwoju obrazów podstawowych pojęć analizy matematycznej ujawniany przez polskich uczniów i studentów w zasadzie nie różni się od prezentowanego przez ich zachodnioeuropejskich i amerykańskich rówieśników¹⁰. Dzieje się tak mimo, iż wydaje się, że w tamtych krajach dużo bardziej rozpowszechniony jest inny styl pracy nauczyciela, np. nauczanie problemowe. Brak znaczącej różnicy w poziomie rozwoju struktur poznawczych wynika prawdopodobnie z tego, że sama gotowość uczenia problemowo w przypadku skomplikowanych pojęć abstrakcyjnych nie wystarcza do zorganizowania odpowiednich sytuacji dydaktycznych, umożliwiających uczniom samodzielne odkrywanie znaczenia tych pojęć. Konieczne wydaje się poznanie „natury” rozważanych pojęć, kryjących się w niej trudności, przeszkód, możliwych skojarzeń i degeneracji, a to wymaga przeprowadzenia długotrwałych i drobiazgowych badań. Dopiero na podstawie takich dociekań moż-

⁸Fragment zachowań i próby ich korygowania — patrz załącznik 1.

⁹Zob. np. (Krygowska, 1977, s. 5), (Trelński, 1994, s. 11).

¹⁰Wynika to z przeprowadzonych badań i analizy prac polskich i zagranicznych autorów dotyczących podobnych kwestii (zob. m.in.: Artigue, 1986; Cornu, 1983; Davis, 1986; Dreyfus, 1982; Dubinski, 1992a, b; Even, 1990; Ervinck, 1981; Ferrini-Mundi, 1994; Harel, 1996; Hebda, 1989; Molenda, 1996; Norman, 1994; Orton, 1983; Pawlak, 1996; Robert, 1981; Rucker, 1995; Selden, 1994; Sierpińska, 1985, 1987, 1992; Tall, 1981, 1996; Vinner, 1992; Williams, 1991).

liwe jest wypracowanie propozycji problemowego wprowadzania tych pojęć¹¹.

Postulat zmiany sposobu nauczania i takiego jak opisano wypracowywania metod rozważania pojęć trzeba odnieść także do pracy ze studentami¹². Mechanizm tworzenia struktur poznawczych u wielu badanych kończących studia niewiele różnił się od ujawnionego u osób rozpoczynających naukę w szkole wyższej. Fakty rozważane w toku kursu analizy matematycznej często pozostają jedynie w sferze pewnego „formalizmu”, nierzadko w ogóle nie wywierając wpływu, lub tylko niewielki, na wcześniej istniejące skojarzenia¹³. Dla ukształtowania operatywnego obrazu każdego z poznawanych pojęć konieczne jest natomiast korygowanie i rozwijanie skojarzeń wyniesionych ze szkoły średniej, a nie jest to proste, co pokazały przeprowadzone badania. Nie podejmowanie mających to na celu, systematycznych działań, powoduje pozostawienie tego problemu samemu studentowi. Analizując różne rozważane kwestie, może on również dojść do refleksji nad swoimi skojarzeniami, wyobrażeniami czy intuicyjnymi odczuciami. Nie jest to jednak łatwe, chociażby ze względu na różnorodność ujęć rozważanych teorii i zazwyczaj niewystarczającą umiejętność samodzielnego uczenia się. U większości badanych osób w toku studiów nastąpiło zbyt mało koniecznych zmian.

2 Trudności związane z definicją pojęcia

W podobny, jak opisano, sposób zazwyczaj powstawały również określenia rozważanych pojęć. Wiele badanych osób, szczególnie rozpoczynających studia, jako definicję postrzegało „zlepek” skojarzeń, nierzadko wzajemnie sprzecznych, odnoszonych do pewnych szczególnych sytuacji¹⁴. Te „częstkowe definicje” często były „zakotwiczone” w różnych sferach myślowych. Czasem były to tylko skojarzenia związane z wykresami lub rysunkami, innym razem jedynie z wzorami czy pewnymi typami funkcji albo schematami (nieradko

¹¹Próby takiego wypracowania sytuacji dydaktycznych podjęłam w toku prowadzonych badań, a będącą ich efektem propozycję odkrywania pojęcia granicy, poprzez stopniowe tworzenie i precyzowanie skojarzeń coraz bliższych znaczeniu tego pojęcia, przedstawiłam w pracy (Przeniosło, 2000, s. 156-176).

¹²Dość dobre rezultaty przyniosły próby korygowania i rozwijania skojarzeń podejmowane z uczestniczącymi w badaniach studentami, zob. (Przeniosło, 2001).

¹³O podobnych kwestiach dotyczących rozumienia pojęć analizy matematycznej piszą A. Molęda (1996) i R. Pawlak (1996). Z analizy badań prezentowanych w pierwszej z tych prac wynika, iż im bardziej ambitny jest program zajęć, w sensie ścisłości i ogólności wprowadzanych teorii matematycznych, tym więcej skojarzeń i intuicyjnych odczuć ukształtowanych jeszcze w szkole średniej pozostaje w strukturach poznawczych studentów.

¹⁴Na traktowanie różnorodnych skojarzeń jako definicji pojęcia zwracają również uwagę m.in.: G. Ervinck (1981); B. Cornu (1983); D. O. Tall, S. Vinner (1981).

swoistymi). Widoczny był brak refleksji nad przeniesieniem tych przekonań z jednego aspektu na inny, co mogłoby stać się bodźcem do rozwijania rozumienia.

Opisany sposób tworzenia definicji pojęć znajdował m.in. odzwierciedlenie w zwrocie „z definicji”, którego badani studenci często używali do potwierdzenia oczywistości swoich przekonań. Dla większości osób wykorzystujących ten zwrot nie oznaczał on, iż coś można wywnioskować z definicji, ale że jest to część wytworzonego przez nie określenia pojęcia, opisująca pewną szczególną sytuację.

Rozważany problem czasem dotyczył także studentów kończących naukę, również tych, którzy w toku całych badań przejawiali dobrze rozwinięte i operatywne struktury poznawcze. Na przykład do poprawnej definicji granicy funkcji często dołączano, jako jej szczególny przypadek, nieistniejące pojęcie granicy w punkcie izolowanym dziedziny. Interesujące jest to, że korygowanie tego przekonania okazało się wyjątkowo trudne właśnie w przypadku osób mających dość poprawnie ukształtowany obraz pojęcia granicy. Dobre efekty przyniosło dopiero odwołanie się do ścisłych sformułowań zawartych w podręcznikach akademickich. Przytaczanie przez studentów w toku dyskusji różnych wersji definicji bowiem nie spowodowało pożądanego skutku. Działo się tak, mimo iż podawali również fakt, że „ x_0 jest punktem skupienia dziedziny”, a może paradoksalnie właśnie dlatego. Prawdopodobnie przyswajając kiedyś definicję, zinterpretowali ten fakt nie jako warunek konieczny, ale jako wyszczególnienie jednego z przypadków określenia pojęcia. Definicja bowiem przyjęła u nich postać: „Gdy x_0 jest punktem skupienia dziedziny, to określenie granicy jest następujące...”. Biorąc pod uwagę fakt, że w toku całych badań osoby te ujawniły dobrze rozwinięty i dość operatywny obraz granicy funkcji, warto się zastanowić, czy sformułowania definicji granicy, z którymi zetknęły się w toku poznawania tego pojęcia, nie sprzyjały powstaniu rozważanego skojarzenia. Najwyraźniej bowiem samo wypisanie założenia, że „ x_0 jest punktem skupienia dziedziny”, czasem nie wystarcza nawet najzdolniejszym studentom. Przy jakimś szczególnym usytuowaniu może nawet stwarzać wrażenie, że gdzieś w innym miejscu pojawi się druga części definicji dla x_0 nie stanowiącego punktu skupienia. Przykład pokazuje, więc jak samo sformułowanie definicji pojęcia może wpływać na kształtowanie niepoprawnych skojarzeń.

W opisany sposób postrzegało jednak określenia rozważanych pojęć znacznie mniej osób kończących studia niż rozpoczynających naukę. Większość studentów, którzy ukończyli kurs analizy matematycznej, potrafiła bowiem przytoczyć poprawne sformułowania definicji. W toku badań okazało się jednak, że wielu z nich traktowało definicję jako mniej „ważny” element obrazu, jeśli

za kryterium „ważności” przyjąć chęć jego użycia podczas rozwiązywania problemów. Istotniejsze były dla nich rozmaite skojarzenia, nierzadko sprzeczne z określeniem pojęcia. Czasem, tak jak u osób rozpoczynających studia, wiązało się to z niezrozumieniem roli definicji matematycznej jako nadającej sens pojęciu i przeświadczeniem, iż o znaczeniu pojęcia decydują właśnie różnorodne skojarzenia. Znacznie częściej wynikało to jednak z niedostatecznego rozumienia sformułowań rozważanych definicji i nieumiejętności ich interpretacji.

Przyczyną wszystkich opisanych problemów prawdopodobnie znów było to, że określenia pojęć nie były odkrywane w wyniku świadomego abstrahowania różnorodnych konkretnych sytuacji. Definicja podana „z zewnątrz” w postaci sformalizowanej może zostać dołączona do obrazu i istnieć jako jego element obok tworzących go również rozmaitych skojarzeń, wyobrażeń i intuicji. Nie dochodzi przy tym do konfrontacji tych elementów. Zgodnie bowiem z zasadą asymilacji uczący się nie przyswaja informacji zbyt różniących się od posiadanych; może je mechanicznie zapamiętać, ale w zasadzie nie spowoduje to zmiany jego struktur poznawczych. Trudności z odwoływaniem się do określeń pojęć abstrakcyjnych (szczególnie granicy czy ciągłości funkcji) wynikały zapewne również z samej ich struktury. Bez względu na rozważane teorie mamy bowiem do czynienia ze skomplikowanymi definicjami nominalnymi¹⁵. Ich zrozumienie wymaga znajomości elementów pewnego „słownika”, za pomocą którego zostały określone, a do ich wykorzystywania konieczna jest umiejętność stosowania tych elementów. „Słownik” ten jest zaś skomplikowany, jest bowiem nie tylko zbiorem pewnych pojęć matematycznych, ale zawiera także zależności między nimi.

¹⁵Według K. Ajdukiewicza (1985, s. 235-247) definicja nominalna wyrazu W na gruncie słownika S jest to wypowiedź, która pozwala każde zdanie zbudowane z wyrazów słownika S i z wyrazu W przetłumaczyć na zdanie zbudowane z samych wyrazów słownika S . W podobny sposób określa definicję nominalną Tocki (2000, s. 292). Za K. Ajdukiewiczem określenia pojęć granicy i ciągłości trzeba zaliczyć do definicji projektujących — „definicje nominalne jakiegoś terminu, które przyjmujemy na tej podstawie, żeśmy postanowili termin ten tak rozumieć, jak tego prawdziwość definicji wymaga, nazywamy definicjami projektującymi. [...] Projektująca jest definicja $\log_b a = c$ zawsze i tylko wtedy, gdy $b^c = a$ », ponieważ przyjęliśmy ją na tej podstawie, żeśmy postanowili wyraz $\log$ tak rozumieć, jak tego prawdziwość tej definicji wymaga”. Tocki (2000) zalicza rozważane tu definicje do kontekstowych, indukcyjnych (zob. s. 298), rezerwując nazwę definicja projektująca dla kształcenia matematycznego i formułowania określenia pojęcia w wyniku jego odkrywania lub konstruowania (zob. s. 306).

3 „Siła” intuicji

Wyjątkową rolę w strukturach poznawczych wielu badanych studentów odgrywały odczucia intuicyjne¹⁶, szczególnie te niepoprawnie ukształtowane. Skojarzenia, które nabrały takiego charakteru, mogły bowiem blokować rozwój obrazu pojęcia, a nawet zburzyć już istniejącą strukturę, również poprawnie ukształtowaną, a podejmowane próby ich korygowania nastroczały wielu trudności. Przyczyną tak wielkiej siły tego typu przekonań była zapewne sama istota wszystkich intuicyjnych odczuć — postrzeganie ich jako oczywiste¹⁷.

Taką charakterystykę intuicyjnych odczuć najlepiej wyjaśniają przykłady zachowań badanych studentów. Skojarzeniem blokującym rozwój rozumienia granicy ciągu było przekonanie o konieczności monotonicznego dążenia wszystkich wyrazów do liczby będącej granicą, często łączone jeszcze z postrzeganiem granicy jako nieosiągalnej. Takie skojarzenie było szczególnie rozpowszechnione wśród osób rozpoczynających studia. Funkcjonowało ono zazwyczaj w postaci wyobrażenia wizualnego — naniesiona w układzie współrzędnych prosta i zbliżające się do niej wyrazy ciągu. Innym intuicyjnym odczuciem, które mogło utrudniać rozwój obrazu pojęcia, było utożsamianie funkcji ciągłej z możliwością rysowaniem całego wykresu bez odrywania ołówka od kartki. Takie przekonanie było bardzo powszechne wśród osób rozpoczynających studia, ale w różnych sytuacjach towarzyszyło również części osób, które ukończyły akademicki kurs analizy matematycznej. U większości badanych zostało ono jednak skorygowane w toku studiów, ale zazwyczaj tylko częściowo. Prawdopodobnie przekonanie to bowiem było źródłem uznawania przez wiele osób, że istnienie ciągłych (w opisanym sensie) „kawałków” wykresu, chociażby „nie-wyobrażalnie” małych, z obu stron x_0 , jest warunkiem koniecznym ciągłości w punkcie x_0 . Mogło spowodować także odniesienie takiego warunku koniecznego do istnienia granicy w x_0 . Intuicyjne postrzeganie ciągłości zapewne miało również wpływ na odrzucenie przez większość osób kończących studia faktu ciągłości funkcji w punkcie izolowanym dziedziny, poznanego w toku kursu analizy matematycznej. Interesujące jest także to, że z kolei nieprzyswojenie pojęcia ciągłości w takim punkcie x_0 mogło mieć pewien wpływ na powstanie u niektórych osób przekonania o istnieniu granicy w x_0 (równej wartości). Mogło to dotyczyć przede wszystkim niektórych spośród studentów, którzy tylko punkt

¹⁶Przez intuicje rozumiem (podobnie jak Fischbein i in. 1979, s. 5; Sierpińska, 1985, s. 113) bezpośrednie, globalne, same przez się zrozumiałe formy wiedzy, których głównymi cechami są synkretyczna struktura i oczywistość (spontaniczne akceptowanie). Oznaczają one to, co naprawdę ktoś odczuwa jako oczywiste w odniesieniu do danego pojęcia (nie zawsze zgodnie z jego znaczeniem), a nie to, co akceptuje w wyniku logicznej i jawnej analizy. W podobnym sensie rozumiał intuicję już Kartezjusz (zob. Murawski, 1994, s. 61).

¹⁷Zob. np. (Fischbein, 1979).

izolowany uznawali za szczególny, z innymi sytuacjami wiązali natomiast dość poprawne skojarzenia. Niewykluczone, że właśnie rozważając zaskakującą dla nich kwestię ciągłości w takim x_0 , zwrócili uwagę na wyjątkowy charakter tego punktu. Fakt ciągłości nie został przez nich przyswojony ze względu na zbyt duże rozbieżności z silnymi już intuicyjnymi wyobrażeniami, ale mógł pozostać podświadome odczucie wyjątkowości, które później zostało przeniesione na pojęcie granicy.

Przyczyn powstania omówionych intuicyjnych skojarzeń można znów upatrywać w sposobie wprowadzania rozważanych pojęć w szkole. Na przykład w odniesieniu do granicy ciągu odwoływano się prawdopodobnie do obserwacji wykresu ciągu $a_n = \frac{1}{n}$ (takie podejście można znaleźć np. w podręcznikach¹⁸). Nawet, gdy później dla ilustracji definicji wykorzystano ciągi, które nie są monotoniczne, to pierwsze zetknięcie z pojęciem mogło wytworzyć wyobrażenie związane z „monotonicznym dążeniem”. To pierwsze skojarzenie, jeśli zbyt długo funkcjonowało w strukturach poznawczych, mogło zostać utożsamione z pojęciem. Tego typu zabiegi dydaktyczne, podyktowane chęcią przybliżenia uczniom wprowadzanych pojęć, są dość powszechne, mimo iż badania dydaktyczne i psychologiczne już dawno dowiodły, jak ważne są pierwsze wykorzystywane przykłady¹⁹. Przykłady te, jeśli są zbyt jednostronne, zbyt odległe od sensu pojęcia a zarazem proste i „chwytlive”, łatwo mogą przerodzić się w intuicyjne odczucia i zablokować rozwój rozumienia pojęcia. Oczywiście intuicyjnych przekonań bowiem może spowodować odrzucenie sprzecznych z nimi nowo asymilowanych informacji (gdy ta sprzeczność zostanie dostrzeżona). Jedynie umożliwienie uczniom odkrycia sensu pojęcia poprzez zetknięcie z możliwie różnorodnymi, ale w miarę prostymi sytuacjami pozwoli na wytworzenie właściwych skojarzeń, gwarantujących dalszy rozwój rozumienia²⁰.

Niezwykłość intuicyjnych przekonań tkwi jednak w tym, że często powstają samoistnie i trudno przewidzieć konieczność ich korygowania i możliwe konsekwencje niepoprawnego ukształtowania. Skutki te mogą być natomiast daleko siężne i wykraczać poza ramy obrazu pojęcia, którego przekonanie bezpośrednio dotyczy. Badania dostarczyły bowiem przykładów świadczących o tym, że nawet „drobne”, niepoprawnie ukształtowane intuicyjne przekonanie może zarówno podważyć łączące się z nim poprawne skojarzenia, jak i spowodować zachwianie podwalin obrazów pozornie nie związanych z nim pojęć.

¹⁸Jest tak w podręcznikach autorstwa J. Anusiaka (1993) czy A. Ehrenfeucht i O. Stände (1988).

¹⁹Por. (Bruner, 1978, s. 276).

²⁰Mówi o tym m.in. J. Bruner (1978, s. 240). Propozycja takiego wprowadzania pojęcia granicy ciągu — zob. przypis 11.

Chodzi o przekonanie, że liczby $0,999\dots$ i 1 różnią się²¹. Towarzyszyło ono większości badanych studentów. Wielu z nich sądziło tak mimo znajomości schematów zamiany ułamka dziesiętnego nieskończonego na ułamek zwykły²². Algorytmy te potwierdzały — ich zdaniem — tylko to, iż „przyjmuje się, że $0,999\dots$ i 1 nie różnią się”. Sądziли jednak, że „w rzeczywistości liczby te różnią się, choć nie sposób ustalić, o ile”. Twierdzili, iż jedynie „w matematyce przyjmuje się, że są równe”. Przypuszczali, że jest to czynione dlatego, iż „każde rozwinięcie dziesiętne, czy to skończone, czy nieskończone, jest właśnie tylko rozwinięciem dziesiętnym pewnej liczby; więc w tym przypadku też tak musi być, a ponieważ jest okresowe, to musi być to liczba wymierna, ale tak jak dla innych wymiernych nie da się go otrzymać przez podzielenie licznika przez mianownik, więc może być to tylko jedynka”. Uważali, że można przyjąć, iż rozważane liczby są równe, gdyż różną się „nieskończenie mało”, „dowolnie mało”, albo „o najmniejszą z możliwych wartości”. Sądziли jednak, że „nie jest to taka sama równość jak $1 = \frac{2}{2}$ czy $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, tylko taka prawie równość”. Nie kwestionowali więc w zasadzie „prawdziwości” rozważanej równości, ale jak napisał R. J. Pawlak (1996) w odniesieniu do podobnych „operacji nieskończonych”, traktowali ją „jako rodzaj pewnej umowy — wynik operacji (sztuczek?) matematycznych”.

Zwroty „dowolnie mało” albo „nieskończenie mało” dla wielu badanych wiązały się z nieskończonym procesem dążenia do zera ciągu różnic liczby 1 i kolejnych wyrazów ciągu: $0,9$; $0,99$; $0,999\dots$. Uwidocznili to wpływy przeszkody epistemologicznej²³ związanej z postrzeganiem wielkości nieskończenie małej jako stałej mniejszej od dowolnie danej liczby. Inną, niepokonaną przez wielu studentów przeszkodą epistemologiczną, mającą wpływ na analizowane przekonanie było postrzeganie nieskończoności jako istniejącej jedynie potencjalnie, a nie aktualnie. Odzwierciedlały to stwierdzenia typu: „to dążenie do

²¹Badani studenci rozważali kwestię równości liczb $0,999\dots$ i 1 , rozwiązując następujące zadanie:

- Czy liczba $0,999\dots$ jest granicą takiego ciągu?
 $0,9$; $0,99$; $0,999$; $0,999\dots$
- Czy liczba 1 jest granicą ciągu z punktu a?
- Czy liczby $0,999\dots$ i 1 różnią się? Jeśli tak, to o ile?

²²Badane osoby przedstawiały te algorytmy na przykład w postaci:

I — oparty na równaniach równoważnych:

$$x = 0,999\dots; 10x = 9,999\dots; 10x - x = 9,999\dots - 0,999\dots; 9x = 9; x = 1.$$

II — oparty na sumie nieskończonego ciągu (szeregu) geometrycznego, w którym $a_1 = 0,9$, $q = 0,1$:

$$0,999\dots = 0,9 + 0,09 + 0,009 + \dots = \left(\frac{a_1}{1-q}\right) = \frac{0,9}{1-0,1} = 1.$$

²³Określenie pojęcia przeszkody epistemologicznej w ramach teorii kultury E. T. Halla — zob. (Sierpińska, 1994, s. 165). Warto też zwrócić uwagę na to, jak sens przeszkód tego typu przybliżono w pracy (Pawlak, 1996, s. 35).

granicy będzie trwało zawsze, nigdy się nie skończy”, obserwowane szczególnie u osób rozpoczynających studia. Takie postrzeganie nieskończoności wiązało się więc z ideą czasu, ale równie często wynikało z „realistycznego” odbioru słowa „nigdy”. Odczucie różnienia się liczb $0,999\dots$ i 1 czasem potwierdzano bowiem stwierdzeniem, iż „nigdy nie zdołamy napisać ostatniej dziewiątki, zawsze będzie można dopisać kolejną”.

Z rozmów wynikało ponadto, że studenci uznają znane im schematy zamiany ułamków nieskończonych za obliczenia jedynie przybliżone, dające wynik z niemal „idealną dokładnością”, z błędem „prawie równym zero”. Sądziли tak ze względu na działania na „liczbach nieskończonych” lub na nieskończenie wielu liczbach. Jednak po dokładnym przeanalizowaniu na przykład algorytmu opartego na równaniach równoważnych, osoby odwołujące się do niego nie potrafiły powiedzieć, w jakim momencie można mówić jedynie o „równości w przybliżeniu”. U niektórych wywołało to wahanie co do kwestii różnienia się liczb $0,999\dots$ i 1 , ale nie spowodowało jeszcze zmiany zdania. Osoby te bowiem były zbyt mocno przekonane o prawdziwości swoich intuicyjnych przekonań. Inni badani, równie pewni poprawności swoich intuicji, nie mogąc usunąć powstałej sprzeczności, nie umiając wskazać miejsca przybliżenia, starali się nawet podważyć prawdziwość rozważanego schematu, na przykład poprzez stwierdzenie, że „w ogóle jest on jakiś taki pokrętny”.

Pozostali studenci, analizując z kolei algorytm oparty na sumie nieskończonego ciągu lub szeregu geometrycznego ($a_1 = 0,9$; $q = 0,1$), uznali za przybliżoną właśnie jej równość liczbie $\frac{a_1}{1-q}$. Fakt, iż ta suma jest równa $\frac{a_1}{1-q}$ zapamiętali schematycznie. Zapomnieli, że suma nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) lub szeregu geometrycznego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ ($a = a_1$) jest granicą ciągu sum częściowych, czyli dokładnie takiego samego ciągu, jak rozważany w zadaniu. Sposobu obliczania granicy tego ciągu (jako równej 1) w żaden sposób nie kwestionowali. W czasie rozmów niektórym trudno było jednak dostrzec, iż suma nieskończonego ciągu lub szeregu geometrycznego jest równa granicy ciągu sum częściowych. Dla innych rozważania te były zbyt sformalizowane, by zupełnie podważyć intuicyjne przekonanie różnienia się liczb $0,999\dots$ i 1 .

Postrzegania przez studentów liczb $0,999\dots$ i 1 jako różniących się nie zmieniła także dyskusja o tym, że $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0,333\dots + 0,333\dots + 0,333\dots = 0,999\dots$ i $1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 0,333\dots + 0,666\dots = 0,999\dots$ oraz $1 = 9 \cdot \frac{1}{9} = 9 \cdot 0,111\dots$. Niektórzy uznali bowiem sumowanie składników $0,333\dots$ i $0,666\dots$ lub mnożenie liczby $0,111\dots$ przez 9 za dające wynik w przybliżeniu. Innym równości $\frac{1}{3} = 0,333\dots$, $\frac{2}{3} = 0,666\dots$ i $\frac{1}{9} = 0,111\dots$ wydawały się przybliżone, choć wcześniej nie uznawali ich za takie; teraz wskazywali nieskończony proces „dzielenia licznika przez mianownik” jako potwier-

dzenie nowego na nie spojrzenia. Co ciekawe, wcześniej podawali właśnie to, że $0,333\ldots$ „można otrzymać poprzez dzielenie jedynki przez trzy”, jako uzasadnienie prawdziwości równości $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$, a faktem, iż nie można postąpić podobnie w przypadku $0,999\ldots$ i 1, uzasadniali różnienie się tych liczb.

Fakt, iż rozważanego przekonania nie były w stanie zmienić zarówno znane studentom już wcześniej „schematy zamiany”, jak i opisane dyskusje, wynikał prawdopodobnie z tego, że zabiegi te odnosiły się do innej sfery myślowej — odpowiedzialnej za działania sformalizowane, nie oddziałującej najwyraźniej na intuicje. Interesujące jest, że badani byli bardziej skłonni zakwestionować, przyjmując „w przybliżeniu” te schematy, niż zmienić spojrzenie na swe intuicyjne przekonania.

Na zmianę tego typu przekonań prawdopodobnie mogą wpłynąć jedynie działania oparte na innych intuicyjnych wyobrażeniach. W czasie dyskusji z uczestnikami badań dobre efekty przyniosło odwołanie się do skojarzeń związanych z granicą ciągu. Było to na przykład wyobrażenie, iż „wyrazy ciągu dążą do, coraz mniej się różnią od $0,999\ldots$, a ta różnica staje się dowolnie mała” lub jego bardziej ogólna postać — przekonanie, że dzieje się tak poczynawszy od pewnego miejsca. Studenci wykorzystywali też bardziej precyzyjne skojarzenia, np.: „do dowolnego otoczenia liczby $0,999\ldots$ należą prawie wszystkie wyrazy ciągu”, „do dowolnego otoczenia liczby $0,999\ldots$, czy też pasa rysowanego wokół prostej $y = 0,999\ldots$, poczynawszy od pewnego miejsca, wpadają wszystkie wyrazy” lub też „dla każdego otoczenia liczby $0,999\ldots$ można wskazać taką liczbę naturalną n_0 , że dla wszystkich liczb naturalnych większych od niej wartości ciągu należą do tego otoczenia liczby $0,999\ldots$ ”. Odwołanie się do takich wyobrażeń w czasie rozmów pozwoliło im dostrzec, iż liczba $0,999\ldots$ jest granicą rozważanego ciągu. To z kolei, w połączeniu z przekonaniem, że granicą jest również liczba 1 i świadomością jednoznaczności granicy, umożliwiło większości z nich zaakceptowanie tego, iż liczby $0,999\ldots$ i 1 są po prostu równe, a nie tylko w przybliżeniu.

Jednak niektórym osobom również te wyobrażenia nie umożliwiły uzmysłowienia sobie analizowanej równości. Co prawda, pod wpływem tych skojarzeń wydawało im się, że zarówno $0,999\ldots$, jak i 1 jest granicą rozważanego ciągu. Sądziły jednak, że pierwsza z tych liczb jest granicą, ponieważ „kolejne wyrazy zbliżają się do $0,999\ldots$, aż wreszcie ją osiągną”, druga — gdyż „kolejne wyrazy dążą do 1, ale jej nie osiągną”. Niezwykłe jest to, że powstała sprzeczność z jednością granicy usunęły, przyjmując jednoznaczność granicy z „nie-skończenie małą” dokładnością. Intuicyjne przekonanie, że liczby $0,999\ldots$ i 1 różnią się, było więc tak silne, iż spowodowało podważenie jednego z najistotniejszych faktów w teorii granic. Po dyskusji o tym, czy wyrazy „osiągają” liczbę $0,999\ldots$, tylko część studentów stwierdziła, że tak nie jest, gdyż „wtedy

0,999... musiałoby być ostatnią wartością, co nie jest możliwe, ciąg bowiem jest nieskończony". Innym wciąż wydawało się, iż „gdzieś w nieskończoności wyrazy osiągają 0,999... , a 1 nie”, choć jedynka też była dla nich granicą w nieskończoności.

Na niedostrzeganie sprzeczności obu przytoczonych ostatnio stwierdzeń mógł wpłynąć, co wynikało z rozmowy z jednym z badanych (zob. załącznik 2), przyswojony w czasie studiów fakt istnienia różnych liczb kardynalnych nieskończonych. Student bowiem wyciągnął z tego faktu wniosek o istnieniu różnych rodzajów nieskończoności i opierając się na nim, przeprowadził dość misterne i przekonujące rozumowanie. Liczbę 0,999... postrzegał on jako „umowny ostatni wyraz ciągu, znajdujący się w nieskończoności typu $\aleph_0$, bo przecież mówimy o ciągu, a tak wiele jest liczb naturalnych, więc i odpowiadających im wyrazów”. Jedynekę postrzegał natomiast jako większą od każdego z wyrazów rozważanego ciągu. Wartości do niej dążyły, ale jej nie osiągały. Była ona, jego zdaniem, granicą „w większej nieskończoności” — „typu continuum”. Doprowadzenie do uświadomienia sobie przez studenta niepoprawności tych wyobrażeń nie było łatwe. Umożliwiło to dopiero dostrzeżenie w toku dyskusji, iż skojarzenia te prowadzą do sprzeczności z niepodważalną dla niego gęstością zbioru liczb rzeczywistych.

Zarówno przedstawione rozważania, jak i zamieszczony w załączniku fragment rozmowy, pokazują, jak trudno jest intuicyjne przekonania korygować i do jak ewidentnej sprzeczności musi dojść badany, by dostrzec niepoprawność takich przekonań. Nie znaczy to oczywiście, że należy unikać tworzenia się intuicji, wręcz przeciwnie, ich kształtowanie wydaje się konieczne²⁴. Bez rozmaitych skojarzeń, wyobrażeń i intuicyjnych przekonań powstanie operatywnego obrazu któregośkolwiek z poznawanych pojęć wydaje się mało prawdopodobne. Ważne jest jednak podejmowanie działań mających na celu kształtowanie skojarzeń zgodnych ze znaczeniem tych pojęć i jednocześnie umożliwiających zapobieganie tworzeniu się niewłaściwych przekonań i korygowanie niepoprawnie ukształtowanych. Wskazując tak wiele nieprawidłowych skojarzeń, wyobrażeń i intuicyjnych przekonań, chciałam zwrócić uwagę na mogące się pojawić trudności, w których pokonaniu trzeba pomóc zarówno uczniom jak i studentom.

4 Umysły wizjonerskie

Kolejna kwestia, którą chcę poruszyć, dotyczy szczególnej grupy badanych osób — tych najzdolniejszych. Wydaje się oczywiste, że struktury poznawcze tych studentów były najlepiej rozwinięte. Rzeczywiście zazwyczaj tak było. Za-

²⁴Zob. m.in. (Krygowska, 1977, s. 29), (Steinhaus, 1998), (Thom, 1974, s. 119).

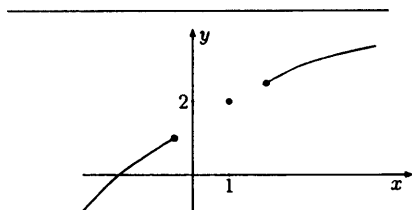
skakujące jest jednak, że właśnie wśród tych osób były również takie, które wytworzyły niezwykle, bardzo skomplikowane, ale i równie niepoprawne „teorie”; należał do nich także student, którego przekonania przedstawiono w omówionym już załączniku 2. W porównaniu z innymi niepoprawnymi skojarzeniami ujawnionymi w czasie badań „teorie” te miały bardzo zwartą strukturę, a ich autorzy z dużą stanowczością ich bronili. Ustalenia te i osobliwy charakter przekonań każe upatrywać źródeł powstania tych skojarzeń w specyficznych właściwościach umysłów ich twórców. W określeniu tych przyczyn pomocne mogą być prace dotyczące psychologicznych typów intelektu (zob. np. Dobrowolowicz, 1995, s. 141-147; Próchnicka, 1991, s. 59-63). Do posiadaczy skrajnych typów zaliczono w przytoczonych książkach z jednej strony „racjonalistów”, z drugiej „intuicjonistów” oraz „fantastów-wizjonerów”. Jako podstawową cechę tych ostatnio wymienionych wskazano skłonność do pomysłów oryginalnych i zaskakujących, choć nierzadko niepoprawnych. Być może do nich należą również zdolni studenci budujący misterne, aczkolwiek odległe od znaczenia pojęcia, „teorie”. Według autorów wspomnianych prac omawiany typ umysłu w przypadku naukowców bywa bardzo twórczy. Niezbędna jest jednak świadomość konieczności i umiejętność weryfikacji własnych poglądów, czego zwykle brakuje uczniom i studentom. Tych bardzo zdolnych czasem gubi też pewność siebie i wiara we własne możliwości, choć cechy te są przecież korzystne w twórczej działalności. Zachwyt wywołany nagłym olśnieniem nie pozwala im jednak dostrzec błędów, a nadmierna pewność siebie każe z uporem bronić swoich przekonań. Niepoprawnie ukształtowane skojarzenia może podważyć jedynie dostrzeżenie bardzo ewidentnej sprzeczności.

Interesujące jest to, że umysły wizjonerskie działają podobnie już u uczniów. Ich wytwory ujawniono także w badaniach z osobami rozpoczynającymi studia. Jako przykład może służyć przekonanie o możliwości istnienia wielu granic funkcji przy x dążącym do jednego punktu x_0 . Student, analizując dane w zadaniu wykresy²⁵ tak opisał swój sposób ustalania granicy funkcji przedstawionej na rysunku 1: „Zaczynam patrzeć na *iksy* od $-\infty$, a potem od $+\infty$, nie muszą one należeć do dziedziny, dążę w kierunku 1 [przesuwa ołówek po wykresie], aż napotkam punkt graniczny, ten koniec wykresu, to będzie jakieś powiedzmy 1 dla $x = -\frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$. Dalej dążę do 1, ale tu już nie ma x -ów z dziedziny, dopiero $x_0 = 1$. Ale ponieważ nie ma x -ów z dziedziny

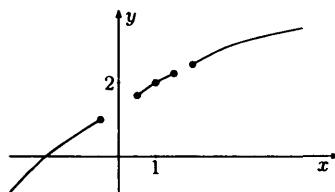
²⁵Treść rozwiązywanego zadania była następująca: Wiemy, że granica funkcji w punkcie $x_0 = 1$ jest równa 2. Czy wykres tej funkcji może być taki jak na podanym rysunku? Wszystkie wykresy rozważane przez osoby rozpoczynające studia zamieściłam w książce (Przeniosło, 2000, s. 19-20). W tym tekście przedstawię jedynie dwa konieczne do zilustrowania analizowanego problemu, oznaczając je na użytek artykułu jako 1 i 2. Student bowiem ujawnił omawiane przekonania rozważając wykresy:

blisko x_0 , więc 2 nie jest granicą przy x dążącym do 1, jest tylko granicą w tym punkcie. Potem dążę do 1 od $+\infty$ i podobnie dostaję drugą granicę przy x dążącym do x_0 , to jest $\lim_{x \rightarrow 1} 1 = 2\frac{1}{2}$, bo tu będzie też punkt graniczny, jakies $2\frac{1}{2}$ dla $x = 2$ ". Warto dodać, że student, zapytany, stwierdził, iż „granice przy x dążącym do $-\frac{1}{2}$ też są równe 1 i $2\frac{1}{2}$, ale gdyby funkcja nie była określona dla $x = 2$, to wtedy $2\frac{1}{2}$ nie byłoby granicą”; uznając przy tym liczby $-\frac{1}{2}$ i 2 za końce „skrajnych” przedziałów zawartych w dziedzinie, a 1 i $2\frac{1}{2}$ za odpowiadające im wartości. Analizując rysunek 2, wskazał, rozumując w podobny sposób, oprócz granic podanych w odniesieniu do wykresu 1, jeszcze $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$. Zapytany o punkty o pierwszych współrzędnych będących końcami przedziału, do którego należy x_0 , określone przez niego jako $(\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2})$ oraz $(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$, stwierdził, że „to nie są punkty graniczne, nie będzie granic, bo *iksy* należą do przedziału, który otacza x_0 , byłyby gdyby gdzieś jeszcze przed x_0 były przerwy w wykresie”. Chodziło mu o sytuację, gdyby dziedziną funkcji był na przykład zbiór $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \cup (\frac{4}{5}, 1\frac{1}{6}) \cup (1\frac{1}{5}, 1\frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$. Wtedy granicami miały być, oprócz liczb wskazanych w odniesieniu do rysunku 2 i wspomnianych wyżej $1\frac{1}{2}$ i $2\frac{1}{3}$, jeszcze wartości dla argumentów równych $\frac{3}{4}$ i $1\frac{1}{5}$. Miało tak być w związku z pojawieniem się dwóch nowych punktów granicznych $(\frac{3}{4}, f(\frac{3}{4}))$, i $(1\frac{1}{5}, f(1\frac{1}{5}))$. W podobny sposób student ustalał granice innych rozważanych w zadaniu funkcji. Z przytoczonych wypowiedzi wynika także, iż wyróżniał on dwa pojęcia granicy funkcji: opisaną już granicę przy x dążącym do x_0 i granicę w punkcie x_0 — równą wartości²⁶.

Z rozmowy wynikało, że opisanie postrzeganie granicy przy x dążącym do x_0 wiązało się ze sposobem rozumienia przez studenta samego zwrotu „ x dąży do x_0 ”. Interpretował on bowiem ten zwrot w następujący sposób: gdy x dąży do $-\frac{1}{2}$, to dąży też do 1. Takie skojarzenie i jego degenerujące konsekwencje ujawniono również u innych badanych osób (wspominano już o tym). Wyobrażenia tego studenta mają jednak wszelkie opisane cechy wytworu umysłu wizjonerskiego. Charakter tych skojarzeń jest też na tyle osobliwy, że trudno podejrzewać, iż ich źródłem były jakieś zabiegi dydaktyczne podejmowane przez nauczycieli lub autorów podręczników, mające na celu przybliżenie uczniom



rys. 1.



rys. 2.

²⁶Szerzej skojarzenia studenta — zob.: (Przeniosło 2000, s. 75-77, 100-101, 124-126).

znaczenia granicy funkcji, czy nawet sama „natura” pojęcia. Przyczyn powstania takich wyobrażeń trzeba więc raczej upatrywać właśnie w wizjonerskich właściwościach umysłu ich twórcy.

W szkole skojarzenia te nie zostały ujawnione prawdopodobnie dlatego, że nie rozważano podobnych sytuacji w toku dyskusji; rozwiązywane zadania były zbyt jednostronne. Uczeń, poszukując sensu pojęcia granicy, stworzył własną „teorię”, pomijając przy tym fakt jednoznaczności granicy, niestety lekcje matematyki nie umożliwiły mu jej weryfikacji. Standardowe zadania rozwiązywał zapewne poprawnie, a nauczyciel nie podejrzewał, że zdolny uczeń może mieć tak zaskakująco niepoprawne skojarzenia. Ze względów dydaktycznych ważna jest więc świadomość, że zdolnych uczniów i studentów stać nie tylko na pomysły niezwykle twórcze, ale i na te zaskakująco niepoprawne.

5 „Schematyści”

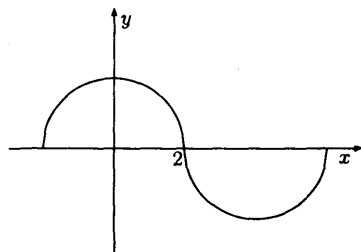
Algorytmy postępowania w określonych sytuacjach są oczywiście ważnym i konstruktywnym elementem obrazu każdego pojęcia. Spełniają one taką rolę tylko wtedy, gdy wykorzystywanie schematów nie blokuje myślenia pojęciowego. Niestety, niekorzystne skutki posługiwania się algorytmami obserwowano w różnych sytuacjach u wielu studentów. W toku badań ujawniono ponadto grupę osób, dla której schematy miały szczególne znaczenie. Obrazy przyswajanych pojęć studenci bowiem tworzyli niemal wyłącznie w postaci zbioru procedur postępowania w różnych sytuacjach. Wszystkie nowe informacje „przerabiali” na takie właśnie schematy i dopiero wtedy dołączali do obrazu. Były to zarówno poprawne procedury postępowania, jak i wiele zdegenerowanych, a nierzadko swoistych i wzajemnie sprzecznych. Na każdy rozważany problem patrzyli przez pryzmat posiadanych schematów. Była to dla nich już nie tylko strategia rozwiązywania zadań²⁷, ale istota tworzenia struktur poznawczych.

Interesujące jest to, że zarówno w przypadku osób rozpoczynających, jak i kończących studia, rozważany problem dotyczył podobnego procentu badanych (odpowiednio 16% i 13%). Było tak mimo, iż obie grupy osób tylko częściowo pokrywały się — około 40% studentów brało udział w badaniach na początku i końcu studiów. Nasuwa to przypuszczenie, iż przyczyn budowania struktur poznawczych w opisany sposób trzeba znów upatrywać w specyficznych właściwościach umysłów ich twórców. W przytoczonych wcześniej pracach dotyczących psychologicznych typów intelektu trudno jednak

²⁷Na powszechność strategii „przyporządkowanego schematu” wskazują m.in. autorzy pracy (Ciosek, 1974).

znaleźć odpowiedni typ. Zestawienie to bowiem dotyczy wybitnych umysłów, a wyróżniony tu typ jest charakterystyczny dla nienajzdolniejszych uczniów i studentów.

Sposób postępowania studentów najlepiej wyjaśni kilka przykładów zachowań. Obserwując wykresy, niektórzy dostrzegali na nich — jak mówili — „znane” funkcje i na podstawie informacji o tych funkcjach ustalali własności, granice, a nawet ciągłość i pochodną. Za znane uznawali zarówno funkcje elementarne, jak i te kojarzone z pewną własnością. Przykładem drugiego typu jest identyfikowanie granicy równej 1 przy x dążącym do $+\infty$ z krzywą zbliżającą się monotonicznie i nieograniczenie do asymptoty $y = 1$, lub ewentualnie zrównującą się z tą prostą od pewnego miejsca. Studenci postępowali tak, mimo iż w istocie nie były to wykresy takich funkcji. Na przykład pytani o istnienie pochodnej w punkcie $x_0 = 2$ funkcji przedstawionej na rysunku 3 niektórzy stwierdzali, że „to wykres funkcji $y = \cos x$, więc $y'(2) = -\sin 2$ ”. Postępowali tak, choć wyraźnie było powiedziane, że $x_0 = 2$ jest punktem przecięcia krzywej z osią x -ów i choć oczywiście sam kształt wykresu — dwa półokręgi, różni się od $y = \cos x$. Zapamiętywali więc tylko „przybliżony” kształt wykresów w postaci schematycznego obrazka. Badani nie potrafili natomiast ustosunkować się do rysunków, z których „nie wiadomo, jakiej funkcji jest to wykres”.



rys. 3.

Z kolei w odniesieniu do funkcji określonych za pomocą dwuczłonowych wzorów charakterystyczny był na przykład taki sposób obliczania granicy: „jak jest klamra, to liczę granicę najpierw z jednego wzoru, potem z drugiego, jeśli wyjdą takie same, to ma granicę, gdy różne, to nie ma”. W takiej formie studenci stosowali ten schemat zarówno do ciągów, jak i innych funkcji, do punktów $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz będących plus lub minus nieskończonością. Niektórzy podobnie postępowali również w odniesieniu do kilkuczłonowych określeń funkcji. Nierzadko badani wykorzystywali analogiczny schemat do ustalania ciągłości i pochodnej w punkcie x_0 .

Jako schematy funkcjonowały także na przykład skojarzenia utożsamiające granicę funkcji w punkcie x_0 z wartością w x_0 . Niektórzy badani odnosili takie przekonanie tylko do sytuacji, gdy wykres „składał się z samych oddzielnych punktów”, tzn. wszystkie elementy dziedziny były jej punktami izolowanymi. Inni stosowali to skojarzenie do każdego x_0 będącego takim punktem. Podobne przekonanie odnoszono także do funkcji opisanych za pomocą dwuczłonowych wzorów i punktów x_0 postrzeganych jako „oddzielone”, przy czym

nazwą tą określano każdy punkt, gdy któraś z części wzoru odnosiła się tylko do tego jednego argumentu. W przypadku niektórych studentów takie przekonanie było skutkiem mechanicznego rozszerzenia zakresu stosowania powszechnie używanego schematu: „granica funkcji stałej jest równa tej stałej”. Z kolei ten schemat był zapewne konsekwencją pierwotnego (ukształtowanego jeszcze w szkole) utożsamiania funkcji stałej z prostą równoległą do osi argumentów. Studenci prawdopodobnie skorygowali ostatnio wymienione przekonanie, nie zmieniając jednak skojarzenia dotyczącego granicy funkcji stałej albo nie zastanawiali się nad jego sprzecznością ze schematem odnoszonym do granicy w punkcie „oddzielonym”.

Wiele algorytmów dotyczyło „typowych” funkcji opisanych wzorem, powstałych na podstawie zdobywanych doświadczeń. Były wśród nich na przykład standardowe schematy obliczeniowe, również odnoszące się do własności poznawanych pojęć i twierdzeń z nimi związanych. Nierzadko schematy te były zdegenerowane, na przykład dla części studentów twierdzenia dotyczące działań arytmetycznych na granicach przyjęły formę uwzględniającą jedynie tezę: „granica sumy jest równa sumie granic”.

Uwagi końcowe

W toku prowadzonych badań dość wyraźnie uwidoczniły się też wpływy często opisywanych przeszkód epistemologicznych związanych z procesem poznawania podstawowych pojęć analizy matematycznej²⁸. Dotyczyło to szczególnie rozumienia nieskończoności — wspomnianego już, postrzegania jej jako istniejącej jedynie potencjalnie, a nie aktualnie albo traktowania jej jako bardzo dużej liczby lub też stosowania do wielkości nieskończenie małych i nieskończenie dużych praw zachodzących tylko dla tych skończonych. W przypadku pojęcia granicy wpływy przeszkód epistemologicznych uwidoczniły się szczególnie w odwoływaniu się do dążenia punktów wykresu, do „ruchu” po nim. Takie „dynamiczne” spojrzenie na granicę bowiem cechowało zarówno zachowania wielu matematyków na przestrzeni wieków, jak i badanych studentów. Większość osób rozpoczynających studia traktowała granicę funkcji jako własność globalną. Przejawiało się to w chęci „poruszania się” po wykresie bez odrywania ołówka od kartki, poczynając od „końców” tego wykresu, i dotarcia do punktu $(x_0, f(x_0))$ albo do „pustego kółeczka dla x_0 ”. U wielu osób kończą-

²⁸Zob. m.in. (Sierpińska, 1987, 1990, 1992); (Norman, 1994); (Pawlak, 1996). W rozpoznaniu trudności tkwiących w „naturze” rozważanych pojęć, mogących stanowić tego typu przeszkody, pomocne są prace opisujące proces określania tych pojęć przez matematyków na przestrzeni wieków. Wiele informacji na ten temat można znaleźć na przykład w książkach: (Boyer, 1974), (Grabiner, 1981).

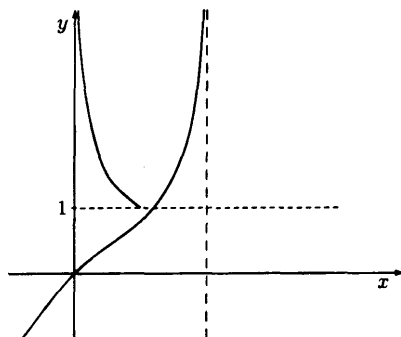
cych studia wpływy omawianej przeszkody epistemologicznej uwidoczniły się na przykład w przekonaniu, iż do istnienia w punkcie x_0 granicy konieczne jest istnienie, chociażby „niewyobrażalnie małego”, ciągłego w sensie intuicyjnym kawałka wykresu z obu stron x_0 . Przekonania te wiązały się z inną niepokonaną przez wielu badanych studentów przeszkodą epistemologiczną, którą było utożsamianie funkcji z krzywą. Wpływy tej przeszkody szczególnie często przejawiały się w niedostrzeganiu zależności między zachowaniem argumentów i wartości funkcji²⁹.

Wnioski przedstawione w artykule potwierdzają także badania, które obecnie prowadzę wśród uczniów i studentów, dotyczące już bezpośrednio każdego z pozostałych (oprócz granicy) podstawowych pojęć analizy matematycznej: funkcji, ciągu, nieskończoności, ciągłości funkcji, pochodnej oraz całki. Tworzenie struktur poznawczych głównie poprzez mechaniczne „dołączanie” nowych informacji dotyczyło wszystkich tych pojęć. Dostrzeżono także wiele, podobnych do opisanych, trudności związanych z tworzeniem i stosowaniem definicji, duże wpływy intuicyjnych przekonań i przeszkód epistemologicznych, wytwory umysłów wizjonerskich oraz skłonności do schematyzacji. Interesujące jest jednak, że w przypadku pojęcia pochodnej i całki budowanie obrazu w postaci zbioru schematów postępowania dotyczyło znacznie większej liczby osób, niż tylko tych, które można by zaliczyć do „schematystów”. W dużym stopniu wynikało to zapewne, jak wiele omówionych w artykule problemów, ze sposobu nauczania. Można więc przypuszczać, że podobne do ujawnionych trudności pojawiają się także podczas poznawania pojęć abstrakcyjnych spoza analizy matematycznej. Pokonanie tych trudności przez uczniów i studentów wydaje się możliwe jedynie poprzez umożliwienie im odkrycia sensu każdego z pojęć w procesie tworzenia skojarzeń coraz bliższych temu znaczeniu. Do tego konieczne jest poznanie mogących się pojawić skojarzeń, wyobrażeń i intuicyjnych przekonań, co mogą umożliwić tylko bardzo drobiazgowo badania.

²⁹Trudności związane z istnieniem obu ostatnio wspomnianych przeszkód wyraźnie pokazuje rozmowa zamieszczona w załączniku 1.

Załącznik 1³⁰

- N: Spójrzmy może w takim razie na rysunek b, czy tu można uzupełnić ten fragment wykresu funkcji tak, żeby granica funkcji, którą otrzymamy była równa 1, przy x dążącym do $+\infty$?
- S: Nie tu już wykres dąży do $+\infty$, chociaż [zastanawia się] może tak [dorysowuje — patrz rys. 4].



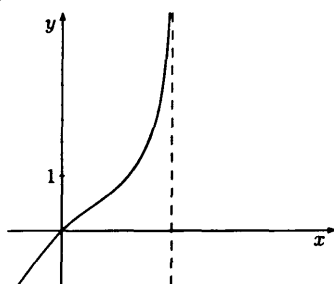
rys. 4.

N: Ale to granica przy x dążącym do $+\infty$ ma być równa 1.

S: Hm [zastanawia się].

N: A poza tym, czy to jest wykres funkcji, czy każdemu argumentowi od-

³⁰Treść zadania, o którym rozmowę przedstawiono w załączniku, była następująca: Uzupełnij, jeśli to możliwe (gdy jest to niemożliwe, wyjaśnij dlaczego), wykres funkcji f w taki sposób, aby $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. W zadaniu znajdowało się kilka wykresów (można je znaleźć w pracy: Przeniosło, 2000, s. 20-21), tu podam jedynie ten, którego dotyczy fragment rozmowy umieszczony w załączniku 1, czyli rysunek b. Był on następujący:



powiada tylko jedna wartość [już o tym rozmawialiśmy]?

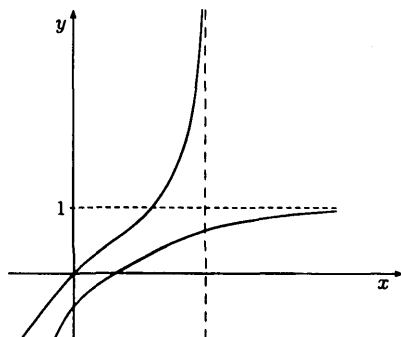
S: No, nie.

N: To może inaczej można uzupełnić?

S: Może tak jak w a.

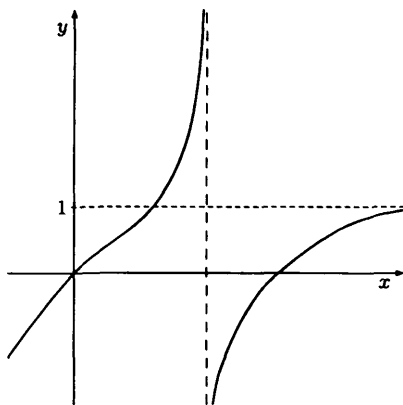
N: Niech pani narysuje, może tu na tym czystym teście.

S: [Rysuje — rys. 5, zastanawia się] Ale tu znowu jest podwójny ten wykres [zastanawia się].



rys. 5.

N: To może, mam chyba jeszcze jeden czysty wykres, o może tylko tu [rysuję — rys. 6]. Czy wtedy jest dobrze, czy granica tej funkcji przy x dążącym do $+\infty$ jest równa 1?



rys. 6.

- S: [Zastanawia się] Znaczy tylko dla tej nowej funkcji wartości zbliżają się do 1 [pokazuje dorysowaną krzywą] a dla tej co była to nie, tutaj już wykres dąży do $+\infty$. No może jeszcze od $-\infty$ do tego punktu [zaznacza punkt przecięcia wykresu z asymptotą $y = 1$ — patrz rys. 6] granica będzie jeden.
- N: Ale pamiętajmy, że chcemy, by 1 była równa granica przy x dążącym do $+\infty$.
- S: No tak dążymy od $-\infty$ do $+\infty$ [„porusza się” po wykresie od jego „lewego końca” do zaznaczonego punktu] najpierw do tego punktu, a potem dalej.
- N: Ale tak jak pani chce dążyć, to moglibyśmy też od $-\infty$ do punktu $(0,0)$ [pokazując]. Czy to oznacza, że granica przy x dążącym do $+\infty$ jest równa zero?
- S: [Zastanawia się]
- N: Albo dążąc tak dalej do tego punktu, dla x powiedzmy $\frac{1}{2}$ [zaznaczam punkt o drugiej współrzędnej $\frac{1}{2}$]. Czy to oznacza, że granica przy x dążącym do $+\infty$ jest równa $\frac{1}{2}$?
- S: [Zastanawia się] No, nie jest.
- N: A pani zaznaczając ten punkt [pokazuje zaznaczony przez nią punkt o drugiej współrzędnej równej 1] wskazała, że 1 jest równa granica przy x dążącym do jakiego x_0 , niech pani go zaznaczy.
- S: [Zastanawia się]
- N: Wartości dążą, coraz mniej się różnią od 1, gdy x dąży do? [Zaznaczam kilka wartości i odpowiadających im argumentów]
- S: [Zastanawia się]
- N: [Zaznaczam na osi argumentów x_0 , takie że $f(x_0) = 1$] Gdy argumenty, *iksy* dążą, coraz mniej się różnią od takiego x_0 , to wartości dążą do 1, czy tak?
- S: No, tak.
- N: A tutaj, gdzie jest ta asymptota pionowa, też jest jakieś skończone x np. równe 2?
- S: [Zastanawia się] Jest.
- N: To jest asymptota pionowa o równaniu $x = 2$, a nas interesuje granica przy x dążącym do $+\infty$.

S: No, ale tu wykres dąży do $+\infty$.

N: Ale czy dla x dążącego do $+\infty$, czy dla x dążącego do 2?

S: [Zastanawia się]

N: Popatrzmy tylko na to, co już było na rysunku w zadaniu. Taki x [zaznaczam $0 < x < 2$] taka wartość, taki x [zaznaczam bliższy 2] jaka wartość?

S: Taka [zaznacza].

N: Taki x [jeszcze bliższy 2] jaka wartość?

S: Taka.

N: Gdy x dąży, coraz mniej się różni od 2, to co dzieje się z wartościami?

S: [Zastanawia się] Rosną [zastanawia się] dążą do $+\infty$.

N: Czyli ten fragment wykresu oznacza, że granicą jest $+\infty$, gdy x dąży do?

S: [Zastanawia się] Do dwa z lewej strony.

N: A nas interesuje granica przy x dążącym do $+\infty$.

S: Tak.

N: Czy musimy brać pod uwagę *iksy* od $-\infty$, wszystkie *iksy* z dziedziny?

S: [Zastanawia się] Chyba musimy.

N: A co to dla pani jest nieskończoność?

S: To bardzo, bardzo dużo, nigdy się nie kończy.

N: A co dla pani znaczy x dąży do nieskończoności?

S: Jest coraz większy i większy, bardzo, bardzo duży i coraz większy.

N: Gdy zatem bada pani granicę przy x dążącym do $+\infty$, jakie *iksy* bierze pani po uwagę?

S: Coraz większe i większe, bardzo duże.

N: Czy można się zatem ograniczyć do rozpatrywania x -ów większych od powiedzmy dziesięciu, czy stu, do tych bardzo dużych?

S: [Zastanawia się]

N: A może pani pamięta, jaka jest granica funkcji $y = \frac{1}{x}$ przy x dążącym do $+\infty$?

S: Do $+\infty$, to będzie $\frac{1}{+\infty}$, czyli zero.

N: A niech pani narysuje wykres tej funkcji.

S: To tak [rysuje].

N: Powiedziała pani, że granica przy x dążącym do $+\infty$ jest równa zero.

S: Tak.

N: A co z tym fragmentem wykresu z tą dolną hiperbolą, czy pani zdaniem ona ma wpływ na granicę przy x dążącym do $+\infty$?

S: [Zastanawia się] No, nie ma.

N: Chociaż tutaj ten wykres ucieka do $-\infty$?

S: No, tak.

N: Ale dzieje się tak dla x dążących do?

S: Do zera.

N: To co, czy mówiąc o granicy takiej funkcji [rys. 6] przy x dążącym do $+\infty$, musi nas interesować także ten stary kawałek [z rysunku b]?

S: [Zastanawia się] W takim razie chyba nie musi.

N: To można tak dorysować, że wtedy granica przy x dążącym do $+\infty$ jest równa 1?

S: [Zastanawia się] Teraz wydaje mi się, że można.

Załącznik 2

N: Napisał pan, że liczba $0,999\dots$ jest granicą tego ciągu.

S: Tak, ponieważ od pewnego miejsca kolejne wyrazy, tu nawet wszystkie, zbliżają się, coraz mniej się różnią od niej, aż wreszcie ją osiągną.

N: Aha, napisał pan również, że liczba 1 jest granicą tego ciągu.

S: Tak, bo wyrazy dążą do 1, ale jej nie osiągną.

N: I napisał pan, że jednak te liczby się różnią, a tylko przyjmuje się, że są równe.

S: Tak właśnie, $0,999\dots$ jest takim umownym ostatnim wyrazem tego ciągu w nieskończoności typu alef zero [pisze jednocześnie symbol: $\aleph_0$], bo przecież mówimy o ciągu, a tak wiele jest liczb naturalnych, więc i odpowiadających im wyrazów. Jeden jest natomiast granicą w [zastanawia się], nie wiem jak to poprawnie powiedzieć.

N: Proszę powiedzieć tak jak pan myśli, własnymi słowami.

- S: No to można powiedzieć, że w większej nieskończoności, no chyba można tak, bo alef zero jest mniejsze od continuum.
- N: Aha.
- S: 1 jest granicą w nieskończoności typu continuum.
- N: A co z jedynością granicy?
- S: No najwyraźniej jednoznaczność granicy określona jest z pewną nieskończeniem małą dokładnością, którą się pomija, przyjmując, że $0,999\dots$ jest równe 1.
- N: Granicę ciągu ustalamy przy n dążącym do nieskończoności.
- S: Tak.
- N: A co to dla pana znaczy, że n dąży do nieskończoności?
- S: Jest coraz większe i większe, dowolnie duże.
- N: Aha, z tego co pan przed chwilą powiedział wynika, że są różne rodzaje tej nieskończoności, inna dla liczb naturalnych, inna dla liczb rzeczywistych?
- S: Tak właśnie.
- N: Czyli liczby naturalne w nieskończoności kończą się wcześniej niż rzeczywiste?
- S: [Zastanawia się]. Z tego tak wynika, alef zero jest mniejsze od continuum.
- N: A czy nie jest tak, że zawsze można znaleźć liczbę naturalną większą od wskazanej rzeczywistej?
- S: Tak, ale w skończoności.
- N: A co z granicą dowolnej funkcji przy x dążącym do nieskończoności, czy to granica w innej nieskończoności niż granica ciągu?
- S: [Zastanawia się]. Tak w nieskończoności typu continuum.
- N: Ale ciąg to też funkcja?
- S: Tak, ale szczególna o dziedzinie naturalnej [zastanawia się] i właśnie dlatego można mówić o granicy w nieskończoności typu alef zero i continuum.
- N: Aha, to porozmawiajmy o tych typach nieskończoności, co to jest alef zero?
- S: Moc zbioru liczb naturalnych, czyli można powiedzieć, że tyle ich jest.

Ale dokładnie mówiąc [zastanawia się], to klasa abstrakcji względem relacji równoliczności, czyli jest to też moc wszystkich zbiorów nieskończonych z nim równolicznych, jednym słowem [zastanawia się] wszystkich nieskończonych przeliczalnych.

N: Uhm, a continuum?

S: To moc zbioru liczb rzeczywistych, a on niewątpliwie jest nieprzeliczalny.

N: Powiedział pan, że $0,999\dots$, to taki ostatni wyraz rozważanego ciągu.

S: Tak, taki umowny w nieskończoności, ale tej typu alef zero.

N: Skoro ostatni, to dla ostatniej liczby naturalnej, tej umownej, jak pan to określił, w nieskończoności.

S: Tak, właśnie.

N: A 1 jest większe od $0,999\dots$

S: Jest.

N: Więc między 1 i $0,999\dots$ jeszcze coś jest?

S: [Zastanawia się].

N: Z tego co pan powiedział wynika, że nie ma wyrazów ciągu.

S: To na pewno.

N: Więc co jest?

S: [Zastanawia się].

N: Powiedział pan, że 1 jest granicą tego ciągu w, jak pan to ujął, w większej nieskończoności.

S: Tak typu continuum.

N: To znaczy, że między $0,999\dots$ i 1 są jakieś liczby rzeczywiste, które nie są wyrazami tego ciągu?

S: [Zastanawia się].

N: A jeśli są, to czemu któreś z nich nie przyjąć jako tej większej, nazwijmy ją, granicy, tylko akurat jedynekę?

S: [Zastanawia się]. No tak wyrazy też dążyłyby do takiej liczby, ale jej nie osiągały [zastanawia się].

N: Aha, no to co z tego wynika?

S: [Zastanawia się]. Że nie ma innych liczb pomiędzy $0,999\dots$ i 1 [zasta-

nawia się].

N: I 1 jest większe od 0,999...?

S: Tak.

N: I 0,999... to jest pewna liczba rzeczywista?

S: No musi być rzeczywista [zastanawia się]. A z tego wynika [ze zdziwieniem], że zaprzeczyłem ciągłości, a nawet już gęstości zbioru liczb rzeczywistych, między dwiema liczbami rzeczywistymi zawsze można znaleźć trzecią.

N: A co z tego wynika odnośnie liczb 0,999... i 1?

S: Pozostała tylko jedna możliwość, że są dokładnie równe [ze śmiechem].

N: Właśnie, zastanówmy się jeszcze, mówiliśmy o tym przed chwilą, nad tymi nieskończonościami w kontekście granicy ciągu, co to znaczy n dąży nieskończoności?

S: [Zastanawia się]. Jest coraz większe i większe, dowolnie, nieskończenie duże.

N: No i jak to by było z tymi nieskończonościami, ta dla liczb naturalnych, gdy n dąży do nieskończoności, to by się kończyła wcześniej, niż gdy x rzeczywiste dąży do nieskończoności?

S: [Zastanawia się]. No tak jakoś mi się wydawało, może za długo się nad tym zastanawiałem i przefilozofowałem albo raczej to było fałszywe olśnienie, bo to przecież nie ma sensu, bo rzeczywiście od każdej rzeczywistej [ze śmiechem] znajdę większą naturalną.

N: Na przykład jaką?

S: [Zastanawia się].

N: Jeśli tą liczbą rzeczywistą jest a , to np. część całkowita a plus 1 [jednocześnie pisze: $[a] + 1$], może być?

S: No właśnie, to stary numer [ze śmiechem]. Jakoś za bardzo wydawało mi się, że te liczby się różnią, i dorobiłem sobie teorię. A te moce zbiorów liczb naturalnych i rzeczywistych, które przecież co innego oznaczają, a continuum jest większe od alef zero, chociażby dlatego, że między dwiema liczbami naturalnymi jest nieskończenie wiele liczb rzeczywistych, ale te moce były taką dobrą pożywką. Najdziwniejsze, że już po tym teście też się nad tym zastanawiałem i wydawało mi się, że to prawda, że to świetny pomysł. No, ale paradoksy chyba zawsze bywają chwytnie [ze śmiechem].

N: Właśnie dlatego są paradoksami, najważniejsze, żeby dostrzec, że nimi są.

Literatura

- A j d u k i e w i c z, K.: 1985, *Język i poznanie, t. II, Wybór pism z lat 1945-1963*, PWN, Warszawa.
- A n u s i a k, J.: 1993, *Matematyka. Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum. Klasa II*, wyd. 3, WSiP, Warszawa.
- A r t i g u e, M.: 1986, The notion of differential for undergraduate students in the sciences, w: *Proceedings of the Tenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, London, 229-234.
- B o y e r, C. B.: 1974, *Historia rachunku różniczkowego i całkowego*, PWN, Warszawa.
- B r u n e r, J. S.: 1978, *Poza dostarczone informacje. Studia z psychologii poznania*, PWN, Warszawa.
- C i o s e k, M., K r y g o w s k a, Z., T u r n a u, S.: 1974, Strategie rozwiązywania zadań matematycznych jako problem dydaktyki matematyki, *Rocznik Naukowo-Dydaktyczny WSP w Krakowie, Prace z dydaktyki matematyki*, 5-41.
- C o r n u, B.: 1983, *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles, thèse de troisième cycle*, L'Université Scientifique et Médicale de Grenoble.
- D a v i s, R. B., V i n n e r, S.: 1986, The notion of limit; Some seemingly unavoidable misconception stages, *The Journal of Mathematical Behavior* 5, 281-303.
- D o b r o ł o w i c z, W.: 1995, *Myśleć intuicyjnie*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa.
- D r e y f u s, T., V i n n e r, S.: 1982, Some aspects of the function concept in college students and junior high school teachers, w: *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Universitaire Installatie Antwerpen, 12-17.
- D u b i n s k i, E.: 1992a, A learning theory approach to calculus, w: *Symbolic Computation in Undergraduate Mathematics Education, MAA Notes 24*, Washington, 43-55.
- D u b i n s k i, E., H a r e l, G.: 1992b, The nature of process conception of function, w: *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA Notes 25*, Washington, 195-213.

- Ehrenfeucht, A., Stande, O.: 1988, *Algebra dla klasy II liceum ogólnokształcącego, liceum zawodowego i technikum*, wyd. 18, WSiP, Warszawa.
- Ervinck, G.: 1981, Conceptual difficulties for first year university students in the acquisition of the notion of limit of a function, *Proceedings of the Fifth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Berkeley, 330-333.
- Even, R.: 1990, Subject matter knowledge for teaching the case of function, *Educational Studies in mathematics* 21, 521-544.
- Ferrini-Mundi, J., Graham, K.: 1994, Research in calculus learning: understanding of limits, derivatives and integrals, w: *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning, MAA Notes 33*, Washington, 31-45.
- Fischbein, E., Tirosh, D., Hess, P.: 1979, The intuition of infinity, *Educational Studies in Mathematics* 10, 3-40.
- Goldin, G. A.: 1990, Epistemology, constructivism, and discovery learning in mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education, Monograph number 4 — Constructivist views on the teaching and learning of mathematics*, 31-47.
- Grabiner, J. V.: 1981, *The origins of Cauchy's rigorous calculus*, The MIT Press, Cambridge.
- Harel, G., Tragalowa, J.: 1996, Higher mathematics education, w: *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 675-700.
- Hebda, B.: 1989, Rozumienie różniczkowania przez studentów i uczniów, *Dydaktyka Matematyki* 10, 51-67.
- Krygowska, Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 2*, WSiP, Warszawa.
- Molenda, A.: 1996, Pewne pojęcia analizy matematycznej w rozumieniu uczniów i studentów, *Problemy Studiów Nauczycielskich* 8, WSP Kraków, 40-56.
- Murawski, R.: 1994, *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań.
- Noddings, N.: 1990, Constructivism in mathematics education, *Journal for Research in Mathematics Education, Monograph number 4 — Constructivist views on the teaching and learning of mathematics*, 7-18.
- Norman, F. A., Pichard, M. K.: 1994, Cognitive obstacles to the learning of calculus: a Krutetskiiian perspective, w: *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning, MAA Notes 33*, Washington, 65-77.
- Orton, A.: 1983, Students' understanding of differentiation, *Educational Studies in Mathematics* 14, 235-250.

- P a w ł a k, R. J.: 1996, Historia matematyki a przeszkody epistemologiczne i dydaktyczne w rozumieniu i akceptacji pojęć i metod analizy matematycznej, w: *Problemy Studiów Nauczycielskich* 8, WSP Kraków, 31-39.
- P i a g e t, J.: 1977, *Psychologia i epistemologia*, PWN, Warszawa.
- P i a g e t, J.: 1981, *Równoważenie struktur poznawczych, centralny problem rozwoju*, PWN, Warszawa.
- P r ó c h n i c k a, M.: 1991, *Informacja a umysł*, wyd. „Universitas”, Kraków.
- P r z e n i o s ł o, M.: 2000, *Rozumienie granicy funkcji wyniesione ze szkoły średniej*, wyd. „Takt”, Kielce.
- P r z e n i o s ł o, M.: 2001, *Obraz granicy funkcji ukształtowany w czasie studiów matematycznych*, Wydawnictwo Akademii Świętokrzyskiej w Kielcach (w druku).
- R o b e r t, A., B o s c h e t, F.: 1981, L'acquisition du concept de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur, *Bulletin APMEP*, 330, 649-674.
- R u c k e r, R.: 1995, *Infinity and the Mind*, Princeton University Press, Princeton.
- S e l d e n, J., S e l d e n, A., M a s o n A.: 1994, Even good calculus students can't solve non-routine problems, w: *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning, MAA Notes 33*, Washington, 19-26.
- S i e r p i ń s k a, A.: 1985, O niektórych trudnościach w uczeniu się pojęcia granicy na podstawie studium przypadku, *Dydaktyka Matematyki* 4, 107-167.
- S i e r p i ń s k a, A.: 1987, Humanities students and epistemological obstacles related to limits, *Educational Studies in Mathematics* 18, 371-397.
- S i e r p i ń s k a, A.: 1990, Some remarks on understanding in mathematics, *For the Learning of Mathematics* 10, 24-36.
- S i e r p i ń s k a, A.: 1992, On understanding the notion of function, w: *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, MAA Notes 25*, Washington, 25-58.
- S i e r p i ń s k a, A.: 1994, *Understanding in mathematics*, The Falmer Press, London.
- S t e i n h a u s, H.: 1998, O ścisłości matematycznej, *Matematyka* 5 273-278.
- T a l l, D. O., V i n n e r, S.: 1981, Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity, *Educational Studies in Mathematics* 12, 151-169.
- T a l l, D. O.: 1996, Function and calculus, w: *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 289-325.

- Thom, R.: 1974, Matematyka „nowoczesna”: pomyłka pedagogiczna i filozoficzna?, *Wiomości Matematyczne* 18, 113-129.
- Tocki, J.: 2000, *Struktura procesu kształcenia matematycznego*, Wydawnictwo WSP, Rzeszów.
- Treliński, G.: 1994, Sterowanie uczeniem się. *Rozmaitości Metodyczne — Matematyka* 2, WOM Kielce.
- Turnau, S.: 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa.
- Turnau, S.: 1995, Dokąd zmierza szkolne nauczanie matematyki, *Matematyka*, 3, 134-145.
- Williams, S. R.: 1991, Models of limits held by college calculus students, *Journal for Research in Mathematics Education* 22, 3, 219-236.
- Vinner, S.: 1992, The function concept as a prototype for problems in mathematics learning, w: *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes 25, Washington, 195-213.
- Wygotzki, L. S.: 1971, *Wybrane prace psychologiczne*, PWN, Warszawa.

Difficulties connected with the cognition process of fundamental calculus notions

S u m m a r y

In this article conclusions are presented of an extensive research on images of basic calculus notions shaped by people both entering and finishing mathematical studies. First problem discussed here is the existence of disturbances of an accommodation process. Many students built their cognitive structures „adding” only new information, without any real changes of these structures. Next come difficulties with creating a definition. The third problem is the role of intuition. Fourth is the phenomenon of forming cognitive structures in visionary minds of some gifted students. Characteristic for this kind of mind is creating unusual, complicated though often incorrect conceptions. The research has also shown that some students built their cognitive structures solely in the form of a set of algorithms. The last problem discussed in this article is the influence of epistemological obstacles.