



Beata Bugajska-Jaszczołt
Akademia Świętokrzyska w Kielcach

O rozumieniu pojęcia kresu zbioru ograniczonego przez uczniów liceum

1 Wstęp

Kształtujący się w procesie poznawania obraz pojęcia matematycznego¹ jest „tworem” indywidualnym, wyrażającym subiektywne wyobrażenia uczącego się, jego wiedzę i doświadczenie. Badanie różnych uczniowskich koncepcji tego samego pojęcia może prowadzić, z jednej strony, do ustalenia źródeł stanowiących je wyobrażeń i skojarzeń, z drugiej umożliwia w dalszym etapie wypracowanie sposobów ich korygowania i rozwijania.

Celem badań opisanych w tym artykule jest scharakteryzowanie obrazów pojęcia kresu zbioru ograniczonego, poznawanego w toku uczenia się matematyki w pierwszych trzech latach nauki w liceum ogólnokształcącym. Nie zajmuję się tu w szczególności genezą pojęcia (historyczną, fenomenologiczną czy psychologiczną), nie rozważam jego wagi, sposobów definiowania w teoriach matematycznych i wynikających z nich rozwiązań metodycznych, nie zamierzam rozstrzygać, czy racjonalne jest wprowadzanie kresu w nauczaniu szkolnym, ani nie dokonuję analizy pojęcia w żadnym z możliwych aspektów. Niektóre z tych problemów są przedmiotem moich badań i będą przedstawione w kolejnych publikacjach. Tu postaram się przedstawić odpowiedź na pytanie: **Jakie koncepcje pojęcia kresu zbioru ograniczonego posiadają licealiści?**

¹Mówiąc o „obrazie pojęcia” będę miała na myśli strukturę poznawczą zawierającą intuicje, wyobrażenia myślowe, które badana osoba wiąże z pojęciem, reguły operowania nim, formy wiązania z innymi pojęciami, itp. W pracy tej zamiennie używać będę terminów: „obraz pojęcia” (porównaj „concept image” w (Tall, S. Vinner, 1981, s. 152)) oraz „koncepcja pojęcia” (porównaj Sierpińska, 1985, s. 114)).

Przedstawiam wyniki wstępnego etapu badań, obejmujących:

1. wyłonienie skojarzeń, wyobrażeń, ciągów czynności i schematów postępowania, reprezentacji (np. geometrycznych, porządkowych) składających się na wytworzony obraz pojęcia;
2. wyróżnienie charakterystycznych typów rozumowań stosowanych w toku badania pojęcia i posługiwania się nim, będących oznakami jego rozumienia. G. Brousseau (Krygowska, 1989, s. 143) mówi o „wiedzy i intuicji uczniów, które — choć niekompletne bądź wadliwe — zasługują na to, by być brane pod uwagę i z całą powagą dydaktycznie potraktowane”. Niektóre bowiem z tych skojarzeń, intuicji czy wyobrażeń stać się mogą późniejszymi blokadami czy przeszkodami w prawidłowym zrozumieniu i operowaniu pojęciem kresu zbioru.

Życzyłabym sobie, aby wyniki badań dotyczących rozumienia pojęcia kresu zbioru ograniczonego przyczyniły się do wzbogacenia naszej wiedzy na temat psychologicznych uwarunkowań procesu jego kształtowania. Badanie procesu psychologicznego wymaga jego „uzewnętrznienia” w formie dostępnej dla obserwacji (J. S. Bruner, 1978, s. 236). Takie „uzewnętrznienie” powinno ujawnić czynności ucznia mające znaczenie dla uruchomienia operacji stanowiących myślową treść pojęcia i warunek jego opanowania (J. Konior, 1998, s. 53). Wiedzę na temat tych procesów można wykorzystać do wypracowania bądź ulepszenia istniejących koncepcji dydaktyczno-metodycznych, wprowadzania i kształtowania jego rozumienia począwszy już od liceum. Pozwala ona wyróżnić to, co może sprzyjać modelowaniu pojęcia kresu, i to, co może stanowić blokadę czy przeszkodę w jego rozumieniu.

Artykuł składa się z trzech rozdziałów:

- Rozdział pierwszy zawiera opis organizacji badań i charakterystykę instrumentu badawczego.
- Rozdział drugi to analiza jakościowa i ilościowa uzyskanego materiału. Na podstawie przeprowadzonej analizy wykonania zestawu zadań (zadania 2 oraz zadania 8), sformułuję tu hipotezę badawczą o istnieniu dwóch grup koncepcji kresu, opiszę w kolejnych podrozdziałach jej częściową weryfikację, wreszcie dokonam próby oceny stopnia operatywności wiedzy licealistów.
- Końcową część artykułu (rozdział trzeci) stanowią wnioski z przeprowadzonego badania.

2 Opis badania

Przedstawione w niniejszym artykule badania sondażowe przeprowadzono w Kielcach w 1998 roku. Stanowią one fragment podejmowanych przeze mnie szerszych badań dotyczących różnorodnych problemów związanych z rozumieniem pojęcia kresu zbioru ograniczonego. W badaniu wzięło udział 60 osób, w tym 34 uczniów klasy trzeciej oraz 26 uczniów klasy drugiej. Wśród uczniów tych klas byli laureaci olimpiad przedmiotowych oraz uczestnicy Konkursu Gier Matematycznych i Logicznych, uczniowie mniej zainteresowani matematyką, a nawet słabi. Wydawało mi się rozsądne poddanie badaniom uczniów klas II i III, bo choć pojęcie kresu opracowuje się w klasie I szkoły średniej, to pierwszoklasiści, jak wynikało z rozmów z nauczycielami, są mniej otwarci w rozmowach, a świadomość własnej nieporadności językowej (matematycznej) wpływa hamująco na spontaniczność ich wypowiedzi.

2.1 Przebieg badania

Na kilka dni przed planowanym terminem badań nauczyciele matematyki zapowiedzieli uczniom pisemny sprawdzian dotyczący kresu zbioru. Na wykończenie zadań przeznaczono 60 minut (45 minut lekcji + 15 minut przerwy, w szkole nie ma dzwonek). Istniała możliwość przedłużenia sprawdzianu o kwadrans, ale badani nie chcieli z niej skorzystać. Przed rozpoczęciem pracy uczniowie zostali poinformowani, że:

- ich prace nie będą oceniane, ale będzie miał w nie wgląd nauczyciel,
- zadania należy wykonywać samodzielnie,
- prosi się o pisanie komentarzy, uzasadnień do udzielanych odpowiedzi,
- w razie trudności w interpretacji odpowiedzi będą prowadzone z uczniami indywidualne rozmowy.

Badanym sugerowano, aby przed podaniem odpowiedzi wykonali odpowiednie rysunki, pomagali sobie przykładami. Uczniowie pracowali w swoich salach lekcyjnych i byli obserwowani jednocześnie przez badającego oraz nauczyciela matematyki. Pracowali indywidualnie.

2.2 Cele badania

Cele przeprowadzonego sondażu można określić następująco:

1. Zidentyfikowanie istotnych elementów uczniowskich koncepcji pojęcia kresu zbioru, specyfiki intuicji, wyobrażeń, reguł czy schematów postę-

powania u licealistów. Wydobycie istniejących między nimi zależności i sprzeczności; ustalenie stopnia ich operatywności.

2. Ujawnienie powtarzających się nieprzypadkowych, niewłaściwych i potencjalnie błędnych intuicji dotyczących kresu, świadczących najprawdopodobniej o istnieniu jakiegoś wspólnego dla nich sposobu „widzenia” pojęcia.
3. Wstępne wyselekcjonowanie problemów do dalszych badań rozumienia pojęcia kresu zbioru ograniczonego.

Uświadomienie i opisanie skojarzeń, intuicji, wyobrażeń, które może nieść ze sobą poznawanie pojęcia kresu zbioru w szkole średniej, może stanowić źródło informacji na temat podstawy rozumienia tego pojęcia przez badanych uczniów, a z drugiej strony jest cennym zbiorem wiadomości ułatwiających wypracowanie sposobów korygowania i rozwijania rozumienia przez uczniów obecnego liceum, gdyby badania dostarczyły sygnałów, że wypracowane i popularyzowane w sytuacjach szkolnych ujęcia metodyczne wykazują jakieś niedostatki.

Analiza zebranego materiału nasunęła wiele interesujących pytań, m. in.:

- Jaki wpływ ma rozumienie pojęć zbioru i nieskończoności na rozumienie kresu?
- Do jakich metodycznych rozwiązań mogą prowadzić różne sposoby definiowania pojęcia kresu i w jaki sposób mogą one wpływać na kształtowanie obrazu tego pojęcia u uczniów?

Pojawiły się też problemy i tematy, które powinny być uwzględnione w trakcie wielowymiarowej analizy pojęcia kresu zbioru ograniczonego, m. in.:

- problem ważności tego pojęcia w teorii matematycznej, a w szczególności w nauczaniu szkolnym i
- temat historycznych prawidłowości jego rozwoju.

Planowane dalsze pogłębione badania pozwolą wydzielić czynniki epistemologiczne tkwiące w naturze samego pojęcia, jak i zewnętrzne, związane z procesem dydaktycznym jego opracowania, wpływające na proces kształtowania rozumienia pojęcia kresu zbioru ograniczonego.

2.3 Metoda badań

W badaniu posłużono się metodą analizy prac pisemnych, wzbogaconą o indywidualne rozmowy. Zgodnie z terminologią stosowaną w dociekaniach pedagogicznych (Nowak, 1981, s. 61-126) ta forma badań miała zarówno cechy wywiadu, prowadzonego w sposób otwarty, jak i zwykłej rozmowy. Rozmowy nieformalne, zachęcające do używania języka naturalnego do opisu sytuacji matematycznych, zwiększały szansę ujawnienia skojarzeń z pojęciem. Celem rozmów było uzyskanie dodatkowych informacji dotyczących pracy pisemnej, gdy ich interpretacja budziła wątpliwości. Starano się przede wszystkim uzyskać odpowiedź na pytanie: *Co skłoniło pana (panią) do udzielenia takiej, a nie innej odpowiedzi?*, stawiane w przypadku, gdy brakowało uzasadnienia tej odpowiedzi w pracy pisemnej. Rozmowy te miały więc charakter diagnozujący, a nie oceniający czy korygujący (patrz ANEKS 1). Starano się niczego nie sugerować, jedynie zadawano szereg pytań, mających na celu dotarcie do istoty skojarzeń. Pytania nie były ujęte w jeden scenariusz, powstawały w trakcie rozmowy i zależały od jej przebiegu. Osobom udzielającym w trakcie pisemnego sprawdzianu, w określonej sytuacji podobnych odpowiedzi, zadawano te same pytania i proponowano dodatkowe zadania A-D. Taki sposób prowadzenia badań pozwolił określić skojarzenia, wykryć sprzeczności w ich konstrukcji, a także „porównać” wypowiedzi uczniów i szukać wspólnych elementów prezentowanych przez nich koncepcji. Rozmowy prowadzone były w kilka dni po sprawdzianie pisemnym. Czas ten miał umożliwić badającemu analizę prac, sformułować hipotezy oraz kierunki częściowej ich weryfikacji w toku wypowiedzi ustnych. W trakcie rozmów badający na bieżąco wykonywał notatki, a po ich zakończeniu uzupełniał te notatki pewnymi spostrzeżeniami i porządkował tak, aby na ich podstawie, po jakimś czasie odtworzyć sytuację.

2.3.1 Narzędzie badawcze

Narzędzie badawcze stanowił następujący zestaw zadań:

Zadanie 1

Do zbioru A należą liczby naturalne z przedziału $(2, 11)$. Do zbioru B należą liczby wymierne z przedziału $\langle 1, \sqrt{3} \rangle$. Zbiór $C = \{x \in \mathbf{N} : x \in \langle 1, 5\frac{1}{2} \rangle\}$. Zbiór $D = \{x \in \mathbf{Q} : x \in (\pi, 7)\}$.

Uzupełnij zdania:

- Kres dolny zbioru A jest równy
- Kres górny zbioru B jest równy
- Kres górny zbioru C jest równy
- Kres dolny zbioru D jest równy

Zadanie 2

Uzupełnij tabelę

Zbiór	Kres dolny	Kres górny
$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$		
$\{\dots, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$		

Uzasadnienie:

Zadanie 3

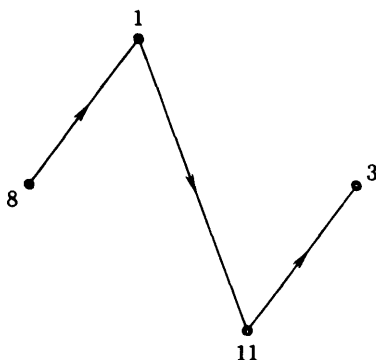
Dany jest zbiór $G = \langle -2, \frac{1}{2} \rangle \cup (0, \sqrt{5})$. Wypisz te, charakterystyczne Twoim zdaniem elementy, wśród których poszukiwać należy kresu górnego, i wytłumacz, jak wybrać spośród nich właściwy.

Zadanie 4

Dopisz brakujące elementy zbioru $H = \{0, 10; 0, 11; \dots; 0, 19; 0, 20; \dots; 0, 30; \dots; 0, 99\}$ tak, aby kresem górnym tego zbioru było 1 oraz $1 \notin H$.

Zadanie 5

Następujący graf opisuje pewne uporządkowanie zbioru $Z = \{1, 3, 8, 11\}$



rys. 1.

Na początku strzałki znajduje się element wcześniejszy niż element znajdujący się na jej końcu (tym samym na końcu strzałki znajduje się element późniejszy niż element znajdujący się na jej początku), czyli np. 8 jest wcześniejsze niż 1 oraz 1 jest późniejsze niż 8.

Wpisz w kratkę jest lub nie jest. Uzupełnij zdania, uzasadniając swój wybór:

8 kresem dolnym zbioru Z , ponieważ

.....

11 kresem dolnym zbioru Z , ponieważ

.....

3 kresem górnym zbioru Z , ponieważ

.....

11 kresem górnym zbioru Z , ponieważ

.....

8 kresem górnym zbioru Z , ponieważ

.....

Zadanie 6

Określ prawdziwość każdej odpowiedzi, wpisując w kratkę słowo TAK lub NIE.
 Dany jest zbiór $A = (7, 8) \cup (-2, 5)$:

- a) Liczba 9 ogranicza zbiór A z góry
- b) Kresem górnym zbioru A jest 9
- c) -2 jest kresem dolnym zbioru A
- d) Kresem dolnym zbioru A jest 7
- e) Kresem górnym zbioru A jest 5
- f) $8,0000001$ jest kresem górnym zbioru A

Zadanie 7

Dany jest zbiór $F = (a, 6) \cup (-3, b)$. Dobierz a i b tak, aby -2 było kresem dolnym oraz 7 kresem górnym tego zbioru.

Zadanie 8

Pewien uczeń na lekcji nie zrozumiał definicji kresu. Wyjaśnij mu, jak wyznaczyć kres dolny i górny następującego zbioru:

$$E = \left\{ \dots - \frac{8}{9}, -\frac{6}{7}, -\frac{4}{5}, -\frac{2}{3}, 0, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, \dots \right\}.$$

Zadanie 9

Podaj przykład nieskończonego zbioru G , którego kresem dolnym jest 2 oraz $2 \notin G$.

Zadanie 10

Wyznacz, o ile istnieją, kres górny i dolny następującego zbioru:

$$E = \{x \in \mathbf{R} : x = t - t^2 \wedge t \in \langle -4, 1 \rangle\}.$$

Odpowiedź uzasadnij.

Kres dolny:

Kres górny:

2.3.2 Uwagi o doborze zadań

Zadania dotyczą różnych aspektów rozumienia kresu zbioru ograniczonego. Miały one na celu ujawnienie intuicji, elementów formalnego rozumienia, skojarzeń typu geometrycznego oraz umiejętności operatywnego ich wykorzystania.

Treści zadań były „negocjowane” z nauczycielami badanych osób. Uwzględniano w nich te sytuacje, z którymi uczniowie zetknęli się na lekcji matematyki przy okazji wprowadzania pojęcia kresu zbioru, a więc związane bezpośrednio z przedziałami liczbowymi i zbiorami utworzonymi z wyrazów ciągu. Zadania tego zestawu można ująć w trzy grupy.

Pierwszą tworzą zadania 2 i 8; analiza odpowiedzi uczniów może zasugerować, jak uczniowie poszukują kresu wskazanego konkretnie zbioru, ustalić sposoby jego „widzenia” oraz wskazać kierunki organizowania czynności związanych z jego wyznaczaniem. Druga grupa to zadania 1, 3, 6, 7, 10. Zadania tej grupy dotyczą wyznaczania kresów przedziałów bądź zbiorów skonstruowanych za pomocą przedziału. Umieszczenie ich w zestawie miało na celu zbadanie, jakie wyobrażenia myślowe dotyczące kresu zbioru mają uczniowie, którzy na lekcjach zetknęli się z tą problematyką na podobnych przykładach. W szczególności interesujące było ustalenie, jakie wyobrażenia dotyczące pojęcia kresu zostały ukształtowane w toku nauki, jakimi zwrotami przekazywano informacje możliwe do wykorzystania w rozumowaniu, na ile wiedza uczniów ma charakter pamięciowy, a na ile polega na głębokim rozumieniu kresu zbioru. Trzecią grupę tworzą zadania 4, 5, 9. Ich wykonanie miało pokazać, w jakim

stopniu pojęcie jest operatywne². Zadanie 4 wymagało odwrócenia czynności wyznaczonych definicją i skonstruowania zbioru o podanym kresie. Zadanie 9 również wymagało wykonania operacji odwrotnej do „wyznacz kres zbioru” i ponadto takiego dookreślenia zbioru, by miał on podany kres. Zadanie 5 umieszczono w zestawie celem stwierdzenia, czy uczniowie wiążą pojęcie kresu zbioru ograniczonego z uporządkowaniem. Prawidłowe jego wykonanie świadczyłoby zapewne nie tylko o powierzchniowym rozumieniu pojęcia, a o rozumieniu głębokim (R. Skemp, 1982, s. 281-288), strukturalnym (J. Piaget, 1970, s. 351-354), które pozwala operatywnie posługiwać się kresem, dając możliwość dokonywania ewentualnych uogólnień pojęcia w późniejszym etapie.

2.3.3 Zadania wykorzystywane w trakcie prowadzonych rozmów

W trakcie rozmów, poza interpretacją pisemnego wykonania zadań 1-10, posługiwano się zadaniami A, B, C, D.

Zadanie A

Wyznacz kres dolny i górny zbioru

$$\left\{ -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots \right\}.$$

Kres dolny:

Kres górny:

Zadanie B

Do zbioru A należą elementy, które powstają przez podstawienie do wzoru $\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}$ za n kolejnych liczb naturalnych, tzn:

$$A = \left\{ \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, -\frac{1}{81}, \dots, \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}, \dots \right\}.$$

Wpisz w kratkę słowo **istnieje** lub **nie istnieje**. Jeśli wybrałeś (wybrałaś) odpowiedź „istnieje”, uzupełnij zdania:

Ograniczenie górne zbioru A .

Ograniczeniem górnym zbioru A jest, gdyż

Ograniczenie dolne zbioru A .

Ograniczeniem dolnym zbioru A jest, gdyż

²Termin „operatywność” odnosi się do pojęcia operacji rozumianej w sensie J. Piageta, jako „odwracalnej czynności umysłowej” (por. J. Piaget, 1966, s. 6).

Kres górny zbioru A

Kresem górnym zbioru A jest, gdyż

Kres dolny zbioru A

Kresem dolnym zbioru A jest, gdyż

Zadanie C

Które z poniższych zdań są prawdziwe? Wpisz w okienku słowo **prawda** lub **falsz** i uzasadnij decyzję.

Zbiór jest ograniczony

1. Zbiór ten jest skończony

, gdyż

2. Każdy podzbiór tego zbioru jest ograniczony

, gdyż

3. Istnieje liczba najmniejsza i największa w tym zbiorze

, gdyż

4. Istnieje liczba większa od każdej liczby tego zbioru

, gdyż

5. Istnieje liczba mniejsza od każdej liczby tego zbioru

, gdyż

Zbiór jest nieograniczony

1. Zbiór ten jest skończony

, gdyż

2. Każdy podzbiór tego zbioru jest nieograniczony

, gdyż

3. Istnieje liczba najmniejsza i największa w tym zbiorze

, gdyż

4. Istnieje liczba większa od każdej liczby tego zbioru

, gdyż

5. Istnieje liczba mniejsza od każdej liczby tego zbioru

, gdyż

Zadanie D

Liczby naturalne parzyste uporządkowano wg następującej zasady: liczba jest wcześniejsza niż druga, jeśli pierwsza z nich dzieli drugą (tym samym druga jest podzielna przez pierwszą). Odpowiedz na pytanie, wybierając jedną z odpowiedzi **tak** lub **nie** i uzupełnij zdania.

Czy dla tak uporządkowanego zbioru istnieje kres dolny?

Tak

kresem dolnym jest

Nie

ponieważ

Czy dla tak uporządkowanego zbioru istnieje kres górny?

Tak

kresem górnym jest

Nie

ponieważ

Wyjaśnij, jak wyznaczyć kres dolny i górny zbioru $\{2, 6, 12\}$

Wyjaśnij, jak znaleźć kres dolny i górny zbioru $\{8, 16, 32, 64, \dots, 8k, \dots\}$

KOMENTARZ

W zadaniu A rozważany był ten sam zbiór co w zadaniu 2b, tj.

$$\left\{ -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{(-1)^n}{n}, \dots \right\} \text{ (zadanie A),}$$

$$\left\{ \dots, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots \right\} \text{ (zadanie 2b).}$$

Zadanie A wykorzystywano w rozmowach głównie wówczas, gdy zachodziło podejrzenie, że badany uczeń interpretując sytuację daną w zadaniu 2b, wziął

pod uwagę jedynie (bądź głównie) symboliczny opis konstrukcji zbioru, a ściślej mówiąc pewien „widziany” w treści zadania ciąg symboli (tj. najpierw „...” potem pięć liczb, potem znowu „...”). Chciano za jego pomocą stwierdzić, czy badany identyfikuje te zbiory jako równe, a jeśli tak, to czy wyznaczy kresy tak, jak w sprawdzianie pisemnym, czy też wiąże z tą nową sytuacją inne skojarzenia, inaczej odczytuje informacje zapisane w tym zadaniu. Zadanie B wykorzystywane było w rozmowie z tymi uczniami, którzy w swoich rozważaniach odwoływali się do osi liczbowej, poszukując elementów wysuniętych skrajnie na lewo bądź na prawo. Chciano za jego pomocą zbadać rozumienie zakresów pojęć kres i ograniczenie. Zadanie C pojawiała się głównie w sekwencji z zadaniem B. Jego celem było ujawnienie, czy badana osoba kojarzy pojęcie „ograniczenie” ze zbiorem, czy z elementem, a jeśli z elementem, to czy odróżnia go od kresu. Ponadto chodziło o wydobycie pewnych intuicji dotyczących nie tylko samego kresu, ale również rozumienia zbioru nieskończonego. Zadanie D wykorzystywano w rozmowach z tymi uczniami, którzy prezentowali skojarzenie z metaforycznym ruchem po osi liczbowej bądź zignorowali porządek opisany grafem w zadaniu 5.

3 Analiza uzyskanego materiału

Zebrany materiał nie był poddany analizie statystycznej, gdyż w badaniu chodziło głównie o ustalenie możliwie różnorodnych skojarzeń, intuicji i wyobrażeń, jakie badani wiążą z pojęciem kresu zbioru ograniczonego. (Zestawienie sposobów poszukiwania kresów i liczby osób je prezentujących zawierają tabele w ANEKSIE 2.) W analizie rezultatów sprawdzianu uwzględniono, poza pisemnymi odpowiedziami, wyjaśnienia uzyskane w czasie rozmów (zadania A-D).

Uzyskany materiał uporządkowano i przeanalizowano w trzech płaszczyznach:

1. Poszukiwanie odpowiedzi przez ucznia.
2. Kres zbioru ograniczonego w praktyce szkolnej.
3. Ocena stopnia operatywności wiedzy licealistów.

Wyniki tej analizy omówię w trzech kolejnych podrozdziałach.

3.1 Analiza wykonania zadań 2 i 8

Zadania 2 i 8 to przykłady często spotykane w podręcznikach szkolnych i zbiorach zadań³; chodzi w nich o wyznaczenie kresów zbiorów, których elementami są wyrazy ciągu nieskończonego. Analiza odpowiedzi prowadzona była (w odniesieniu do każdego ze zbiorów oddzielnie) w kierunku ustalenia podstawowych rodzajów działań podejmowanych przez uczniów w celu wyznaczenia kresów oraz wykrycia różnych sposobów organizowania poszukiwania odpowiedzi. Przedstawię tylko wnioski z tej analizy.

Odpowiedzi uczniów podzielono na grupy reprezentujące dominujący w nich element rozumowania, wyróżniając tym samym cztery różne koncepcje pojęcia kresu zbioru ograniczonego, zdefiniowane poprzez cztery następujące sposoby jego poszukiwania.

Kres to:

1. najmniejsza (największa) liczba,
2. pierwszy (ostatni) na liście (w zapisie zbioru) element,
3. wartość, do której „dążą”, „zbliżają się” (nigdy jej nie osiągając) elementy zbioru,
4. wartość, wokół której „skupiają się” elementy zbioru.

Prezentacja każdej koncepcji obejmuje:

- opis skojarzeń, wyobrażeń i intuicji ujawnionych w wykonaniu poszczególnych zadań,
- ilustrację charakterystycznymi dla niej wypowiedziami uczniów,
- komentarz, wskazujący na domyślne powody — dydaktyczne lub psychologiczne — powstania tego typu skojarzeń.

Opisując koncepcje pojęcia kresu zbioru starano się je tak charakteryzować, by dawały bardziej ogólny zarys sposobów jego postrzegania. Jest to przybliżona charakterystyka, głównie dlatego, że wzięto pod uwagę skojarzenia prezentowane konsekwentnie, stanowiące istotę obrazu, choć często był to jeden z wielu jego elementów. Nazwy koncepcji dobierano tak, by oddawały sposób myślenia rozwiązujących. W końcowej części tego podrozdziału, na podstawie przeprowadzonej analizy, zostanie sformułowana hipoteza badawcza o istnieniu dwóch grup koncepcji.

Chcąc zaprezentować przesłanki sformułowania tej hipotezy, dość szczegółowo omawiam odpowiedzi uczniów na pytania postawione w zadaniach 2

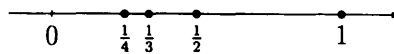
³Zobacz literatura s. 92.

i 8. Przytoczenie niektórych wypowiedzi wydaje się ponadto ważne z powodu ujawnianych w nich trudności i to związanych nie tylko z rozumieniem i operatywnym posługiwaniem się pojęciem kresu, ale również rozumieniem innych terminów (ograniczenie, najmniejsze ograniczenie, najmniejszy element) i symboli matematycznych (symbolu „...”). Wskazując zaś na różnorodność intuicji i wyobrażeń licealistów, chciałabym zaprzeczyć obiegowej opinii, że uczniowie niewiele „wynoszą” na temat kresu ze szkoły średniej; przeciwnie, mają zaskakująco wiele skojarzeń odległych od matematycznego sensu pojęcia kresu.

NAJMNIEJSZA, NAJWIĘKSZA WARTOŚĆ

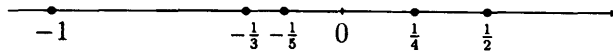
Poszukując kresów zbiorów z zadań 2 oraz 8 pewna grupa badanych uczniów rozpoczynała swoje rozważania od rysunku osi liczbowej i zaznaczenia na niej kilku liczb:

— czterech w przypadku zbioru $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$



rys. 2.

— pięciu w przypadku zbioru $\left\{\dots, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$



rys. 3.

— dziewięciu w przypadku zbioru $\left\{\dots -\frac{8}{9}, -\frac{6}{7}, -\frac{4}{5}, -\frac{2}{3}, 0, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, \dots\right\}$



rys. 4.

Dalej czynności tych uczniów sprowadzały się do ustalenia, czy wśród liczb zaznaczonych na osi liczbowej jest najmniejszy (największy) element zbioru. Ten sposób poszukiwania kresów okazał się skuteczny w przypadku zbioru $\left\{\dots, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ oraz kresu górnego zbiorów: $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$, $\left\{\dots -\frac{8}{9}, -\frac{6}{7}, -\frac{4}{5}, -\frac{2}{3}, 0, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, \dots\right\}$. W przypadku zbioru $\left\{\dots, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ pojawiły się m. in. stwierdzenia: „-1 jest najdalej po stronie ujemnych na osi, a $\frac{1}{2}$ po stronie dodatnich najbardziej wysunięta na prawo”.

Trudności dotyczyły wyznaczenia kresu dolnego zbioru $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ oraz

zbioru $\left\{ \dots - \frac{8}{9}, -\frac{6}{7}, -\frac{4}{5}, -\frac{2}{3}, 0, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, \dots \right\}$. Badani zwracali uwagę na (indywidualnie rozumianą) konieczność przynależności kresu do zbioru. W związku z tym wyróżniłam dwie grupy koncepcji:

a) Najmniejsza, największa wartość należąca do zbioru

Ta grupa osób, która przynależność kresu do zbioru traktowała jako warunek konieczny jego istnienia, twierdziła w przypadku zbiorów: $\left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$, $\left\{ \dots - \frac{8}{9}, -\frac{6}{7}, -\frac{4}{5}, -\frac{2}{3}, 0, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, \dots \right\}$, że „kres dolny nie istnieje”. W rozmowach badani potwierdzali, że wybór takiej odpowiedzi wiąże się z przekonaniem, że kresem może być tylko element należący do zbioru. Twierdzili np.: „Kres górny zbioru E wynosi $\frac{3}{2}$, bo na prawo od 0 nie ma liczby większej z tego zbioru, a dolny nie istnieje, bo nie istnieje liczba z tego zbioru wysunięta najbardziej na lewo na osi liczbowej”. Rozmowy potwierdziły przypuszczenie, że chodziło o umieszczenie na osi liczbowej tylko tych elementów, które pojawiły się w zapisie zbioru — dziewięć elementów danych w treści zadania: $-\frac{8}{9}, -\frac{6}{7}, -\frac{4}{5}, -\frac{2}{3}, 0, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}$ — i wskazanie „krajowych”. Naturalnymi kandydatami na kresy tak skonstruowanego na osi liczbowej zbioru są pierwszy zaznaczony z lewej i pierwszy z prawej. Brak możliwości ich wskazania prowokował decyzję „kres nie istnieje”.

W rozmowach badani zwracali uwagę na kolejność zaznaczania elementów zbioru na osi liczbowej. „Weźmy na prawo od 0. Zaznaczam kolejno $\frac{3}{2}$. Potem $\frac{5}{4}$ bliżej 1, potem $\frac{7}{6}$ jeszcze bliżej, $\frac{9}{8}$ jeszcze bliżej, czyli kolejne będą coraz bliżej 1. Najbardziej wysunięta na prawo to liczba $\frac{3}{2}$.” „Zaznaczmy ujemne. $-\frac{2}{3}$ zaznaczam (tu czynność wykonana na osi liczbowej) na lewo od 0, dalej $-\frac{4}{5}$ jeszcze dalej $-\frac{6}{7}$ itd. Nie zaznaczę ostatniej, bo jej nie ma.”

(a1) Najmniejsza, największa wartość należąca do zbioru

Były to słowa-klucze. Wśród osób deklarujących przekonanie, iż kresem zbioru ograniczonego może być jedynie element należący do zbioru, były takie, które poprzestawały na złożeniu tej deklaracji. Udzielali m. in. odpowiedzi: „Kres górny zbioru $\left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$ nie istnieje, bo kresem może być tylko liczba najmniejsza należąca do zbioru”, albo „kresem dolnym jest najmniejsza liczba ograniczająca go z dołu”. Żadna z badanych osób, w trakcie prowadzonych rozmów, nie wskazała kresów. Powtarzano ciągle to, co znalazło się w pracy pisemnej, bez efektywnego działania. Autorzy takich odpowiedzi w rozmowach akcentowali jedynie, że w zbiorze nie ma elementu najmniejszego czy też największego, gdyż „zbiór jest nieskończony, nie wiadomo jakie są następne elementy”, „nie można wskazać w zbiorze nieskończonym wartości najmniejszej (największej)”. Definicja pojęcia, choć została przez uczniów tej

grupy zapamiętana (nie przez wszystkie osoby poprawnie), jednak — pozostając niezrozumiałą — okazała się bezużyteczna w rozumowaniu.

KOMENTARZ

Badani uczniowie, prezentujący omawiane powyżej wyobrażenia, odwoływali się najczęściej do osi liczbowej i uporządkowania zbioru wyznaczonego przez nią, poszukując elementów położonych skrajnie na lewo bądź na prawo. Prawdopodobnie ten rodzaj skojarzeń powstał w trakcie poznawania pojęcia kresu zbioru ograniczonego na lekcjach matematyki. Ich źródłem mógł być wypracowany schemat poszukiwania kresów:

1. Sprawdź, czy w zbiorze istnieje element najmniejszy (największy);
2. Jeśli w zbiorze nie ma elementu najmniejszego (największego), wskaż przykłady ograniczenia dolnego (górnego) i wybierz największe (najmniejsze);

oraz jego wizualizacja za pomocą dyskretnego, fragmentarycznego modelu osi liczbowej, a co za tym idzie, ograniczenie się do poszukiwania kresów wśród elementów zaznaczonych na niej. Ten rodzaj skojarzeń związanych z modelem geometrycznym, choć poprawny z punktu widzenia uporządkowania elementów zbioru, nie jest jednak adekwatny do sytuacji, gdy w zbiorze brak elementu najmniejszego bądź największego.

Ujawnione wyobrażenia mogą wiązać się z błędną interpretacją terminu „ograniczenie zbioru”. Posługiwanie się zaś wyrażeniami zaczerpniętymi z definicji (w przypadku grupy prezentującej koncepcje opisane w punkcie (a1)), może być sygnałem braku operatywnej znajomości definicji kresu zbioru, a także brakiem rozumienia roli definicji jako wykładni wiedzy na temat pojęcia i jej znaczenia w konstrukcji matematyki.

b) Najmniejszy, największy element należący bądź nie należący do zbioru

W koncepcjach tej grupy dominują intuicje dotyczące „końców” zbioru „widzianego” na osi liczbowej⁴. Akcentowano przekonanie, iż kresem może być element najmniejszy (największy) bądź największy (najmniejszy) ograniczający zbiór z dołu (z góry), równoważnie nazywany najmniejszym (największym) nie należącym do niego. Badany, który w przypadku zbioru E udzielił następującej odpowiedzi:

⁴Metafory „widzenia zbioru” na osi liczbowej używać będą do opisanego sposobu konstruowania w myśli zbioru nieskończonego.

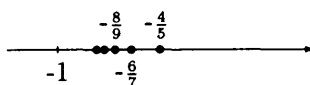
Jeżeli dobrze zrozumiałem kres, to istnieje, gdyż dążą do -1 wartości tego zbioru, czym dalej, tym bliżej. Kres górny jest równy $\frac{3}{2}$, gdyż liczby te dążą do 1, więc $\frac{3}{2}$ jest największe,

w trakcie rozmowy, stwierdzenie:

Kres dolny, jak twierdzisz, wynosi -1 , bo wartości tego zbioru dążą do -1

skomentował następująco:

Uczeń: Tak. Widać, że te ujemne ułamki mają licznik coraz bardziej równy mianownikowi, ale mniejszy od mianownika i dlatego one zbliżają się do -1 ; to widać zresztą na osi.



rys. 5.

Badający: A co z kresem górnym?

Uczeń: Wynosi $\frac{3}{2}$, bo $\frac{3}{2}$ jest największą liczbą, pozostałe zbliżają się do jeden i są mniejsze od $\frac{3}{2}$.

Badający: A czy w przypadku kresu dolnego też należy zapytać o istnienie elementu najmniejszego?

Uczeń: Tak, ale tu się patrzy na te liczby $-\frac{8}{9}$, $-\frac{6}{7}$, $-\frac{4}{5}$, $-\frac{3}{2}$. Tu najmniejsza jest na końcu, $-\frac{8}{9}$, więc zapewne wszystko dalej jest jeszcze mniejsze i dąży do -1 . Gdyby któraś z liczb $-\frac{6}{7}$, $-\frac{4}{5}$, $-\frac{3}{2}$ była mniejsza niż $-\frac{8}{9}$, to ona byłaby kresem.

„Nie wiem jak wyglądają inne elementy, ale widać, że są coraz mniejsze i dodatnie. Na końcu będzie 0” — twierdzili badani, którzy uznawali, że kresem dolnym zbioru $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ jest 0.

KOMENTARZ

Z wypowiedzi badanych osób wynikało, że termin „najmniejszy element nie należący do zbioru” funkcjonuje w ich języku (prawdopodobnie również w wyobrażeniach) jako terminologiczny skrót wyrażenia „największe ograniczenie dolne zbioru”, a zatem sens jego stosowania jest poprawny, zgodny z sensem pojęcia kresu zbioru. Struktury poznawcze w tej grupie obejmują, jak wynika z analizy wypowiedzi badanych, różnorodne wyobrażenia dotyczące pojęcia kresu. Ich fundament tworzą intuicje związane z widzeniem zbioru nieskończonego na osi liczbowej oraz wiedza o tym, jak wygląda cała ich nieskończona zbiorowość, tkwiąca gdzieś w wyobraźni. Choć zwroty „dąży”, „zbliża się”

używane przez badanych w celu „materializacji” tych myśli sugerowałyby dynamiczne skojarzenia związane z widzeniem zbioru, to jednak nie pozostają one w sprzeczności z kluczowym elementem tego obrazu, a mianowicie koniecznością szukania w przypadku braku elementu najmniejszego (największego) odpowiednio najmniejszego ograniczenia górnego (największego ograniczenia dolnego).

PIERWSZY, OSTATNI ELEMENT

Inne podejście reprezentują te prace, w których istotą myślenia o kresie jest układ symboli użytych do opisu konstrukcji zbioru. Interpretacja tego opisu stanowi oś rozumowania badanych: kres to „pierwszy”, „ostatni” element na liście w zapisie zbioru. W przypadku obydwu zbiorów z zadania 2 oraz zbioru z zadania 8 poszukiwanie kresów wiązało się z interpretacją symbolu „...”, znajdującego się bądź na początku, bądź (albo i) na końcu listy jego elementów. W związku z różnymi sposobami tej interpretacji wyróżniono pewne podkoncepcje:

a) Pierwszy lub ostatni element należący do zbioru, przy równoczesnym ignorowaniu konwencjonalnego znaczenia symbolu „...”

Badani, którzy w zadaniu 2 udzielili odpowiedzi typu: „ $\frac{1}{4}$ jest kresem górnym zbioru $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$, a 1 jego kresem dolnym”, w rozmowie potwierdzili swoje stanowisko w sprawie brania pod uwagę jedynie pierwszego lub ostatniego „z nazwiska” elementu zbioru. Nie uzyskano również żadnych wyjaśnień od tych uczniów, którzy wyznaczając kresy zbioru $\{\dots, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$ twierdzili: „ $-\frac{1}{5}$ jest kresem dolnym tego zbioru, zaś $\frac{1}{4}$ jego kresem górnym”, dodając jedynie, że „ $-\frac{1}{5}$ jest pierwszym elementem zbioru, zaś $\frac{1}{4}$ ostatnim”. Autor wypowiedzi: „Kres dolny zbioru E jest równy $-\frac{8}{9}$, gdyż wszystkie elementy zbioru E leżą na prawo od $-\frac{8}{9}$, a kres górny zbioru E jest równy $\frac{9}{8}$, gdyż jest ograniczeniem górnym zbioru E ” potwierdził w rozmowie, iż wyrażenie „na prawo od” odnosi się do symbolicznego oznaczenia zbioru. Badany, który w pracy napisał: „Kresem dolnym zbioru jest $-\frac{8}{9}$, ponieważ jest liczbą najmniejszą w zbiorze i ogranicza zbiór od dołu”, w toku rozmowy utożsamiał kresy zbioru z jego końcami, to znaczy pierwszą, ostatnią wartością liczbową i nazywał je zamiennie „najmniejszym, największym elementem”, „ograniczeniem górnym, dolnym”, „kresem dolnym, górnym”.

KOMENTARZ

Ujawniony tu rodzaj skojarzeń związany jest głównie z rozumieniem symbolu „...”. Wyraża się przekonaniem, iż stosowany w różnego rodzaju tekstach (nie tylko matematycznych) symbol „...” (czytany potocznie „i tak dalej”), nie

kryje na temat konstrukcji zbioru innych informacji prócz tych, które przekazują symbole liczb. Ignorowanie konwencjonalnego znaczenia symbolu „...” i traktowanie go wyłącznie jako znaku graficznego, nie przekazującego istotnych treści matematycznych możliwych do wykorzystania w rozumowaniu, prowadzi do stwierdzenia, że kresem dolnym (górnym) jest element rozpoczynający (kończący) listę elementów w zapisie zbioru.

b) Symbol „...” na początku lub na końcu listy elementów zbioru

Poszukując kresów zbiorów: $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$, $\{\dots, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$, $\{\dots - \frac{8}{9}, -\frac{6}{7}, -\frac{4}{5}, -\frac{2}{3}, 0, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, \dots\}$ badani odwoływali się do symbolicznego oznaczenia zbioru, biorąc pod uwagę nie wartości liczbowe elementów, a jedynie miejsce występowania symbolu „...” w kodzie zbioru. Wyróżniono dwie zasadnicze podkoncepcje ze względu różne sposoby interpretacji tego symbolu:

(b1) kres istnieje i wynosi $\pm\infty$

Badani prezentujący koncepcje tej grupy w zadaniu 2 udzielali m. in. odpowiedzi: „Kres dolny zbioru $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ wynosi 1, a górny ∞ ”, „kres górny zbioru $\{\dots, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$ wynosi ∞ , a dolny -1 ”, „kres dolny zbioru E wynosi $-\infty$, zaś górny $+\infty$ ”, a w rozmowach wyjaśniano, iż symbol $\pm\infty$ wskazuje na istnienie kresu gdzieś w nieskończoności, plus lub minus. W wielu przypadkach badany był nawet gotów go wskazać; np.: „1 jest pierwszym elementem zbioru, zaś ostatni jest gdzieś w nieskończoności, jest nim $\frac{1}{n}$, gdy n jest największe”. Na pytanie badającego o największą liczbę naturalną badany odpowiedział: „Nie umiem podać takiej liczby, bo ona jest niewyobrażalnie duża, ale na pewno taka jest”. „Czy jest to bilion?” — pytał badający. Badany odpowiedział: „Bilion nie, bo jest bilion jeden itd., ale nie umiem podać takiej, która na pewno jest największa. Może ktoś inny wie, ja nie”. Podobne skojarzenia ujawniło dwóch uczniów w przypadku zbioru E twierdząc, że: „Kres dolny wynosi $-\frac{n}{n+1}$ oraz górny $\frac{n+1}{n}$ ”, albo: „kresem dolnym jest $-\frac{3+2n}{2n}$, a górnym jest $\frac{3+2n}{2n}$ ”.

Ten rodzaj wyobrażeń wiąże się prawdopodobnie z akceptowaniem nieskończoności jako istniejącej jedynie potencjalnie, a więc uznawaniem, że nie istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych i odczuciem, że można tylko — jeśli zachodzi potrzeba — podać więcej liczb naturalnych większych od dowolnie dużej liczby; stąd w pojęciu niektórych uczniów symbole: $\frac{1}{n}$, $-\frac{1}{n}$, $-\frac{n}{n+1}$, $\frac{n}{n+1}$, $-\frac{3+2n}{2n}$, $\frac{3+2n}{2n}$, mogą być kresami osiąganymi w nieskończoności.

(b2) kres nie istnieje

Koncepcje tej grupy prezentują badani, którzy w wykonaniu zadania 2 w przypadku zbioru $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ udzielali odpowiedzi: „Kresem dolnym jest 1, a kres górny nie istnieje”, zaś w przypadku zbioru $\{\dots, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$ były to stwierdzenia: „Kres dolny i górny nie istnieją”, bądź „kresem dolnym jest -1 — najmniejsza liczba w zbiorze, górny nie istnieje”, „Kres dolny i górny nie istnieją, bo zbiór ciągnie się w nieskończoność”, a w rozmowach wyjaśniając: „1 jest pierwszym elementem zbioru, a więc kresem dolnym, zaś kres górny nie istnieje, bo są trzy kropki, a więc jest nieskończony, nie można powiedzieć, co będzie na końcu”.

Większość odpowiedzi przejawiało „cechy” koncepcji mieszanych, to jest takich, w których inny rodzaj skojarzeń ujawniano w przypadku kresu dolnego, a inny w przypadku kresu górnego. Autor pisemnej odpowiedzi: „Kres dolny nie istnieje, zaś górny jest 1”, w rozmowie wyjaśnił, że: „1 jest elementem największym (brał pod uwagę porządek elementów zbioru), zaś twierdząc, że dolny nie istnieje, brał pod uwagę symbol „...” i interpretował go jako symbol nieograniczonego „malenia elementów”. W przypadku zbioru E są tu m. in. stwierdzenia: „Zbiór ciągnie się w nieskończoność w jedną i drugą stronę, więc ten zbiór nie posiada kresów. Kresy nie istnieją”. Autor jednej z takich odpowiedzi swój wybór uzasadniał nieograniczonym „wzrostem” i „maleniem” elementów, co symbolicznie, jak twierdził, zanotowane jest w konstrukcji zbioru umieszczeniem symbolu „...” na jego początku i końcu.

Miejsce symbolu „...” w oznaczeniu zbioru stanowiło informację o nieograniczonym „wzroście” („maleniu”) elementów zbioru dla tych uczniów, którzy stwierdzali m. in.: „Kres dolny nie istnieje, ponieważ trzy kropki oznaczają nieskończoność, a zatem kres górny nie istnieje”, bądź „Kres dolny to liczba, do której zbiegają wartości, a tu widać, że do niczego nie zbiegają; gdyby zbiegały, to tu coś by stało, np. -2 , w takim zbiorze $\{-2, \dots, -\frac{8}{9}, -\frac{6}{7}, -\frac{4}{5}, -\frac{2}{3}, 0\}$; podobnie z prawej kres górny nie istnieje, bo te wartości nie zbiegają do żadnej, ten zbiór jest nieskończony, nic go nie ogranicza”, albo wreszcie „Kres dolny nie istnieje, gdyż zbiór nie posiada liczby, która by go ograniczała z dołu i biegnie aż do minus nieskończoności. Kres górny nie istnieje, ponieważ nie ma liczby, która ograniczałaby go od góry i liczby biegną aż do plus nieskończoności”.

KOMENTARZ

Prawdopodobnie ten rodzaj skojarzeń wynika z działania oderwanego od konstrukcji zbioru. Nie wartość liczbowa elementów zbioru ma tu decydujące znaczenie, a jedynie — jak twierdzą badani uczniowie — „ich nieskończoność”.

ilość”, o której informuje symbol „...” znajdujący się na początku lub końcu listy elementów zbioru. Wybór jednej z dwóch odpowiedzi: „kres nie istnieje”, bądź „istnieje i wynosi $\pm\infty$ ” związany jest z rozumieniem nieskończoności. Wybór pierwszej odpowiedzi wiąże się z pojmowaniem symbolu „...” jako wyrażającego nieograniczone „malenie”, czy „wzrost” elementów zbioru; stąd wniosek: kres nie istnieje, bo jest nieosiągalny. Wybór drugiej odpowiedzi wiąże się z pojmowaniem nieskończoności jako istniejącej potencjalnie, a nie aktualnie.

Źródłem wszystkich prezentowanych wyobrażeń jest symbol „...”, używany w zapisie zbioru nieskończonego. Różnorodność prezentowanych przez tę grupę uczniów koncepcji wynika więc z wielości możliwych interpretacji tego symbolu.

c) Pierwszy (ostatni) wyraz ciągu monotonicznego

Do symbolicznego oznaczenia zbioru odwoływała się również ta grupa osób, której skojarzenia dotyczyły „całościowego” spojrzenia na symboliczny kod zbioru. Istotą tych wyobrażeń była świadomość, iż elementami zbiorów z zadań 2 oraz 8 są wyrazy :

— ciągu malejącego o wyrazie ogólnym $\frac{1}{n}$ w przypadku zbioru $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$,

— dwóch ciągów w przypadku zbioru $\left\{\dots, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$, a mianowicie:

ciąg malejącego o wyrazie ogólnym $\frac{1}{n}$,

ciąg rosnącego o wyrazie ogólnym $-\frac{1}{n}$,

— dwóch ciągów w przypadku zbioru $\left\{\dots -\frac{8}{9}, -\frac{6}{7}, -\frac{4}{5}, -\frac{2}{3}, 0, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, \dots\right\}$, a mianowicie:

ciąg rosnącego o wyrazie ogólnym $-\frac{n}{n+1}$, bądź $-\frac{3+2n}{2n}$,

ciąg malejącego o wyrazie ogólnym $\frac{n}{n+1}$, bądź $\frac{3+2n}{2n}$,

Ten „ogład” zbioru pozbawiony był refleksji dotyczącej ograniczoności zbioru wyrazów odpowiedniego ciągu. Badani brali pod uwagę pierwszy wyraz ciągu malejącego w przypadku zbioru $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ uznając, iż jest on kresem górnym. Ujawnione tu skojarzenia okazywały się nieoperatywne także dla wyznaczenia kresu dolnego tego zbioru. Najczęściej stwierdzali oni, że „ten ciąg jest nieskończony i nie ma ostatniego wyrazu, który mógłby być kresem dolnym”. Podobne rozumowanie wystąpiło w przypadku zbioru $\left\{\dots, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ i prowadziło badanych do wniosku, że kresem dolnym jest -1 , a górnym $\frac{1}{2}$. Takie intuicje ujawniali też badani w przypadku zbioru E (zadanie 8), dając odpowiedź: „Kres dolny: szukamy najmniejszej liczby spośród zbioru E (jest bliska $-\frac{2}{3}$). Możemy, sprowadzając do wspólnego mianownika, sprawdzić,

czy jest ona rzeczywiście mniejsza od wszystkich liczb ujemnych. Kres górny: Szukamy największej liczby spośród zbioru E (jest to liczba $\frac{2}{3}$). Sprawdzamy, czy liczba jest większa niż inne liczby dodatnie, gdyż wiadomo, że ona tylko może być kresem górnym, ponieważ idąc w prawo napisanego zbioru, zbiór się nie kończy." Z autorką powyższej wypowiedzi przeprowadziłam rozmowę, której fragment przytaczam:

Uczeń: Najmniejszą liczbą może być tylko $\frac{2}{3}$, bo (tu uczennica przeczytała pismną odpowiedź ze swojej pracy).

Badający: Jak sprowadziłabyś do wspólnego mianownika liczby zbioru E ?

Uczeń: To się teoretycznie da zrobić. Trzeba znaleźć wspólny mianownik dla $-\frac{8}{9}$, $-\frac{6}{7}$, $-\frac{4}{5}$, $-\frac{2}{3}$.

Badający: Możesz to zrobić?

Uczeń: Tak, ale tak naprawdę, w tych przykładach jest tak, że wszystkie wartości w zbiorze albo są coraz większe, albo coraz mniejsze, czyli wystarczy porównać pierwszy $-\frac{2}{3}$ i zobaczyć, jak jest z pozostałymi. Są coraz większe, więc najmniejszy wynosi $\frac{2}{3}$.

Badający: A kres górny?

Uczeń: Tak samo wyznacza się kres górny, ale tu widać że $\frac{3}{2}$ jest największe, bo $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{9}{8}$ są coraz mniejsze, aż w nieskończoność".

KOMENTARZ

Prawdopodobnie źródeł powstawania tych szczególnych dekompozycji pojęcia kresu zbioru ograniczonego można szukać w procesie dydaktycznym. Ten szczególny rodzaj zbiorów złożonych z wyrazów ciągu monotonicznego, mógł być powodem ogniskowania uwagi ucznia na pierwszym bądź ostatnim wyrazie ciągu i przenoszenia tego osobliwego sposobu „widzenia” kresów na inne sytuacje, przy założeniu, że pierwszy (ostatni) element każdego zbioru jest jego kresem dolnym (górnym). Tak ukształtowane wyobrażenia stały się kluczowym elementem obrazu pojęcia.

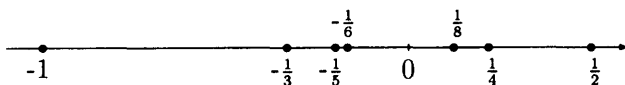
WARTOŚĆ, DO KTÓREJ „DAŻĄ”, „ZBLIŻAJĄ SIĘ” ELEMENTY ZBIORU (NIGDY JEJ NIE OSIĄGAJĄC)

W koncepcjach tej grupy dominują wyobrażenia związane z metaforycznym ruchem elementów zbioru. Wyróżniam tu dwie zasadnicze podgrupy koncepcji:

a) Kres to wartość graniczna, do której „zbliżają się” elementy zbioru

Istotą tych skojarzeń jest metaforyczne dążenie elementów zbioru do kresu. W przypadku zbioru $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ prowadziły one do następujących wniosków: „Kres dolny jest równy 0, bo te liczby zbliżają się coraz bardziej do 0,

ale nigdy go nie osiągną”, albo „Coraz bliżej 0 leżą kolejne elementy, ale 0 nie osiągną, nie ma takiej możliwości, bo tu jest 1 przez coś, ale są bardzo blisko, np. 1 przez miliard to bardzo blisko 0”. Podobne postawy ujawniali badani w przypadku zbioru $\{\dots, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$, m. in. podając odpowiedź: „Kres dolny wynosi -1 , a górny wynosi 1 , bo wszystkie dodatnie wyrazy tego ciągu dążą do 1 ”. W rozmowach badani potwierdzali tę decyzję, argumentując: „Ciąg złożony z dodatnich wyrazów (tj. ciąg 1 przez liczba parzysta) dąży do 0 ”. Na osi liczbowej zaznaczono coraz bliżej zera kropki:



rys. 6.

Na pytanie badającego, dlaczego -1 jest kresem dolnym odpowiadano: „ -1 jest najmniejszą liczbą należącą do zbioru, zaś pozostałe zbliżają się do 0 ; najmniejszej ograniczającej z góry nie można wskazać”, zaś na prośbę o zwrócenie uwagi na sporządzony rysunek, badani odpowiadali, że „na rysunku jest zbliżanie się elementów do 0 ”. O „dążeniu” elementów zbioru $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ do kresu mówili również ci badani, którzy przywoływali pojęcie granicy ciągu o wyrazie ogólnym $\frac{1}{n}$. Pisali m. in.: „ 0 jest kresem dolnym tego zbioru, bo $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ ”, a w ustnych wyjaśnieniach pojawiało się odwołanie do pojęcia granicy ciągu nieskończonego jako istoty dążenia elementów zbioru do wartości „końcowej”, czyli 0 . W przypadku zbioru $\{\dots, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$ ten rodzaj intuicji, wyrażony dynamicznym wręcz sposobem „widzenia” zbioru, prowadził do fałszywych wniosków: „Kres dolny i górny wynoszą 0 , bo ciągi $-\frac{1}{n} \rightarrow 0$, $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ ”.

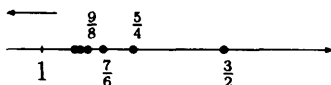
W wykonaniu zadania 8, u badanych prezentujących koncepcje tej grupy, również dominują przekonania, że większość (indywidualnie pojmowana) elementów zbioru musi „zmierzać” do kresu. Są tu zarówno skojarzenia z pojęciem granicy ciągu u trzecioklasistów, jak i wyobrażenia związane z „ruchem”, nie odnoszące się do żadnego pojęcia matematycznego — głównie u drugoklasistów. Znajdujemy u nich m. in. wypowiedzi: „Kres dolny wynosi -1 , bo elementy dążą do -1 , czym dalej tym bliżej, a największą liczbą w tym zbiorze jest $\frac{3}{2}$ ”, „Kres dolny wynosi -1 , bo każda kolejna liczba, licząc w dół, będzie się coraz bardziej przybliżać do -1 , ale nigdy tej liczby nie osiągnie”. Sześciu uczniów klasy III twierdziło, że „ -1 jest kresem dolnym, bo $-\frac{n}{n+1}$ dąży do -1 , kres górny wynosi 1 , bo $\frac{n+1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ ”; „Kres dolny równy jest -1 , bo liczby zbioru E dążą do -1 z dołu, a do 1 z góry, więc 1 jest kresem górnym”; „Kres

dolny wynosi -1 , bo $-\frac{3+2n}{2n} \rightarrow -1$, kres górny wynosi 1 , bo $\frac{3+2n}{2n} \rightarrow -1$ ".

Tak więc po wyodrębnieniu pewnych ciągów badany ustala ich granice i mechanicznie identyfikuje je z kresami odpowiednich zbiorów. Wydaje się, że u trzecioklasistów pojęcie kresu zespoliło się z pojęciem granicy i następnie przez nie zostało zdominowane.

b) Kres nie istnieje, bo elementy zbioru „zmierają” w nieskończoność

Dość liczna grupa osób, ujawniających dynamiczne skojarzenia z „widzeniem” zbioru, odwoływała się w swoich rozważaniach do osi liczbowej, koncentrując uwagę na tym, jak kolejne elementy zbioru stopniowo na niej powstają, jak „poruszają się”, zmierzając „w nieznaną”, w nieskończoność. W przypadku zbioru E były to odpowiedzi: „Kres dolny zbioru nie istnieje”. Autor jednej z takich odpowiedzi sporządził następujący rysunek:



rys. 7.

W trakcie rozmowy wyjaśnił: „Zbiór E nie posiada kresu dolnego. Strzałka nad osią liczbową oznacza, że te wartości dążą w lewo gdzieś w nieskończoność i dlatego nie ma kresu dolnego”. Podobna argumentacja była wykorzystywana do uzasadnienia odpowiedzi: „Kres dolny zbioru $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ nie istnieje”, oraz „kres górny zbioru $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ nie istnieje”. Źródłem tego rodzaju skojarzeń był brak rozróżnienia pomiędzy mocą zbioru wskaźników ciągu, a wartościami liczbowymi. Na plan pierwszy wysuwa się tu moc zbioru, co eliminuje rozważania dotyczące ograniczoneści zbioru jego wartości. Taka interpretacja symbolicznego oznaczenia zbioru prowadziła do błędnych wniosków.

KOMENTARZ

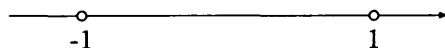
Scharakteryzowany powyżej rodzaj skojarzeń z metaforycznym ruchem, jak pokazuje analiza wypowiedzi badanych uczniów, może powstać w efekcie wchłonięcia pojęcia kresu przez pojęcie granicy u trzecioklasistów bądź pojawić się przed formalnym wprowadzeniem pojęcia granicy u drugoklasistów. U uczniów klas drugich, używających wyrażen „elementy zbioru dążą”, „zbliżają się”, jako metafor jedynie, bez powiązania z formalnymi pojęciami matematycznymi, jest to rodzaj spontanicznych wyobrażeń nasuwających się niezależnie od obudowy dydaktycznej pojęcia kresu czy granicy. Być może ten

rodzaj intuicji wywołany jest u niektórych sposobem konkretyzowania pojęcia zbioru nieskończonego.

Proces zaznaczania elementów zbioru nieskończonego na osi liczbowej sprowadza się do zaznaczenia na niej kilku liczb i „kontynuowania” tego zaznaczenia w myśli. Obraz tego, jak elementy zbioru powstają stopniowo, nie są dane od razu, nasuwa skojarzenia z „ruchem”, z „dążeniem” nieskończenie wielu elementów do pewnej wartości — kresu. Źródeł utożsamiania przez trzecioklasistów pojęcia kresu zbioru i granicy ciągu można szukać w tematyce zadań, sprowadzającej się do ciągów monotonicznych i ograniczonych.

WARTOŚĆ, WOKÓŁ KTÓREJ „SKUPIAJĄ SIĘ” ELEMENTY ZBIORU

Wspólnym elementem koncepcji tej grupy są wyobrażenia związane z obserwowaniem zachowania się nieskończenie wielu elementów zbioru i żądaniem, by „skupiały” się one wokół pewnej wartości — kresu. Skojarzenia takie prowadziły w wykonaniu zadania 2 do odpowiedzi typu: „Jeśli zaznaczę elementy zbioru: $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ na osi liczbowej, to one zagęszczają się koło 0”. Niektórzy, argumentując swą decyzję, wykonywali odpowiednie czynności zaznaczania elementów na osi liczbowej. W przypadku zbioru $\{\dots, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$ podkreślano, iż skupianie się elementów wokół 0 ma charakter dwustronny. Dla jednych była to informacja, że „0 jest kresem górnym tego zbioru, gdyż pozostałe elementy tego zbioru, nieskończona ilość, skupiają się wokół niego”, inni natomiast byli przekonani, że „0 jest jednocześnie kresem dolnym i górnym”. Podobna argumentacja pojawiła się w przypadku zbioru E z zadania 8. Jedna z osób rozważając zbiór E wykonała następujący rysunek:



rys. 8.

oraz napisała: „Kres dolny wynosi -1 , bo te liczby zbliżają się do -1 , lecz nigdy jej nie osiągną i to jest największa liczba nie należąca do zbioru. Kres górny wynosi 1 , gdyż te liczby coraz bardziej zbliżają się do 1 , lecz nigdy nie osiągną jej i to jest najmniejsza liczba nie należąca do tego zbioru”. W trakcie rozmowy, na pytanie badającego, dlaczego na osi liczbowej są tylko -1 i 1 , autor wyjaśnił: „Te dwie liczby tylko się liczą, bo wszystkie liczby ze zbioru „grupują się” wokół -1 i 1 , a więc to będą kresy” (na rysunku dokumentowane było to umieszczeniem coraz bliżej -1 i 1 dużej liczby kropek po obu stronach tych punktów). „Widać, że w tych ułamkach licznik i mianownik się zbliżają, więc wszystko zmierza do jedynki z plusem, bądź z minusem” — tu pojawił

się rysunek osi liczbowej:



rys. 9.

KOMENTARZ

Opisany tu rodzaj skojarzeń prawdopodobnie ma swoje źródło w sposobie wizualizacji zbioru nieskończonego w skończonym modelu osi liczbowej. Wyrażenia: „elementy zbioru grupują się wokół kresu”, „skupiają się” są odbiciem obrazu pojęcia zbioru nieskończonego u badanych uczniów. Błędnie żąda się, by regularne zachowanie — „grupowanie się” dotyczyło nieskończenie wielu elementów zbioru. Wyobrażenia te stają się wręcz pseudo-definicjami, świadczącymi o szczególnych dekompozycjach pojęcia kresu zbioru ograniczonego.

Analiza materiału zebranego i opisanego w części początkowej tego rozdziału, skłania do postawienia hipotezy o istnieniu dwóch grup koncepcji, które można zdefiniować następująco:

A: Kres to „to co na końcu zbioru”,

B: Kres to granica (w sensie metaforycznym).

Badani reprezentujący koncepcje grupy A porządkowali zbiór poszukując „pierwszego”, „ostatniego” jego elementu. Niektórzy z nich porządkowali elementy według:

1. wartości liczbowej, poszukując najmniejszej lub największej wartości — grupa A1,
2. kolejności na liście w zapisie zbioru, poszukując końcowych elementów tej listy — grupa A2.

Badani reprezentujący koncepcje grupy A1 korzystali najczęściej z osi liczbowej, poszukując elementów wysuniętych skrajnie na lewo, bądź na prawo na tej osi, zakładając najczęściej przy tym, iż kresem może być tylko element należący do zbioru. Stąd w przypadku kresu górnego zbioru $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ i kresu dolnego zbiorów $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$, $\{\dots - \frac{8}{9}, -\frac{6}{7}, -\frac{4}{5}, -\frac{2}{3}, 0, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, \dots\}$ badani dawali odpowiedzi: „Kres nie istnieje, bo nie istnieje liczba najmniejsza (największa) należąca do zbioru; ten zbiór jest nieskończony”. Badani licealiści prezentujący koncepcje grupy A1, wyznaczając kresy zbioru z zadania B,

twierdzili, że: „ $\frac{1}{3}$ jest kresem górnym i ograniczeniem górnym jednocześnie, zaś kres dolny nie istnieje, bo nie istnieje w tym zbiorze liczba najmniejsza; ten zbiór nie jest ograniczony z dołu”, wyrażając w rozmowach przekonanie, iż pojęcia kres i ograniczenie mogą być używane równoważnie lub — jak wyjaśnił jeden z badanych — „zamiennie, gdyż kres i ograniczenie oznaczają to samo”.

Brak umiejętności rozgraniczenia zakresów pojęć kres i ograniczenie spowodowany jest być może trudnościami językowymi. Pamiętać bowiem należy, iż „ograniczony” i „skończony” są w języku potocznym synonimami; stąd, być może, w wykonaniu zadania C, wśród osób prezentujących koncepcje grupy A1, pojawiły się odpowiedzi: „Zbiór ograniczony jest skończony”, „każdy zbiór ograniczony jest z dołu najmniejszą, a z góry największą liczbą”.

Inną zauważoną kwestią jest wpływ mereologicznych skojarzeń na rozumienie pojęcia zbioru (patrz ANEKS 1), wyrażający się w traktowaniu każdego podzbioru jako części zbioru, a w konsekwencji na uznawaniu, że jest on zawsze ograniczony. „Każdy podzbiór zbioru, ograniczonego czy nieograniczonego, jest ograniczony” — twierdzili badani tej grupy. Pozostające w sprzeczności z nim przekonanie, że zbiór ograniczony, „ograniczony jest z góry liczbą największą, a z dołu najmniejszą” sugerowałoby, iż w każdym zbiorze istnieje element najmniejszy, największy. Terminy: ograniczenie dolne (górne), liczba najmniejsza (największa) funkcjonują w ich skojarzeniach jako interpretacje kluczowego elementu obrazu pojęcia, a mianowicie postrzegania i uznawania, że „końce zbioru” są jego kresami. „Widzenie” na osi liczbowej nieskończenie wielu elementów zbioru w skończonym modelu rodzi przekonanie, że element, którego nie „widać”, nie może być jego kresem.

Fakt akceptowania i posługiwania się tylko fragmentem definicji szkolnej pojęcia kresu przez niektórych badanych uczniów (patrz str. 65) wynikać może z braku rozumienia roli definicji. W konstrukcji matematyki wyraża się to jej zastępowaniem przez wypracowane w toku rozwiązywania zadań procedury, dobrze funkcjonujące w typowych przypadkach. Jednym z zasadniczych warunków świadomości metodologicznej, której rozwijanie jest ważnym celem nauczania matematyki, jest — zdaniem Krygowskiej (1977a, s. 143) „prawidłowe rozumienie przez ucznia roli definicji matematycznej”. Przeciętny uczeń, jak pokazało badanie, nie zdaje sobie sprawy z tego, że definicja wyznacza sens pojęcia i — co więcej — umożliwi wytworzenie jego obrazu. Gdy brak obrazu, uczeń staje bezradny przed najprostszym pytaniem, na które odpowiedź otrzymałby od razu, gdyby tylko umiał wykorzystać definicję.

Konwencjonalne matematyczne rozumowanie zawiera co prawda wiele nie dość precyzyjnie uzasadnionych ogniów, jednakże najważniejsza w nim jest świadomość, że są to tylko uproszczenia, skróty, które można rozwinąć. Głębokie rozumienie wyraża się nie tylko gotowością rozwinięcia tych zamierzonych

uproszczeń, ale też wiedzą, jak można to zrobić. W tym badaniu posługiwanie się przez badanych skrótami myślowymi wynika z braku rozumienia podstawy działania oraz braku operatywnej znajomości definicji kresu zbioru. Można przypuszczać, że elementy koncepcji pojęcia kresu, opisywane słowami-kluczami „ograniczoność” i „najmniejsza (największa) wartość”, dobrze funkcjonowały w sytuacjach szkolnych. Kontekst, oś liczbowa, ustalony (domyślnie) porządek, ciągłość i gęstość zbioru liczb rzeczywistych redukuje rozumienie pojęcia kresu zbioru do przypadku szczególnego. Badani uwierzyli, że operowanie słowami-kluczami wystarczy do otwierania wszystkich sytuacji.

Choć wspólnym elementem wszystkich koncepcji grupy A1 jest sposób porządkowania elementów zbioru (najczęściej zresztą nie uświadomiony) według ich wartości liczbowej, jedynie operatywne są te, które nie zakładają konieczności przynależności kresu do zbioru. Badani uczniowie, prezentujący takie wyobrażenia, na ogół nie posługiwali się wyrażeniami „najmniejsze ograniczenie górne”, „największe ograniczenie dolne”, a używali jedynie terminu „najmniejsza liczba nie należąca”, „największa liczba nie należąca”, czyniąc to jednak zgodnie z sensem pojęcia kresu zbioru ograniczonego. Być może celowo unikali w ten sposób przypisywania funkcji „ograniczania” elementowi zbioru, którego nie chcieli utożsamiać z kresem.

W koncepcjach grupy A2, kres jest utożsamiany z symbolem użytym do opisu konstrukcji zbioru. Badani uczniowie, reprezentujący koncepcje tej grupy, porządkowali elementy zbioru według ich kolejności na liście w zapisie zbioru, ustalając w ten sposób kresy dolny i górny jako odpowiednio pierwszą i ostatnią pozycję tej listy. Część badanych uznawała za kres pierwszy (ostatni) wymieniony element zbioru, ignorując konwencjonalne znaczenie symbolu „...” — grupa A21. Inni badani uczniowie — grupa A22 — brali pod uwagę symbol „...” i interpretowali go na dwa sposoby:

1. kres nie istnieje — grupa A221,
2. kres wynosi $\pm\infty$ — grupa A222.

Zauważono, że rodzaj sformułowania: „nie istnieje kres”, „kres istnieje i wynosi $\pm\infty$ ” — związany jest z pojmowaniem nieskończoności. Mówiąc, że kres nie istnieje, dobierano takie zwroty, które wskazywałyby na rozumienie nieskończoności w kategoriach „nieskończoności nieograniczonej” (niewyobrażalnie dużej, bądź małej, nieskończenie dużej, bądź małej), a kresu jako wartości nieosiągalnej. Ci badani, którzy twierdzili, że kres istnieje i wynosi $\pm\infty$, mówili o wartości osiągananej w nieskończoności; $-\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n}$, $-\frac{n}{n+1}$, $\frac{n}{n+1}$, $-\frac{3+2n}{2n}$, $\frac{3+2n}{2n}$ mogą, zdaniem niektórych, to wyrażać. Inni licealiści — grupa A23 — uznawali, iż pierwszy (ostatni) element zbioru utworzonego z wartości ciągu monotonicznego stanowi jego kres dolny (górny).

Osobliwym pojmowaniem kresu jest postrzeganie go jako pewnej informacji zakodowanej w symbolicznym opisie zbioru nieskończonego, bez odwoływania się do definicji (czy to formalnej, czy odformalizowanej) bądź innych wyobrażeń. Często ujawnione skojarzenia stawały się pseudo-definicjami, regulującymi sposób poszukiwania kresu w zależności od miejsca występowania symbolu „...” w oznaczeniu zbioru. Różniły się one zupełnie od sensu pojęcia kresu zbioru nadanego definicją. Symbol jest dla tych badanych podstawowym nośnikiem informacji na temat kresu, determinującym sposób organizowania czynności związanych z jego wyznaczaniem.

Badanie ujawniło, że pojęcie zbioru odgrywa w rozumieniu pojęcia kresu rolę kluczową i nie można liczyć na to, że uczeń potrafi zrozumieć pojęcie kresu, jeśli nie zadba się o stworzenie rzetelnych podstaw do tego rozumienia. Szczególnie niepokojące są częste przypadki odwoływania się do kolejności, a nie znaczenia symboli opisujących konstrukcję zbioru. Może się to wiązać z trudnościami w rozumieniu zbioru nieskończonego. Być może ma to związek ze specyfiką procesu nauczania – uczenia się, a dokładniej z koncepcją wprowadzania i kształtowania rozumienia pojęcia kresu w nauczaniu licealnym, opartego na jednym tylko modelu. W przypadku, gdy model geometryczny okazuje się nieadekwatny do potrzeb rozważanej sytuacji, tworzony jest nowy, „językowy”, degenerujący i blokujący rozumienie pojęcia. Dało to znać o sobie w odpowiedziach na pytania i polecenia z zadań 2 (w przypadku zbioru $\{\dots, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$) oraz 8. Badani, którzy poszukując kresów zbioru odwoływali się do symboli i interpretowali je, poproszeni zostali o wykonanie zadania dodatkowego A, w którym rozważono zbiór $\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$, a więc ten sam, co w zadaniu 2. W zadaniu A obydwie kresy wyznaczyło poprawnie po 8 uczniów z klasy II i III, natomiast w zadaniu 2 trafnie odpowiedziało 16 uczniów klasy III oraz 10 klasy II. W zadaniu A wyznaczenie kresu dolnego nie stanowiło trudności. Można tylko przypuszczać, że -1 , jako najmniejszy z wymienionych w zadaniu elementów i pierwszy na liście, był jedynym kandydatem na kres dolny. Stąd stwierdzenie, że -1 jest kresem dolnym, pojawiło się w zdecydowanej większości odpowiedzi (32-III, 26-II)⁵. Poszukiwanie kresu górnego „symetrycznie”, tj. na końcu zbioru, powodowało kłopot, stąd m. in. stwierdzenia: „kres nie istnieje” lub „kres istnieje i wynosi $\frac{1}{4}$ ”.

W zadaniu 2 większa liczba poprawnych odpowiedzi sugerowałaby, że to oznaczenie zbioru jest bardziej „czytelne” (takie zresztą uwagi pojawiły się w rozmowach). Dalej można przypuszczać, że powodem tego jest taki zapis zbioru, który pozwala, bez jawnego przywoływania osi liczbowej, widzieć ele-

⁵Zapis (32-III, 26-II) oznacza, że dane stwierdzenie dotyczy odpowiedzi udzielonych przez 32 uczniów klasy trzeciej oraz 26 klasy drugiej.

menty w ich naturalnym uporządkowaniu, tj. większe od 0: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ... i ponadto „malejące”, z drugiej zaś ujemne ... $-\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{3}$, -1 i „rosnące”. Prawdopodobnie ten rodzaj wyobrażeń, bardzo silnie powiązanych z modelem geometrycznym, kształtowany był w nauczaniu. W takiej wizualnej reprezentacji kres to po prostu „koniec zbioru” zaznaczonego na osi liczbowej. Koncepcje grupy A2 zbudowane są na braku rozróżnienia między mocą zbioru wyrazów ciągu a ograniczeniami zbioru jego wartości.

Warto zwrócić jeszcze uwagę na fakt, iż opisany tu rodzaj wyobrażeń dominuje głównie w odpowiedziach drugoklasistów. Nie znają oni jeszcze pojęcia granicy ciągu, rzadziej odwołują się do metaforycznego ruchu („dążenia”, „zbliżania się”). W sytuacjach, gdy model geometryczny okazuje się niewystarczający do znalezienia odpowiedzi, poszukują oni innych sposobów wyznaczenia kresów, odwołując się najczęściej do symbolicznego kodu zbioru. Na tym etapie nauczania należy dbać o kształtowanie prawidłowych, głębokich intuicji pojęcia, aby w trakcie formalnego poznawania kresu, a później granicy ciągu, mogły one dobrze funkcjonować w niezmienionej postaci.

Intuicje dotyczące kresów zbioru, a wyrażone metaforą ruchu, „skupiania się”, „zbliżania się”, „dążenia” do pewnej wartości — to wspólne elementy wszystkich koncepcji grupy B. Prawdopodobnie statyczne koncepcje pojęcia (ich przystosowywanie czy odrzucanie, gdy nie prowadziły do wyznaczenia kresu zbioru) zostały zastąpione nowymi, dynamicznymi jego koncepcjami.

Wyobrażenia grupy B, konstruowane w oparciu o „ruch” kojarzony wręcz z ciągłością i odczuciem, że liczy się regularne zachowanie nieskończenie wielu elementów zbioru, nie wystarczały w większości przypadków do znalezienia poprawnej odpowiedzi na stawiane w zadaniach pytania. Myślę, że powstawanie koncepcji tej grupy determinowane jest głównie „widzeniem” zbioru na osi liczbowej. Geneza skojarzeń, o których mowa, może być również związana z rozumieniem nieskończoności — często dla ucznia elementy zbioru tworzą się stopniowo, a nie są one dane od razu. Kres to wartość, do której zbliżają się elementy zbioru w sposób „wzrastający” czy „malejący”; „dążą”, „zbiegają się”, ale nie osiągają wartości granicznej — kresu; kres można jedynie oszacować, np. obliczając odpowiednią granicę w plus (minus) nieskończoności — to wyobrażenia grupy B1.

Fundamentem koncepcji grupy B2 jest przekonanie, że kresem może być jedynie wartość, wokół której „grupuje się” nieskończenie wiele elementów zbioru. Wizualne reprezentacje osi liczbowej, wyobrażenia oderwane od definicji, milcząco ustalony porządek stanowią potencjalny czynnik konfliktu pomiędzy tworzonym przez ucznia a kształtowanym na lekcjach obrazem pojęcia kresu zbioru. Opisane skojarzenia z osią stanowią ten rodzaj niebezpieczeństwa, o którym pisze Krygowska (1977a, s. 134 – 136): „Czasem natrętny obraz

modelu sugeruje jego własności szczególnie”, które nie powinny być zachowane. Szczególnie niepokojące w tym modelu są skojarzenia z ruchem, ciągłym „zbliżaniem się” do pewnej wartości — kresu, czy „skupiania się” wokół niego. Ten model może stanowić rodzaj blokady w rozumieniu. Co więcej, ta intuicja rzucać może na rozumienie poznawanego później pojęcia granicy ciągu. Dla wielu badanych narzędzie analityczne (granica ciągu), wygodne w badaniu pewnego rodzaju ciągów, zostało rozciągnięte na inne pojęcia i sytuacje dotyczące ciągów. Formalnie, definicje obu pojęć różnią się w sposób oczywisty, ale pojawia się także pewne ich „podobieństwo”: na to, by M było kresem, wystarczy, by w otoczeniu M o promieniu ε znalazł się element zbioru, a w przypadku granicy — by wszystkie wyrazy ciągu począwszy od pewnego były w tym otoczeniu. W obydwu sytuacjach inny jest charakter otoczeń. W przypadku granicy otoczenie jest ustrukturuwane; konstruowanie otoczenia wiąże się z obserwowaniem, co dzieje się z wartościami wyrazów ciągu ze wzrostem wskaźnika. W przypadku kresu otoczenie jest jednowymiarowe, statyczne; tworzy je dana (gotowa) w konstrukcji zbioru informacja o jego elementach. W przypadku ograniczonego ciągu monotonicznego, nieskończonego, tj. takiego, w którym porządek wyrazów jest zgodny z porządkiem wyznaczonym przez relację mniejszości lub większości, jeden z kresów (zbioru utworzonego z wyrazów tego ciągu) jest granicą ciągu i to jest sytuacja, w której skojarzenie obu pojęć może być pożądane i nie musi rodzić błędów. W innych zaś przypadkach skojarzenie obu pojęć może rozwijać intuicje dotyczące kresów w złym kierunku. Ci spośród badanych uczniów, którzy w rozumowaniu odwoływali się do granicy ciągu (zadania 2b, 8, B) udzielali błędnych odpowiedzi. To sygnał, że ich intuicje dotyczące kresu nie odnosiły się do struktur głębokich. W ten sposób niejasne i fragmentaryczne rozumienie pojęcia kresu zostało wchłonięte przez pojęcie granicy ciągu. Fakt asymilacji obu pojęć uwidocznił się jasno w sytuacji nietypowej. Ci sami uczniowie, którzy w odpowiedziach pisemnych kojarzyli kres z granicą, w czasie rozmów dotyczących wyznaczania kresów zbioru uporządkowanego przez relację podzielności (zadanie D) nie udzielili żadnych odpowiedzi.

Warto w tym miejscu przypomnieć, że „wybór odpowiedniego modelu niejednokrotnie rozstrzyga o sukcesie” (Krygowska, 1977a, s. 135), zaś różnorodność modeli sprawia, że trudne pojęcia szczególnie intensywnie nasycone są różnorodnymi intuicjami. Jednomodelowa, szkolna prezentacja pojęcia kresu zbioru ogranicza różnorodność i wielość skojarzeń. Rola nauczyciela organizującego proces dydaktyczny ma tu, jak widać, ogromne znaczenie. Wydaje się to tym bardziej istotne, w świetle prowadzonych badań, iż uświadamia, że uczniowie kojarzący kres z granicą to głównie trzecioklasiści.

3.2 Analiza wykonania zadań 1, 3, 6, 7, 10, czyli kres zbioru w praktyce szkolnej

Podrozdział ten jest sprawozdaniem z częściowej weryfikacji hipotezy badawczej o istnieniu dwóch grup koncepcji. Celem tej weryfikacji jest uzyskanie odpowiedzi na pytania:

1. Czy badani uczniowie posługują się w wykonaniu zadań tej grupy zwróceniami lub wyrażeniami sygnalizującymi skojarzenia charakterystyczne dla koncepcji A lub B?
2. Czy i jakie „nowe” koncepcje pojęcia kresu ujawniają te zadania?
3. Czy badani traktują warunek przynależności kresu do zbioru jako warunek konieczny istnienia kresu?

Przeanalizujmy odpowiedzi badanych na pytania i polecenia zadań 1, 3, 6, 7, 10, dotyczących wyznaczania kresów przedziału liczbowego lub zbiorów skonstruowanych przy użyciu przedziału, czyli takich, które spotyka się w podręcznikach szkolnych i zbiorach zadań. W zadaniach tej grupy wyeliminowano konieczność poszukiwania hipotetycznego „kandydata na kres”, „podsuwając” go w postaci końca przedziału. W ten sposób, przez wytworzenie u badanego odczucia znajomości problemu, stworzono warunki umożliwiające dotarcie do wielu skojarzeń i intuicji wskazujących, na ile czynności związane z wyznaczeniem kresu są wyrazem głębokiego rozumienia pojęcia.

W odpowiedziach na pytania zadania 3 dominowały intuicje dotyczące „końców zbioru”. W trakcie prowadzonych rozmów ten rodzaj mechanicznego określenia kresów kojarzony był głównie (16-II, 19-III)⁶ z symbolicznym jego zapisem. Nieliczni badani (3-II, 3-III) odwoływali się do osi liczbowej, udzielając m. in. wyjaśnień: „ $\sqrt{5}$ jest największym elementem zbioru $G = (-2, \frac{1}{2}) \cup (0, \sqrt{5})$, tzn. najbardziej wysuniętym na prawo na osi liczbowej”; „ $\sqrt{5}$ jest kresem górnym, bo wszystkie elementy zbioru G leżą na lewo na osi liczbowej”. Wyznaczanie kresów sprowadzano do zaznaczenia na osi liczbowej czterech liczb $-2, \frac{1}{2}, 0, \sqrt{5}$ oraz rozstrzygnięcia, która z nich jest największa, a która najmniejsza (koncepcje grupy A). Kilkoro badanych wspomniało w rozmowie o „dążeniu” elementów tego zbioru do $\sqrt{5}$, a na pytanie badającego, co mają na myśli, tłumaczyli, jak rozumieją rysowanie przedziału otwartego na osi liczbowej, używając przy tym wyrażenia „dąży do $\sqrt{5}$ ”: „ $\sqrt{5}$ nie należy do zbioru G , to oznacza to kółko na osi liczbowej nie zamalowane. Wszystkie

⁶Zapis (16-II, 19-III) oznacza, że dane stwierdzenie dotyczy odpowiedzi udzielonych przez szesnastu uczniów klasy drugiej oraz dziewiętnastu klasy trzeciej.

inne elementy (tu wskazał badany na oś liczbową) należą do przedziału i chociaż $\sqrt{5}$ nie należy, to należą wszystkie, które są bardzo blisko tej liczby, dążą do niej” (po lewej stronie $\sqrt{5}$ zaznaczył kilka kropek). Znaleźli się również uczniowie (2-II, 1-III), którzy w rozmowie odwoływali się do własnej „definicji” kresu. Oto dwie takie odpowiedzi: „Kresu górnego należy poszukiwać wśród elementów -2 oraz $\sqrt{5}$. Właściwym kresem będzie -2 , ze względu na to, że należy do zbioru (przedział zamknięty)”; „Kresu górnego należy poszukiwać wśród elementów: $-2, \sqrt{5}$. Aby wybrać właściwy należy się zastanowić, który z nich jest najmniejszą liczbą nie należącą do zbioru lub największą liczbą należącą do zbioru. Kresem górnym jest w tym przypadku $\sqrt{5}$.” Autor pierwszej odpowiedzi w trakcie rozmowy wyjaśnił, że „zgodnie z definicją kres musi do zbioru należeć, zatem -2 jest tym końcem, który do niego należy”. „Definicja”, którą miał na myśli, nie miała jednak wiele wspólnego z definicją pojęcia. Badany, który podał drugą odpowiedź, również sygnalizował, iż sformułowane przez niego wnioski „wynikają z definicji”, a na pytanie badającego, który z warunków przez autora zapisanych jest spełniony dla $\sqrt{5}$ stwierdził: „ $\sqrt{5}$ jest największą liczbą należącą do zbioru. Kres to po prostu dany koniec zbioru”. Na pytanie, czy $\sqrt{5}$ należy do zbioru, po chwili zastanowienia powiedział: „Tak, to znaczy właściwie nie, bo to zaznacza się kółkiem otwartym na osi liczbowej, ale to jest koniec, największy w zbiorze”.

Badający: Który więc warunek zapisany przez Ciebie należy odnieść do $\sqrt{5}$?
Uczeń: Teraz widzę, że to jest tak, $\sqrt{5}$ jest właściwie najmniejszą liczbą nie należącą do zbioru.

Badający: Wyjaśnij, dlaczego jest najmniejszą.

Uczeń: Jak postawię kropkę za $\sqrt{5}$, gdyby jakiś element większy był tym końcem przedziału, to już byłby większy od $\sqrt{5}$, czyli $\sqrt{5}$ jest najmniejszym.

Warto w tym miejscu zauważyć, że większość badanych zupełnie mechanicznie ustala związek kresu z końcami przedziału. Nie byłoby to szczególnie niepokojące, gdyby (szczególnie w początkowej fazie poznawania pojęcia) sąd ten był weryfikowany definicją. Jak pokazała analiza następnych zadań, rutynowa procedura wyznaczania kresów była przenoszona na inne sytuacje. Przedstawiona wyżej rozmowa wskazuje, że nie należy poprzestawać na wskazaniu kandydata na kres. Tak oczywista dla uczniów sytuacja może posłużyć do kształtowania prawidłowych, pożądaných wyobrażeń.

Zadanie 7 to zadanie nietypowe (sprzeczne warunki). Należy dobrać a i b tak, aby kresem dolnym zbioru $F = (a, 6) \cup (-3, b)$ było -2 , a górnym 7 . W zadaniu tym zdecydowana większość (19-II, 28-III) ustaliła, że poszukiwanymi liczbami są $a = -2$ i $b = 7$; pojawienie się przedziałów w treści zadania uruchomiło procedurę „końców”. Chcąc zminimalizować potencjalne trudności odformalizowania opisu zbioru i podkreślić, iż zbiory A, B, C, D (zada-

nie 1) są złożone z wybranych elementów przedziału, stosowano na przemian słowny i symboliczny opis ich konstrukcji. Niezależnie jednak od zastosowanej formy opisu, kolejność czynności ucznia uruchamia schemat „przedział”, zdefiniowany przez końce. Większość (18-II, 20-III) badanych uczniów w przypadku zbiorów B i D twierdziła, że kresem górnym zbioru B jest $\sqrt{3}$, zaś kresem dolnym zbioru D liczba π . Gdy w rozmowie badający prosił o konfrontację wskazanego „końca” zbioru z informacją: „Do zbiorów B i D należą liczby wymierne”, usłyszał: „Właściwie kresem górnym zbioru B i kresem dolnym zbioru D powinna być liczba wymierna (dodawano: element należący do zbioru), ale nie da się przecież wskazać liczby wymiernej najbliższej π czy $\sqrt{3}$ ”. Nieliczni podjęli próbę wskazania takich, dając w pisemnej pracy odpowiedzi: 3, 14 i 1, 71 lub 3, 1 i 1, 7 lub 3, 15 i $\frac{18}{10}$; inni twierdzili, że kresy nie istnieją. 100% błędnych odpowiedzi udzielonych w przypadku zbioru A to skutek zastosowania schematu „przedziału”. Idee działania wszystkich badanych zwerbalizował jeden z nich następująco: „Podejrzany elementem jest 2 i 2 jest liczbą naturalną, więc skoro $2 \in N$, to jest kresem dolnym zbioru A ”. Inny tak opisał swój dylemat w przypadku zbioru C (nie był to zresztą jeden przypadek): „Kres górny zbioru $C = \{x \in N : x(0, 5\frac{1}{2})\}$ wynosi ... To będzie 5 lub 6... Wybieram 5”. Inni wybierali 5 bądź 6. Nikt nie dociekał, jak naprawdę „wygląda” zbiór C , nikt nie zauważył, że jest to zbiór skończony. Był to prawdopodobnie moment, o którym pisał Skemp (1982): „dla ucznia nastawionego na struktury powierzchniowe wątpliwą pomoc stanowi odwołanie się do struktur głębokich w przypadku utknięcia”. Prawdopodobnie z tych samych powodów, a więc działania w izolacji od definicji w zadaniu 6, badani (23-II, 32-III) uznali, że „liczba 9 nie ogranicza zbioru A z góry, gdyż to 8 jest ograniczeniem górnym i kresem górnym jednocześnie dla zbioru $A = (7, 8) \cup (-2, 5)$ ”. Takie postępowanie ma na celu „wyprodukowanie” rozwiązania, „załatwienie” problemu poszukiwania kresów gotowymi schematami ustalającymi te kresy jako elementy otwierające i zamykające przedział.

W zadaniu 10 większość badanych twierdziła, że „kres dolny zbioru E wynosi 20, a górny 0”, motywując swoją decyzję rachunkiem: „ $x(t = -4) = -20$, a ostatni kres górny $x(t = 1) = 0$ ”. Nikt nie udzielił poprawnej odpowiedzi. Jedna z rozmów była szczególnie interesująca. Badany uczeń podczas sprawdzianu napisał: „Kres dolny wynosi -20 , bo jest to najmniejszy element zbioru, gdyż $x \in \{-20, \dots, 0\}$ i $x = t(1 - t)$. Kres górny jest równy 0, bo 0 jest największym elementem zbioru”. Wykonał rysunek (zob. rys. 10).

Badający: Wyjaśnij, jak wyznaczyłeś kresy wykorzystując rysunek.

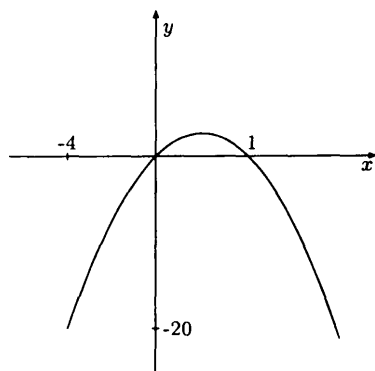
Uczeń: Właściwie takich zadań nie robiliśmy na lekcji, ale chciałem zobaczyć, jak jest z tymi xkami ze zbioru E , więc zrobiłem rysunek.

Badający: Co na nim widać?

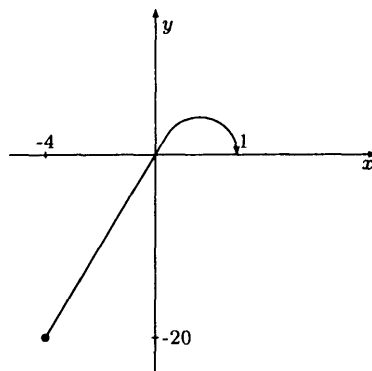
Uczeń: No, że -20 jest najmniejsze, a 0 największe.

Badający: Pokaż, jak tę informację odczytujesz z rysunku.

Badany zademonstrował (zob. rys. 11).



rys. 10.



rys. 11.

Rozpoczął rysowanie od punktu o współrzędnych $(-4, -20)$, nie odrywając ołówka od narysowanej krzywej, aż dotarł do punktu o współrzędnych $(1, 0)$; nie zwracał przy tym uwagi na ograniczoność zbioru wartości funkcji $f(t) = t^2 - t$, dla $t \in \langle -4, 1 \rangle$.

Analiza zadań drugiej grupy potwierdziła przypuszczenie, sformułowane w postaci hipotezy badawczej (patrz str. 76), że koncepcje licealistów pojęcia kresu zbioru ograniczonego koncentrują się wokół dwóch zasadniczych sposobów „myślenia” o nim. Ze względu na specyfikę tej grupy zadań, dominującymi wyobrażeniami były te opisane przez końce zbioru. Przybrały one wręcz formę schematu-procedury wyznaczania kresów jako pierwszego i ostatniego elementu zbioru, elementu otwierającego i zamykającego przedział. Większość badanych była przekonana, iż warunkiem koniecznym bycia kresem jest przynależność do zbioru.

3.3 Operatywny charakter rozumienia pojęcia kresu zbioru

Celem trzeciej grupy zadań było zbadanie, czy wiedza, którą posiadają uczniowie klas drugich i trzecich ma cechy wiedzy operatywnej, a więc takiej, w której ujawniają się aspekty algorytmiczny i intuicyjny. Szczególnie w przypadku tej grupy zadań o sukcesie ucznia decydowało postępowanie oparte na rozumieniu intuicyjnym, elastycznym (S. Turnau, 1990, s. 24). Zadania tej grupy (4, 5, 9) to głównie zadania „otwarte”, w których należy skonstruować zbiór o danym kresie (np. zadania 4 i 9) i takie (zadanie 5), w którym proponuje się niestandardowe uporządkowanie zbioru. Są to zadania rzadko pojawiające się w podręcznikach i zbiorach zadań. Do ich rozwiązania nie wy-

starczy algorytmiczne, schematyczne postępowanie. W zadaniu 4 badani (7-II, 14-III) utożsamili symbol „...” z miejscem, które należy wypełnić. Toteż w ich odpowiedziach (pomimo braku jakichkolwiek dodatkowych warunków wynikających z treści zadania), w miejscu trzech kropek pojawiły się liczby 0,12; 0,25; 0,66; lub 0,17; 0,22; 0,55 itp. Produkcje te były niejednokrotnie poprzedzone misternym rachunkiem w rodzaju:

„ $H = \{0, 10; 0, 11; 0, 12; 0, 19; 0, 20; 0, 25; 0, 30; 0, 55; 0, 99\}$
 0,12 0,13 0,14 0,15 0,16 0,17 0,18
 0,21 0,22 0,23 0,24 0,25 0,26 0,27
 0,28 0,29.”

Te błędne odpowiedzi mogą wynikać z braku rozumienia oznaczenia zbioru i symbolicznego opisu jego konstrukcji, bądź dotyczyć trudności odformalizowania zwrotu „kres górny zbioru H wynosi 1 i $1 \notin H$ ”. Na to wskazywałyby rozmowa z uczniem klasy III, który jako jeden z niewielu podjął próbę znalezienia zbioru; inni próbowali „obejść” tę trudność konstruując przedział $H = (0, 10; 1)$:

Badający: Powiedz, coś więcej na temat zbioru H (napisał $H = \{\dots; 0, 99; 0, 999; 0, 9999; 0, 99999\}$), niż to co można przeczytać w Twojej pracy.

Uczeń: Wszystkie elementy, które były w zbiorze H to te trzy kropki i dopisałem dalej brakujące, tak jak widać.

Badający: Czy kresem tego zbioru nie jest 0,99999?

Uczeń: I tak i nie. Chodziło mi o to, że tych dziewiątek ma być bardzo dużo.

Badający: Ile?

Uczeń: Nieskończona ilość. Gdybym jednak zapisał na końcu 0,999... to znaczyłoby, że kresem jest 0, (9) a nie 1.

Badający: Czy jest prawdą, że $0, (9) = 1$?

Uczeń: Nie, skądże. Tu powinien być znak $0, (9) \approx 1$, bo przecież $0, (9)$ jest bardzo blisko 1, ale nigdy równe nie są. W tym zbiorze trzeba napisać elementy (nieskończenie dużo) jakimś wzorem, żeby one coraz bardziej zbliżały się do 1, ale jej nie osiągały.

W zadaniu 9, podając przykład nieskończonego zbioru G o kresie dolnym 2 i $2 \notin G$, niektórzy badani (24-II, 19-III) konstruowali przedział $(2, +\infty)$, a w rozmowach mówili wyłącznie o jego krańcach jako kresach. Nie bez powodu, jak wskazywały rozmowy, umieszczono w tej konstrukcji symbol $+\infty$, aby podkreślić, iż jest to zbiór nieskończony. Zauważyłam bowiem, iż wielu badanych traktuje przedział, np. $(2, 4)$, jako nie nieskończony. Tylko dwaj uczniowie klasy III próbowali inaczej skonstruować zbiór G . Oto odpowiedź jednego z nich: „ $(2 + \frac{1}{n})$, gdy $n \in \mathbb{N}$ i elementy tego zbioru powstają przez podstawienie za n kolejnych liczb naturalnych, tzn. $G = (2 + 1, 2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{3}, \dots)$.” Autor

wyjaśnił, że: zapisał „ $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, więc $2 + \frac{1}{n} \rightarrow 2$ ” i przeczytał zapisane wyrażenia używając zwrotu „dąży do”, dodając, że $2 \notin G$, bo „ $\frac{1}{n}$ nigdy nie będzie równe 0”. W zadaniu 5 badani (19-II, 28-III) zignorowali informację daną grafem na temat uporządkowania zbioru Z i twierdzili, że „1 jest kresem dolnym, bo jest najmniejszym elementem zbioru, zaś 11 jest największą liczbą w tym zbiorze, czyli jest kresem górnym”. W trakcie rozmów, na pytanie, czy graf nie ustala innej kolejności elementów tego zbioru, stwierdzali: „Nie rozumiem, jak między 1 i 11 może być inna kolejność”.

Tę czterdziestosiedmioosobową grupę poproszono o wykonanie zadania D. Czterdzieści pięć osób odwołało się do naturalnego uporządkowania zbioru twierdząc, że: „2 jest kresem dolnym, gdyż jest to liczba najmniejsza”.

Dla ukształtowania operatywnego obrazu pojęcia kresu zbioru konieczne jest rozwijanie dotyczących go skojarzeń w wielu różnorodnych sytuacjach. Brak systematycznych działań ukierunkowanych na ten cel, powoduje blokowanie intuicji i wyobrażeń, które u wielu osób funkcjonują jedynie jako jednokierunkowe skojarzenia bądź są zastępowane wadliwymi procedurami. Sprzyja temu niedostateczna liczba sytuacji i problemów, które kształtowałyby intuicyjne rozumienie kresu zbioru.

4 Wnioski

Przeprowadzone badania pozwoliły na ujawnienie różnorodnych, czasem bardzo osobliwych wyobrażeń i intuicji związanych z pojęciem kresu zbioru ograniczonego. Pokazały, iż koncepcje licealistów grupują się wokół dwóch zasadniczych sposobów myślenia o nim:

A: Kres to „to co na końcu zbioru” Badani uczniowie prezentujący koncepcje tej grupy (A1) odwoływali się do osi liczbowej, uporządkowania wyznaczonego przez nią, poszukiwali elementów skrajnie wysuniętych na prawo bądź na lewo, zakładając najczęściej przy tym, iż kresem jest element należący do zbioru. Najbliższe właściwemu znaczeniu pojęcia są wyobrażenia związane z poszukiwaniem najmniejszego (największego) elementu należącego, bądź nie należącego do zbioru, prezentowane przez niewielu licealistów.

W koncepcjach grupy A2 myśl badanych krążyła wokół symboli użytych do opisu konstrukcji zbioru. Porządkowali oni elementy według ich kolejności na liście w zapisie zbioru, ustalając w ten sposób kresy dolny i górny jako odpowiednio pierwszy i ostatni element tej listy. W przypadku zbiorów utworzonych z wyrazów ciągu nieskończonego ujawnił się

degenerujący wpływ zatarcia różnicy między ciągiem i zbiorem wyrazów ciągu. Na braku tego rozróżnienia zbudowane są koncepcje grupy A2. Charakterystycznym elementem zachowań wielu osób była skłonność do posługiwania się schematami i nierzadko tworzenie własnych procedur, czysto symbolicznych, stanowiących normy postępowania w określonej sytuacji (na przykład w przypadku przedziału liczbowego był to schemat ustalania kresów jako jego krańców). W czasie badań uwidoczniło się nadmierne przywiązywanie wagi do reprezentacji graficznej — osi liczbowej oraz symbolicznej — zaznaczenia trzema kropkami nieskończoności zbioru (a nie do konstrukcji zbioru); obie pozostawały dominującym elementem koncepcji A. Skłonność do tworzenia reprezentacji ikonicznych jest w początkowej fazie poznawania pojęcia zjawiskiem znanym i powszechnym (Bruner, 1978). W tym przypadku skojarzenia zrodzone na podstawie wizualnych reprezentacji stały się „pseudo-definicjami”.

B: Kres to granica (metaforycznego) ruchu Intuicje dotyczące pojęcia kresu determinowane „widzeniem” zbioru na osi liczbowej, a wyrażone metaforą ruchu, „skupiania się”, „zbliżania” lub „dążenia” do pewnej wartości-kresu to wspólne elementy wszystkich koncepcji grupy B. Grupę B1 tworzą koncepcje tych uczniów, którzy w badaniu wyrażali przekonanie, że kresem jest wartość (liczba), do której „zbliżają się” elementy zbioru w sposób „wzrastający” czy „malejący”, nie osiągając jej. Koncepcje grupy B2 ogniskowały się wokół żądania, by nieskończenie wiele elementów zbioru „skupiało się” wokół kresu. Wyobrażenia konstruowane w oparciu o metaforyczny ruch elementów zbioru no ogół nie prowadziły badanych do poprawnych odpowiedzi. Jak się wydaje, metafora ruchu może degenerować, a nawet blokować rozumienie kresu w toku dalszej nauki. Tworzenie się takich skojarzeń może być wynikiem braku zabiegów (sytuacji) dydaktycznych mających na celu kształtowanie intuicji dotyczących kresu jeszcze przed formalnym pojawieniem się tego pojęcia.

Dostrzeżone trudności mają dwojaką genezę: kryją się w naturze pojęcia bądź, jak można przypuszczać, mają źródło w procesie dydaktycznym jego opracowania. Przedwczesna wydaje się ich klasyfikacja, jednakże po lekturze zebranego materiału nie sposób przemilczeć trudności związanych z rozumieniem zbioru nieskończonego i opisem jego konstrukcji. Dociekanie ich natury jest zamierzonym celem dalszych moich badań. Większość badanych uczniów nie potrafiła posługiwać się definicją kresu; nierzadko obserwowano zjawisko akceptowania i posługiwania się tylko jej fragmentami. Jest prawdopodobne, że w procesie poznawania sensu pojęcia definicja nie została przez nich od-

kryta, ale przyjęta jako obca, zewnętrzna wiedza werbalna. Została więc potraktowana jako mniej ważny składnik obrazu pojęcia, a dominującymi jego składnikami stały się reprezentacje: graficzna oraz symboliczna. Odwoływanie się do jednego z tych modeli w różnych sytuacjach nie jest, jak pokazało badanie, wynikiem świadomego wyboru, lecz raczej swego rodzaju automatyzmem. Wiele systematycznie pojawiających się błędnych skojarzeń, szczególnie tych związanych z dynamicznym „widzeniem” osi liczbowej, „ruchem” na osi oraz trudności oderwania się od „wizualnych” wyobrażeń związanych z osią, sprawiają wrażenie, jakby ten model geometryczny stanowił przeszkodę epistemologiczną dla pojęcia kresu. Uznanie go za taką wymagałoby jednak dalszych badań.

ANEKS 1

Przykładowa analiza pracy pisemnej uzupełniona rozmową wyjaśniającą z jej autorem. Wykonanie zadania 2 wyglądało następująco:

Zbiór	Kres dolny	Kres górny
$\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$	1	nie istnieje
$\{\dots, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$	nie istnieje	nie istnieje

Analizując wykonania tego zadania postanowiłam wyjaśnić w trakcie rozmowy, jak rozumiane jest przez badanego stwierdzenie „nie istnieje”, gdyż jest ono kluczowym elementem rozumienia kresu. Oto fragment rozmowy:

Badający: Wyjaśnij mi, co znaczy wyrażenie „nie istnieje”.

Uczeń: W pierwszym przypadku, pierwszym elementem zbioru jest 1, czyli jest kresem dolnym, nie ma ostatniego, tu są trzy kropki, więc zbiór jest nieskończony, nie ma kresu.

Badający: W drugim przypadku?

Uczeń: Podobnie jak mówiłem. Są trzy kropki, czyli nieskończenie wiele liczb, które gdzieś biegną w nieskończoność, w obydwie strony. Kresów ten zbiór nie ma.

Badający, chcąc zwrócić uwagę ucznia na elementy zbioru, których nie rozważał, poprosił o wykonanie zadania B. Uczeń „myślał głośno”:

Uczeń: Tu jest jakiś błąd. Te liczby w zbiorze nie po kolei stoją.

Badający: Więc dlaczego napisałeś, że ten zbiór jest ograniczony z góry?

Uczeń: Patrząc na te liczby: $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{9}$, $-\frac{1}{27}$, $-\frac{1}{81}$. Mianownik rośnie i tak na przemian, dodatnie i ujemne, jedynka ciągle w liczniku; no to $\frac{1}{3}$ jest największe.

Badający: Najmniejszej nie ma?

Uczeń: Można tak na przemian w nieskończoność wypisywać, najmniejszej nie ma.

Osoba ta poproszona o wykonanie zadania C udzieliła następujących odpowiedzi:

Zbiór jest ograniczony

1. Zbiór ten jest skończony
 prawda, gdyż zbiór ograniczony ma skończoną liczbę wyrazów
2. Każdy podzbiór tego zbioru jest ograniczony
 prawda, gdyż istnieje liczba najmniejsza i największa tego zbioru
3. Istnieje liczba najmniejsza i największa w tym zbiorze
 prawda, gdyż zbiór ten jest ograniczony z dołu liczbą najmniejszą, a z góry największą liczbą
4. Istnieje liczba większa od każdej liczby tego zbioru
 nieprawda, gdyż nie istnieje liczba większa od ograniczającej ten zbiór z góry
5. Istnieje liczba mniejsza od każdej liczby tego zbioru
 nieprawda, gdyż nie istnieje liczba mniejsza od liczby ograniczającej ten zbiór z dołu

Zbiór jest nieograniczony

1. Zbiór ten jest skończony
 fałsz, gdyż zbiór nieograniczony ma nieskończoną liczbę wyrazów
2. Każdy podzbiór tego zbioru jest nieograniczony
 fałsz, gdyż każdy podzbiór zbioru jest ograniczony
3. Istnieje liczba najmniejsza i największa w tym zbiorze
 fałsz, gdyż zbiór ten nie jest ograniczony ani z góry, ani z dołu żadną liczbą
4. Istnieje liczba większa od każdej liczby tego zbioru
 prawda, gdyż zbiór nieograniczony nie posiada największej liczby ograniczającej z dołu
5. Istnieje liczba mniejsza od każdej liczby tego zbioru
 prawda, gdyż zbiór ten nie posiada ograniczenia górnego

Dalej w trakcie rozmowy:

Badający: Czy każdy podzbiór zbioru nieograniczonego jest ograniczony?

Uczeń: (po chwili zastanowienia) Tak. Każdy podzbiór, jakiegokolwiek zbioru jest ograniczony.

Badający: Wyjaśnij to.

Uczeń: Wyobrażam to sobie tak (wykonał następujący rysunek):



rys. 12.

Jest jakiś zbiór. To jest jego podzbiór. (Tu uczeń wskazał strzałkę na rysunku.) Widać więc, że jest on ograniczony.

Badający: Napisałeś, że każdy podzbiór zbioru nieograniczonego jest ograniczony.

Uczeń: Tak. Już mówiłem, jak to sobie wyobrażam. To tak, jakby wyciąć ten kawałek. Na końcu jest kres dolny (z lewej strony) i górny (z prawej).

Badający: Jak wygląda w tym świetle twoje stwierdzenie, że nie istnieje liczba większa od każdej liczby tego zbioru?

Uczeń: To ograniczenie — kres jest na samym końcu, jak to utnę, to już nic większego tam nie ma.

Badający zanotował, że u tego ucznia rozumienie pojęcia kresu zbioru zostało wypaczone przez fałszywe sugestie języka potocznego, ukierunkowane na kolektywne, a nie na dystrybutywne intuicje dotyczące rozumienia zbioru.

ANEKS 2

Sposób poszukiwania kresów	Liczba uczniów klasy drugiej	Liczba uczniów klasy trzeciej
1. Najmniejsza, największa wartość	14	26
2. Pierwszy, ostatni element	14	8
3. Wartość, do której dążą, zbliżają się elementy zbioru	6	18
4. Wartość, wokół której skupiają się elementy zbioru	2	3

Tabela 1. Zestawienie sposobów poszukiwania kresów zbioru $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ i liczby osób tak postępujących.

Sposób poszukiwania kresów	Liczba uczniów klasy drugiej	Liczba uczniów klasy trzeciej
1. Najmniejsza, największa wartość	16	19
2. Pierwszy, ostatni element	11	9
3. Wartość, do której dążą, zbliżają się elementy zbioru	4	11
4. Wartość, wokół której skupiają się elementy zbioru	1	1

Tabela 2. Zestawienie sposobów poszukiwania kresów zbioru $\{\dots, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$ i liczby osób tak postępujących.

Sposób poszukiwania kresów	Liczba uczniów klasy drugiej	Liczba uczniów klasy trzeciej
1. Najmniejsza, największa wartość	13	8
2. Pierwszy, ostatni element	11	11
3. Wartość do której dążą, zbliżają się elementy zbioru	7	15
4. Wartość wokół której skupiają się elementy zbioru	3	3

Tabela 3. Zestawienie sposobów poszukiwania kresów zbioru $\{\dots, -\frac{8}{9}, -\frac{6}{7}, -\frac{4}{5}, -\frac{2}{3}, 0, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, \dots\}$ i liczby osób tak postępujących

Literatura

- A n u s i a k, J.: 1994, *Matematyka. Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego i technikum. Klasa I*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.
- B r u n e r, J. S.: 1978, *Poza dostarczone informacje. Studia z psychologii poznania*, Warszawa.
- E h r e n f e u c h t, A., S t a n d e, O.: 1989, *Algebra dla klasy I liceum ogólnokształcącego, liceum zawodowego i technikum*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.
- K o n i o r, J.: 1998, Dydaktyka matematyki i jej metodologia w rozwoju (wybrane zagadnienia), *Dydaktyka Matematyki* 20, 49-71.

- K r y g o w s k a, Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki, cz. 1*, Warszawa.
- K r y g o w s k a, Z.: 1989, Zrozumieć błąd w matematyce, *Dydaktyka Matematyki* 10, 141-147.
- N o w a k, W.: 1981, Wybrane zagadnienia metodologii badań dydaktyki matematyki, *Dydaktyka Matematyki* 1, 61-126.
- P i a g e t, J.: 1966, *Narodziny inteligencji dziecka*, PWN, Warszawa.
- P i a g e t, J., I n h e l d e r, B.: 1970, *Od logiki dziecka do logiki młodzieży. Rozprawa o kształtowaniu się formalnych struktur operacyjnych*, Warszawa.
- S i e r p i ń s k a, A.: 1985, O niektórych trudnościach w uczeniu się pojęcia granicy na podstawie studium przypadku, *Dydaktyka Matematyki* 4, 107-167.
- S k e m p, R.: 1978, Relational and instrumental understanding, *Arithmetic Teacher* 26, 3, 9-15.
- S k e m p, R.: 1982, Communicating mathematics: surface structures and deep structures, *Visible Language* 16, 281-288.
- T a l l, D. O., V i n n e r, S.: 1981, Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity, *Educational Studies in mathematics* 12, 151-169.
- T u r n a u, S.: 1990, *Wykłady o nauczaniu matematyki*, PWN, Warszawa.

Understanding of the upper (lower) bound by secondary school students

S u m m a r y

This article contains discussion on a test carried out among students of a secondary school in Kielce. The test enabled to settle preliminarily some hypotheses concerning images of the upper (lower) bound shaped in pupils during the lessons about the set of real numbers. The analysis of the carried out test showed that images of this concept revealed in the tested students very often differ from the mathematical sense of the concept at stake. Analysis of students' work led to identification of two characteristic intuitions (operating rules) of the upper (lower) bound:

A: The bound is „what is at the ‘end’ of the set”

B: The bound is the limit of a (metaphorical) movement