

DOKTORATY

Maciej Major
Akademia Pedagogiczna, Kraków

Kontrola i ocena stochastycznej wiedzy studentów nauczycielskich kierunków matematycznych¹

Przez *stochastykę* rozumie się pewną fuzję elementów rachunku prawdopodobieństwa, kombinatoryki, statystyki matematycznej i statystyki opisowej. W mojej rozprawie doktorskiej w zakres pojęcia *stochastyka* włączam tylko elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej.

Przedmiotem rachunku prawdopodobieństwa jest konstruowanie i badanie przestrzeni probabilistycznych jako systemów miary unormowanej. Na ogół przestrzenie te tworzone są jako modele probabilistyczne tzw. doświadczeń losowych. Konstrukcja przestrzeni probabilistycznej jako modelu doświadczenia losowego jest działalnością matematyczną obejmującą specyficzne aktywności i argumentacje (np. wnioskowania przez charakterystyczne dla stochastyki symetrie i analogie).

Przedmiotem moich badań były:

- Kontrola i ocena wiedzy z rachunku prawdopodobieństwa, stosowana aktualnie w szkole i na matematycznych studiach nauczycielskich, a w szczególności treści, formy i metody tej kontroli i ich waloryzacja z punktu widzenia celów i zadań kształcenia matematycznego.
- Propozycja innych treści i form kontroli wiedzy z rachunku prawdopodobieństwa, obejmujących:

¹Tekst jest zmodyfikowaną wersją autoreferatu rozprawy doktorskiej obronionej 12 I 2000 r. na Wydziale Matematyczno-Fizyczno-Technicznym Akademii Pedagogicznej w Krakowie. Promotorem pracy był dr hab. Adam Płocki, a jej recenzentami — dr hab. Wiesław Zięba, prof. nadzw. UMCS i dr hab. Bogdan J. Nowecki, prof. nadzw. AP.

- matematyzację (specyficzny dla rachunku prawdopodobieństwa etap rozwiązywania problemów i zadań),
 - dedukcję i rachunki,
 - interpretację wyników.
- Błędy popełniane przez absolwentów szkoły średniej kandydujących na studia matematyczne w organizacji fazy matematyzacji, fazy rachunków i dedukcji oraz fazy interpretacji. Wnioski wynikające z natury i częstości występowania tych błędów dla dydaktyki matematyki.

Główne cele pracy — to:

- Analiza dotychczasowych form kontroli wiadomości z rachunku prawdopodobieństwa.
- Ilustracja metodologii rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej zadaniami powstałymi na tle różnych sytuacji problemowych.
- Wydzielenie trzech typów interpretacji w procesie rozwiązywania problemów na gruncie rachunku prawdopodobieństwa: — interpretacji z rzeczywistości do świata matematyki, — interpretacji „wewnątrz matematyki”, — interpretacji ze świata matematyki na grunt rzeczywistości.

Ukazanie wnioskowań stanowiących treść tych interpretacji jako ważnego obiektu kontroli i oceny kompetencji w zakresie rachunku prawdopodobieństwa. Propozycja zadań pozwalających kontrolować umiejętności formułowania wnioskowań stanowiących treść tych interpretacji.

- Zaproponowanie treści i form kontroli i oceny wiedzy oraz kompetencji w zakresie rachunku prawdopodobieństwa tak, aby kontrola ta uwzględniała cele i zadania kształcenia matematycznego, włączanie stochastycznego aspektu matematycznego myślenia przy tworzeniu rozmaitych form i przy doborze treści owej kontroli.

Stosunkowo łatwo sprawdza się, jak student (uczeń) opanował techniki rachunkowe związane z obliczaniem prawdopodobieństwa zdarzenia, wartości oczekiwanej zmiennej losowej, z rozstrzygnięciem niezależności zdarzeń bądź zmiennych losowych. Trudniej natomiast kontroluje się i ocenia zdolności związane z organizacją fazy matematyzacji (dobór narzędzi matematyzacji i środków uzasadnienia tego, że tworzona dla danej sytuacji przestrzeń probabilistyczna jest jej modelem) oraz fazy interpretacji, obejmującej m. in. wnioskowania statystyczne. W pracy próbuje się odpowiedzieć na pytanie, poprzez jaką problematykę zadań można kontrolować i oceniać sformułowane wyżej

kompetencje w zakresie rachunku prawdopodobieństwa, dotyczące organizacji wspomnianych dwu faz rozwiązywania problemów na gruncie matematyki.

Praca składa się z dwóch części: teoretycznej i badawczej.

Część teoretyczna dotyczy zagadnienia: *matematyzacji, dedukcji* (w tym także rachunków) i *interpretacji* jako typowych dla rachunku prawdopodobieństwa faz rozwiązywania problemów i zadań. Zebrano tu przykłady ilustrujące specyfikę obiektów, metod i narzędzi matematyzacji w procesie rozwiązywania zadań i problemów. Zamieszczono tu także propozycje treści i form kontroli umiejętności organizacji nie tylko fazy rachunków, ale także dedukcji, a przede wszystkim fazy matematyzacji i fazy interpretacji.

Druga część pracy zawiera analizę zadań z rachunku prawdopodobieństwa, jakie od szeregu lat rozwiązują uczniowie w szkole średniej oraz kandydaci na egzaminach wstępnych na wyższe uczelnie. Analiza zadań prowadzona jest pod kątem tego, w jakim zakresie pozwalają one kontrolować i oceniać umiejętności organizacji fazy matematyzacji, fazy rachunków i dedukcji oraz fazy interpretacji. W rozdziale tym podano propozycje takich modyfikacji dotychczasowych zadań, aby umożliwiły one sprawdzanie umiejętności organizacji wyżej wymienionych faz. W tej części pracy zawarto też opis i wyniki badań dotyczących kontroli wiedzy studentów sekcji nauczycielskiej. Kontrolę tę prowadzono za pomocą szczególnie dobranych problemów i zadań². Badania prowadzone były na egzaminach wstępnych, w trakcie studiów przed rozpoczęciem kursu z rachunku prawdopodobieństwa, w czasie ćwiczeń z rachunku prawdopodobieństwa oraz na egzaminach końcowych. W siedmiu częściach tego rozdziału przedstawiono:

1. Propozycje zadań, które zaproponowaliśmy na egzaminy wstępne do krakowskiej WSP w latach 1992-1998 oraz wnioski na temat stanu probabilistycznej wiedzy i zarazem pewnej kultury, zarówno stochastycznej jak i ogólnomatematycznej, kandydatów na studia matematyczne na sekcji nauczycielskiej (wynikające z analizy rozwiązań tych zadań).

2. Wyniki badań na temat wpływu dotychczasowych studiów matematycznych (5 semestrów) na rozwój zdolności doboru matematycznych środków argumentacji przy rozwiązywaniu zadań stochastycznych. W badaniach uczestniczyli ci sami studenci co na egzaminie wstępnym i rozwiązywali (po 5 semestrach studiowania matematyki) to samo zadanie z rachunku prawdopodobieństwa, które rozwiązywali na egzaminie wstępnym. Analizę przeprowadzono porównując obie prace każdego studenta.

3. Opracowania i wnioski z kontroli organizacji dedukcji przez studentów sekcji nauczycielskiej kilku uczelni (studentów po kursie licencjackim rachunku

²Szczegółowo te problemy i zadania przedstawiono w części pierwszej pracy

prawdopodobieństwa). Dedukcja dotyczyła weryfikacji twierdzeń, które są powszechnie uznawane za prawdziwe (co potwierdziły badania), a które są twierdzeniami fałszywymi.

4. Opis i wyniki badań dotyczących umiejętności organizacji faz matematyzacji, dedukcji, rachunków i interpretacji przy rozwiązywaniu problemów na gruncie rachunku prawdopodobieństwa przez studentów sekcji nauczycielskiej. W badaniach wykorzystano znaną z praktyki procedurę losowania „metodą marynarza”.

5. Opis i wyniki badań dotyczących umiejętności organizacji faz matematyzacji, dedukcji, rachunków i interpretacji. W badaniach wykorzystano zestaw trzech zadań pozwalających kontrolować umiejętności organizacji fazy matematyzacji, interpretacji, a zwłaszcza fazy dedukcji (dostrzeganie analogii, dokonywanie transferu idei na sytuacje analogiczne, interpretacja wewnątrz matematyki).

6. Treści i formy „ciągłej kontroli” wiedzy i kompetencji w zakresie rachunku prawdopodobieństwa na sekcji nauczycielskiej. W tej części omawiane są badania prowadzone wśród studentów na temat ich umiejętności wnioskowań przez (specyficzne dla stochastyki) symetrie i analogie.

7. Propozycję zestawów zadań stochastycznych, których rozwiązywanie pozwala kontrolować i oceniać wszystkie te kompetencje w zakresie rachunku prawdopodobieństwa, o których mowa w pracy.

W procesie kontroli probabilistycznej wiedzy wykorzystywane były dwie metody badawcze:

- analiza dokumentów,
- rozmowa indywidualna (wywiad).

Analizie poddawano dokumenty pisane (pisemne prace studentów). Były to dokumenty intencjonalnie tworzone (zamiar poddania dokumentu ocenie był znany osobom badanym). Kontrola i ocena wiedzy była dokonywana także w trakcie rozmów indywidualnych (wywiadów). Celem rozmów było dotarcie do faktów, których nie można zaobserwować na podstawie analizy prac pisemnych. Rozmowy miały charakter jawny (były rejestrowane za pomocą kamery wideo).

Zadania na egzaminach wstępnych na kierunek matematyka sekcji nauczycielskiej krakowskiej WSP — propozycje

W Instytucie Matematyki krakowskiej WSP, w ramach seminarium naukowego z rachunku prawdopodobieństwa i jego dydaktyki, przygotowuje się od szeregu lat zadania z rachunku prawdopodobieństwa na egzaminy wstępne na kierunek matematyka. Chodzi o dobór zarówno problematyki jak i formy zadań, z rozwiązaniami których można jak najpełniej wnioskować o predyspozy-

cyjach kandydata do studiowania matematyki i zarazem o jego predyspozycjach do zawodu nauczyciela matematyki. Obiektem kontroli i oceny jest nie tylko formalna wiedza z rachunku prawdopodobieństwa, a więc znajomość definicji i twierdzeń oraz technik rachunkowych, ale także zdolność samorzutnej organizacji fazy matematyzacji i fazy interpretacji. Matematyzacja i interpretacja jako etapy rozwiązywania problemów na gruncie rachunku prawdopodobieństwa obejmują ważne dla tej dziedziny matematyki wnioski, które także powinny być przedmiotem kontroli i oceny w przypadku kwalifikowania do studiowania matematyki (i to na sekcji nauczycielskiej).

Niżej przytaczamy nasze propozycje zadań probabilistycznych z egzaminów wstępnych na kierunek matematyka krakowskiej WSP w latach 1993-1998.

Zad. 1. (1993 r.) Z urny o sześciu kulach ponumerowanych liczbami: 1, 2, 3, 4, 5, 6, losujemy jednocześnie dwie kule.

a) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że:

— suma numerów wylosowanych kul będzie liczbą parzystą (zdarzenie A),

— suma numerów wylosowanych kul będzie liczbą nieparzystą (zdarzenie B).

b) W grze losuje się równocześnie dwie kule z powyższej urny. Przed losowaniem gracz skreśla na kuponie jedną liczbę od 3 do 11. Jeśli suma numerów wylosowanych kul jest równa wcześniej skreślonej liczbie, to gracz zdobywa punkt. Czy taka gra przypomina Ci w czymś totolotka i dlaczego? Czym, według Ciebie, różni się ona od prawdziwego totolotka?

c) Postanowiłeś wziąć udział w tej grze. Jaką podejmiesz w tej sytuacji decyzję co do wypełniania kuponu?

3	4	5	6	7	8	9	10	11
---	---	---	---	---	---	---	----	----

Zad. 2. (1994 r.) W urnie U są 3 kule białe i 4 czarne, a w urnie V jest 6 kul białych i 1 czarna. Obie urny są identyczne z wyglądu. Najpierw losujesz jedną z tych urn i nie zaglądając do jej wnętrza losujesz z niej kulę.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej?

b) Znajdź prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej w takim doświadczeniu losowym, gdy w urnie U jest 9 kul białych i 1 czarna, a w urnie V 2 białe i 8 czarnych.

c) Czy dostrzegasz, czym jest zarazem w obu przypadkach policzone prawdopodobieństwo? Czy jest to jakaś prawidłowość czy zbieg okoliczności? Spróbuj ująć tę prawidłowość w formie twierdzenia. Udowodnij je.

Zad. 3. (1995 r.) Dane są trzy urny: urna U_1 z jedną kulą o numerze 6 i dwiema kulami o numerze 1, urna U_2 z jedną kulą o numerze 0 i dwiema kulami o numerze 4, urna U_3 z jedną kulą o numerze 2 i dwiema kulami o numerze 3.

a) Spośród dwu urn: U_1 i U_2 masz prawo wybrać sobie jedną, drugą bierze Twój przeciwnik w grze. Każdy z Was losuje kulę ze swojej urny. Numer wylosowanej kuli to wylosowana liczba. Zwycięża ten, kto wylosuje większą liczbę. Na wybór której urny się zdecydujesz i dlaczego?

b) Masz prawo wybrać sobie jedną z trzech urn, jedną z dwu pozostałych wybierze sobie Twój przeciwnik w grze. Każdy z Was losuje następnie liczbę i zwycięża ten, kto wylosuje liczbę większą. Czy jest wśród tych urn najlepsza? Czy prawo pierwszeństwa jest w tej sytuacji dla Ciebie przywilejem? Jak uzasadnisz odpowiedzi na gruncie rachunku prawdopodobieństwa?

Zad. 4. (1996 r.) W urnie U są 3 kule białe i 6 czarnych, a w urnie V — 4 kule czarne i 4 białe. W grze losuje się jednocześnie dwie kule z jednej z urn. Zwycięszasz, gdy wylosowane kule są jednakowego koloru, gdy są to kule różnych kolorów — zwycięża twój przeciwnik w grze. Masz prawo zdecydować, z której urny będą losowane kule. Jaką podejmiesz w tej sytuacji decyzję? Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 5. (1997 r.) W urnie jest 6 kul czarnych i 2 białe. W grze, w której uczestniczy dwóch graczy: G_A i G_B , losuje się jednocześnie dwie kule z tej urny. Jeśli wylosowane kule są tego samego koloru, to zwycięża gracz G_A , gdy wylosowane kule są różnych kolorów to zwycięża gracz G_B .

a) Oblicz prawdopodobieństwa zwycięstwa dla każdego z graczy.

b) Ile dołożyłbyś kul białych do powyższej urny aby szanse graczy były równe?

Zad. 6. (1998 r.) W grze bierze udział trzech graczy: G_A , G_B i G_C . Rzut monetą powtarzany jest tak długo, aż:

— albo wypadną dwa orły pod rząd (...oo) i wtedy zwycięża gracz G_A ,

— albo wypadną dwie reszki pod rząd (...rr) i wtedy zwycięża gracz G_B ,

— albo po orle wypadnie reszka (...or) i wówczas zwycięża gracz G_C .

Monetą rzuca jeden z graczy, nieważne który. Zaproszono Cię do udziału w takiej grze. Którym z graczy chciałbyś być? Jak uzasadnisz swoją decyzję na gruncie matematyki?

Powyższe zadania różnią się zarówno formą jak i treścią od większości znanych zadań egzaminacyjnych z rachunku prawdopodobieństwa, proponowanych kandydatom na studia w ostatnim dwudziestolecu w Polsce. Poprzez treść i formę tych zadań próbujemy zmienić przyjęty od szeregu lat styl, pewną „filozofię” kontroli wiedzy w zakresie rachunku prawdopodobieństwa. W przytoczonych zadaniach dają się na ogół wyodrębnić dwie części. Pierwsza jest tradycyjnym zadaniem z rachunku prawdopodobieństwa, jakich wiele można znaleźć w podręcznikach oraz zbiorach zadań, i jakie kandydat na studia jeszcze niedawno rozwiązywał w szkole. Celem tych zadań jest sprawdzenie pod-

stawowych wiadomości z rachunku prawdopodobieństwa zdobytych przez kandydata na studia w szkole średniej. Na tę elementarną wiedzę składają się pojęcia przestrzeni probabilistycznej, zdarzenia, zdarzeń przeciwnych, prawdopodobieństwa zdarzenia.

Druga część zadań jest na ogół nietypowa. Przedstawione w nich problemy nie są sformułowane w języku matematyki, nie są to więc w zasadzie zadania matematyczne. Aby odpowiedzieć na postawione w tych zadaniach pytania, należy najpierw sformułować pewne probabilistyczne — a więc już matematyczne — zadanie, rozwiązać je wykonując stosowne obliczenia, a następnie zinterpretować uzyskane rezultaty. Zadań tych nie można rozwiązać stosując typowe reguły obliczania prawdopodobieństwa poznane w szkole. Zadania te pozwalają kontrolować umiejętności:

- przekładu opisanego problemu na język matematyki (a więc formułowania matematycznego zadania na tle sytuacji pozamatematycznej),
- konstrukcji przestrzeni probabilistycznej jako modelu opisanej w zadaniu sytuacji,
- organizacji fazy rachunków w tej przestrzeni z ewentualnymi elementami dedukcji,
- formułowania wiarygodnych wniosków, jakie z rezultatów rachunków wynikają na temat wyjściowej sytuacji.

Wyróżnione etapy rozwiązywania zadania kontrolują zatem umiejętności organizacji fazy matematyzacji, fazy dedukcji i rachunków oraz fazy interpretacji.

Wnioski dotyczące kontroli zdolności organizacji fazy matematyzacji

1. Ważnym celem, do realizacji którego należy przygotować nauczyciela matematyki, jest nauczyć stawiania sensownych pytań, formułowania zadań i problemów. W pracy przedstawiono propozycje pewnego źródła takich zadań oraz motywacji dla ich formułowania i rozwiązywania. Zagadnienie formułowania matematycznych zadań na tle sytuacji pozamatematycznych jest elementem fazy matematyzacji.

Umiejętność formułowania matematycznych zadań na tle pewnych sytuacji problemowych (także pozamatematycznych) jest istotnym elementem kompetencji w zakresie stochastyki, a zarazem ważnym elementem kultury matematycznej nauczyciela. Ta umiejętność powinna wchodzić w zakres kształcenia stochastycznego nauczyciela matematyki i powinna być przedmiotem kontroli kompetencji w zakresie rachunku prawdopodobieństwa na sekcji nauczycielskiej. W pracy proponuje się zadania pozwalające kontrolować i oceniać te umiejętności.

2. Jednym z ważniejszych celów nauczania rachunku prawdopodobieństwa w szkole, korespondującym wyraźnie z ukierunkowaniem matematycz-

nego kształcenia na umiejętności matematyzowania, jest rozwijanie zdolności opisywania pozamatematycznych sytuacji w kategoriach typowych dla tej dziedziny matematyki schematów urnowych. Te zdolności mogą i powinny być obiektem kontroli kompetencji w zakresie probabilistyki, zarówno na sekcji nauczycielskiej, jak i w szkole. Praca zawiera liczne propozycje zadań umożliwiających kontrolę i ocenę tych zdolności.

3. W przypadku zadań z rachunku prawdopodobieństwa matematyzacja jest szczególnie ważna z tego m. in. powodu, że rozwiązywanie każdego zadania rozpoczyna się od konstrukcji przestrzeni probabilistycznej jako matematycznego modelu pewnej sytuacji (nierzadko pozamatematycznej) i że dla każdego zagadnienia ta przestrzeń jest inna, a więc w każdym zadaniu tworzy się tę przestrzeń od nowa. Konstrukcja przestrzeni probabilistycznej jako modelu doświadczenia losowego została ukazana w pracy jako specyficzna, szeroko rozumiana działalność matematyczna. W pracy ta konstrukcja jest elementem fazy matematyzacji. Przedmiotem badań są m.in. aktywności matematyczne związane z organizacją tej fazy. Procedury związane z konstrukcją przestrzeni probabilistycznej jako modelu doświadczenia losowego powinny być przedmiotem kontroli i oceny kompetencji w zakresie rachunku prawdopodobieństwa. W pracy proponuje się szczególny typ zadań, które umożliwiają taką kontrolę i ocenę zdolności organizacji fazy matematyzacji.

4. Trudności w organizacji fazy matematyzacji, jakie obserwujemy na zajęciach ze studentami sekcji nauczycielskiej, wynikają nie tylko z trudności w zrozumieniu problemu, ale przede wszystkim z:

- nieświadomości, że obliczanie prawdopodobieństwa w oderwaniu od przestrzeni probabilistycznej jest merytorycznym błędem,
- z braku umiejętności przekładu problemu na język matematyki (rozwiązywane zadania w szkole takich problemów na ogół nie obejmowały),
- z niedostatku narzędzi weryfikacji zgodności przestrzeni probabilistycznej z sytuacją, dla której się ją tworzy (o czym świadczy powszechne bezkrytyczne przyjmowanie przestrzeni klasycznej jako modelu każdej sytuacji losowej).

5. Kształcenie matematyczne nie może ograniczać się do wyuczania gotowych algorytmów i wyposażania w skuteczny aparat rachunkowy, w gotowe metody rozwiązania. Ważne jest również uczenie, jak samemu te rozwiązania odkrywać, a także jak samemu formułować matematyczne problemy, jak stworzyć matematyczne modele, a więc jak matematyzować.

Wnioski dotyczące kontroli zdolności organizacji fazy rachunków i dedukcji

1. Kontrola sprawności rachunkowych (i to związanych na ogół z ideami

kombinatorycznymi, bo sprowadzona do zadań na obliczanie prawdopodobieństwa klasycznego) nie może być uważana za kontrolę istotnych kompetencji w zakresie stochastyki.

2. Wnioskowania przez symetrie i analogie jako szczególne, typowe dla rachunku prawdopodobieństwa wnioskowania dotyczące fazy dedukcji i rachunków, powinny być także przedmiotem kontroli kompetencji w zakresie rachunku prawdopodobieństwa. Umiejętności formułowania takich wniosków stanowią ważny aspekt kultury stochastycznej.

3. Liczne błędy we wnioskowaniach dotyczących postaci przestrzeni probabilistycznej, jak i wielkości prawdopodobieństwa pewnych zdarzeń w tej przestrzeni, wynikają z niewłaściwego kojarzenia symetrii z równością prawdopodobieństwa, asymetrii zaś — z nierównością. Ujawnianie i identyfikacja charakteru oraz przyczyn błędów we wnioskowaniach stochastycznych popełnianych przez naszych studentów a także kandydatów na studia matematyczne jest dziś ważnym zagadnieniem dydaktyki stochastyki.

4. Z prowadzonych badań wynika, że większość studentów (i to po licencjackim kursie rachunku prawdopodobieństwa) mylnie przypisuje prawdopodobieństwu własności, które ma tylko prawdopodobieństwo klasyczne. Przedmiotem kontroli kompetencji w zakresie probabilistyki, a dotyczących organizacji fazy dedukcji, powinna być także weryfikacja twierdzeń, które zebrano w specyficznym teście. Są to twierdzenia sugerowane przez intuicje. Konstrukcja kontrprzykładu i wnioskowania wynikające z jego ujawnienia stanowią osobliwy element fazy dedukcji.

5. Gdy chodzi o powszechne przypisywanie każdej przestrzeni probabilistycznej tych własności, które ma przestrzeń klasyczna, można postawić hipotezę, że ich przyczyny tkwią w nadmiernym, a czasami wyłącznym odwoływaniu się na lekcji i na zajęciach w uczelni do klasycznych przestrzeni probabilistycznych. Nadmierne eksponowanie klasycznych przestrzeni prowadzi do błędnych wyobrażeń na temat własności prawdopodobieństwa. Przyczyną tego błędu jest wyłączne eksponowanie przestrzeni probabilistycznych jako modeli doświadczeń losowych (i to na ogół modeli schematów urnowo-kostkowych). Brak w tym procesie przykładów przestrzeni probabilistycznych (Ω, p) , w których rozkład prawdopodobieństwa p przyjmuje także wartości zerowe. Dla takiej przestrzeni trudno opisać doświadczenie losowe, dla którego jest ona modelem.

Wnioski dotyczące kontroli zdolności organizacji fazy interpretacji

1. Kompetencje w zakresie rachunku prawdopodobieństwa przejawiają się nie tylko w możliwościach obliczania prawdopodobieństwa takich czy innych zdarzeń (a więc w organizacji dedukcji i rachunków), ale także (i przede wszyst-

kim) w zdolnościach do wykorzystywania owych prawdopodobieństw do wnioskowań natury stochastycznej. Mamy tu na uwadze umiejętność formułowania wiarygodnych wniosków, jakie wynikają z fazy rachunków i dedukcji na temat praktyki, a więc wniosków, będących przedmiotem teorii estymacji i teorii weryfikacji hipotez, wniosków dotyczących reprezentatywności losowanej próbki (są to wnioskowania statystyczne), ale także wniosków stanowiących treść teorii podejmowania decyzji, wniosków, istotą których są oceny oczekiwanych zysków w hazardzie, wniosków na temat oceny ryzyka i wynikających z jego wielkości decyzji. Proponowana w pracy forma i problematyka zadań ukazuje, że przedmiotem kontroli i oceny kompetencji w zakresie rachunku prawdopodobieństwa mogą być takie wnioskowania, stanowiące przedmiot fazy interpretacji.

2. Faza interpretacji jest w omawianej pracy istotnym etapem procesu stosowania matematyki. W pewnym sensie udane próby organizacji fazy interpretacji, w przypadku kandydatów na studia matematyczne³, dają podstawy aby twierdzić, że ten etap procesu stosowania matematyki (jako etap rozwiązywania problemów na gruncie rachunku prawdopodobieństwa) jest w zasięgu możliwości ucznia, a więc tym samym studenta sekcji nauczycielskiej. Organizacja tej fazy może i powinna być treścią kontroli kompetencji w zakresie rachunku prawdopodobieństwa na sekcji nauczycielskiej.

Wnioski ogólne dotyczące kontroli wiedzy i kompetencji w zakresie rachunku prawdopodobieństwa

1. Analizowane prace kandydatów na studia w latach 1992-1998 ukazują pewien godny refleksji fakt. Raczej pozytywnie wypadł sposób atakowania i rozwiązywania tych zadań, które są nietypowe z uwagi na ich treść (takich zadań jakie zaproponowaliśmy na egzaminach wstępnych raczej nie spotyka się aktualnie ani w podręcznikach, ani w zbiorach zadań z rachunku prawdopodobieństwa). Kandydaci ujawnili więc dość zadowalającą organizację fazy interpretacji i doboru środków argumentacji (np. że dana decyzja, o którą chodzi w zadaniu, jest optymalna). Gorzej natomiast wypada w ocenie organizacja fazy rachunków. Przy obliczaniu prawdopodobieństwa popełniane były liczne błędy, choć te rachunki stanowią prawie wyłączną treść typowych szkolnych zadań probabilistycznych.

2. Można przypuszczać, że gdyby zmienić problematykę zadań z rachunku prawdopodobieństwa (przede wszystkim zadań szkolnych), czyniąc ją bliższą praktyki poprzez włączanie do ich treści zagadnień związanych z procesami decyzyjnymi, to fazę matematyzacji, a także fazę rachunków, uczniowie i stu-

³Mowa tu o faktach, jakie skonstatowaliśmy w latach 1993-1998, oceniając rozwiązywanie naszych zadań z rachunku prawdopodobieństwa na egzaminach wstępnych.

denci organizowaliby sprawniej i poprawniej.

3. Jedną z konkluzji omawianych tu badań jest więc teza, że przy uwzględnieniu w nauczaniu rachunku prawdopodobieństwa (a więc także w kursie tej dziedziny matematyki na sekcji nauczycielskiej) metodologicznego aspektu (chodzi o zadania, których rozwiązywanie obejmuje specyficzne dla stochastyki wnioskowania) te formalne rachunki, na które dziś zwraca się głównie uwagę (i z którymi uczniowie i studenci nie bardzo sobie radzą), byłyby prowadzone poprawniej, bo z pełną świadomością natury sytuacji, do której one się odnoszą, z pełnym odczuciem co i po co obliczamy.

4. Brak fazy matematyzacji i fazy interpretacji w procesie rozwiązywania problemów na gruncie rachunku prawdopodobieństwa odrywa matematyczną działalność od wnioskowań probabilistycznych i statystycznych, pozostawia więc na marginesie metodologię stochastyki, a proces rozwiązywania problemu czyni uboższym o wiele form matematycznej aktywności.

Przedmiotem kontroli i oceny wiedzy probabilistycznej na sekcji nauczycielskiej i w szkole powinny być:

- zdolność organizowania procesu matematyzacji w tym umiejętność formułowania racjonalnych problemów na tle pozamatematycznych sytuacji i ich przekładu na język matematyki,
- zdolności tworzenia przestrzeni probabilistycznych jako modeli pewnych sytuacji i towarzyszących im stosunków ilościowych,
- umiejętność organizacji fazy dedukcji i rachunków, w tym także takimi specyficznymi dla stochastyki środkami jak wnioskowania przez analogie i symetrie, wnioskowania oparte na izomorfizmie przestrzeni itd.,
- zdolności w zakresie formułowania wniosków, jakie z wyliczonego prawdopodobieństwa mogą wynikać na temat: prognozowania tzw. stanów świata zewnętrznego przy podejmowaniu decyzji w warunkach ryzyka, wyłaniania decyzji optymalnych, oceny pewnego ryzyka, weryfikacji pewnych hipotez (chodzi np. o rozstrzygnięcie na gruncie probabilistyki, czy dany fakt jest rezultatem wiedzy, pewnych zdolności, posiadanych informacji lub innych nielosowych czynników, czy też przypadku).

5. Ważnym elementem wiedzy stochastycznej są specyficzne paradoksy. Trudno kontroluje się i ocenia aktywności matematyczne, dobór środków weryfikacji, a więc argumentacje związane z ujawnianiem i analizą na gruncie matematyki źródeł i charakteru licznych stochastycznych paradoksów. Zdolności do ujawniania tych paradoksów, badania ich natury, weryfikacji popełnianych błędów zaliczamy w tej pracy do ważnych kompetencji w zakresie stochastyki.

Te kompetencje stanowią pewien aspekt stochastycznego kształcenia. W niniejszej pracy proponowane są liczne przykłady problemów, pozwalających kontrolować i oceniać takie kompetencje.

6. Analiza porównawcza rozwiązań zadań na egzaminie wstępnym a następnie tych samych zadań, przez tych samych studentów po pięciu semestrach studiowania matematyki (ale przed rozpoczęciem kursu rachunku prawdopodobieństwa) ujawnia raczej pozytywny wpływ wiedzy ogólnomatematycznej na dobór środków argumentacji przy rozwiązywaniu problemów z rachunku prawdopodobieństwa, choć spodziewaliśmy się, że ten wpływ będzie znacznie-szy. Można przypuszczać, że ten niewielki wpływ wynika nie tylko z faktu, że wiedza probabilistyczna studentów wyniesiona ze szkoły jest raczej skromna (i częściowo została już zapomniana), ale także z faktu, że na zajęciach ze studentami raczej prezentowana jest gotowa wiedza matematyczna, a na ćwiczeniach bardziej zwraca się uwagę na rozwijanie technik rachunkowych i na organizację dedukcji, niż na aktywności matematyczne związane z odkrywaniem wiedzy w trakcie formułowania i rozwiązywania problemów.