



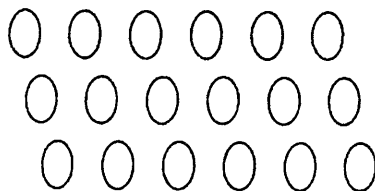
Bożena Rożek
Akademia Pedagogiczna, Kraków

Schemat myślowy szeregowo-kolumnowego układu figur u dzieci w wieku od 6 do 9 lat

Tematyka pracy⁵ dotyczy pewnego typu regularnych układów figur na płaszczyźnie zwanych w rozprawie **szeregowo-kolumnowym układem figur** (w skrócie **SKUF**). Istotą tego typu układów jest możliwość wyróżnienia dwóch rodzin równoległych rzędów, często do siebie prostopadłych. Równoległe rzędy jednej rodziny („poziome”) stanowią **szeregi**, drugiej („pionowe”) — **kolumny**. Na przykład białe konie w grafice Eschera (rys. 1) tworzą **prostokątny** szeregowo-kolumnowy układ figur. Elementy SKUF nie muszą być do siebie przystające; mogą to być dowolne figury, tak jak na rysunku 4. Istotne jedynie jest miejsce ich położenia. Rysunek 2 ilustruje układ **ukośny**, gdyż szeregi i kolumny nie są wzajemnie prostopadłe. SKUF może być **nieskończony** (rys. 3), gdy figury są rozmieszczone na obszarze o nieokreślonych granicach, bądź **skończony** o wymiarach $m \times n$ (rys. 4), w którym elementy ułożone są w m szeregach po n w każdym.

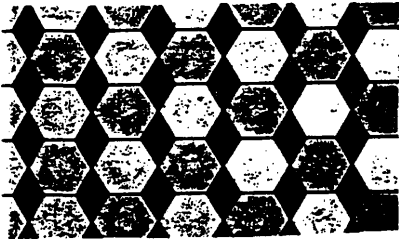


rys. 1. Prostokątny SKUF

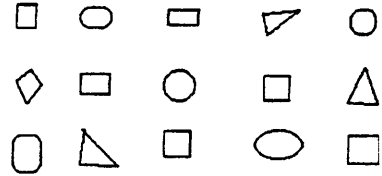


rys. 2. Ukośny SKUF

⁵Tekst jest skróconą wersją autoreferatu rozprawy doktorskiej obronionej 8 VII 1999 r. na Wydziale Matematyczno-Fizyczno-Technicznym Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Krakowie. Promotorem pracy był dr hab. Stefan Turnau, a jej recenzentami — dr hab. Bogdan Nowecki i prof. dr hab. Zbigniew Semadeni.



rys. 3. Nieskończony SKUF



rys. 4. Skończony SKUF

Szeregowo-kolumnowy układ figur pełni ważną rolę w procesie nauczania matematyki: w kształtowaniu wielu matematycznych pojęć i ich własności. SKUF może służyć do geometrycznej interpretacji iloczynu liczb naturalnych, a obliczanie dwoma sposobami liczby elementów tego układu, pomaga dostrzec prawo przemienności mnożenia. Uchwycenie podwójnego układu szeregów i kolumn w prostokącie wyłożonym jednostkowymi kwadratami jest pewnym etapem procesu kształtowania pojęcia pola prostokąta. Podwójna koordynacja pionu i poziomu jest też istotna przy posługiwaniu się m. in. układem współrzędnych, diagramami, macierzami oraz w geometrycznym modelu iloczynu kartezjańskiego.

Przedmiotem prezentowanych w rozprawie badań był hipotetyczny **schemat myślowy szeregowo-kolumnowego układu figur** tworzący się w umyśle dzieci w wieku od 6 do 9 lat. Chodziło o badanie pierwszego, pogładowego wyobrażenia, o którym Krygowska⁶ pisze, że

... nie jest jeszcze pojęciem matematycznym, ale jest pewnym myślowym schematem w tym sensie, w jakim A. Rubinstein mówi o wyobrażeniach-schematach, które z jednej strony »przechodzą w pojęcia, z drugiej — odtwarzają w obrazach wspomnieniowych indywidualne spostrzeżenia«.

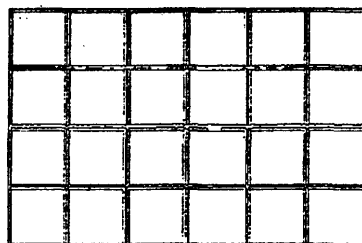
W wyniku empirycznych badań poszukiwano odpowiedzi na pytanie, **jaką wiedzą spontaniczną na temat szeregowo-kolumnowego układu figur dysponują dzieci w tym wieku**. Jądrem tej pracy była kwestia, do jakiego stopnia dziecko jest w stanie, widząc szeregowo-kolumnowy układ figur, wyróżnić tam układ szeregów, układ kolumn oraz — co najważniejsze — czy ma ono świadomość istnienia obu tych układów i czy potrafi je skoordynować.

Ważnym elementem pracy była teoretyczna analiza różnych aspektów pojęcia szeregowo-kolumnowego układu figur oraz próba opisu tego w języku matematycznym. Matematyczna analiza układów szeregowo-kolumnowych przeplatała się z analizowaniem zachowań dzieci obserwowanych w trakcie badań.

⁶Krygowska Z., Zarys dydaktyki matematyki, cz. 1, WSiP, 1979, Warszawa, s. 50

W efekcie takiego dwutorowego podejścia, stopniowo wyłaniała się terminologia służąca do opisu tego typu zjawisk. Chodziło o zbudowanie takiego systemu pojęć matematycznych, który byłby możliwie bliski temu, co badamy u dzieci, i umożliwiał opis obserwowanych u nich trudności. Język matematyczny pomagał interpretować ujawnione w czasie badań rozumowania dzieci i dzięki temu, możliwe było usystematyzowanie różnorodnych wyników badań empirycznych. Proces matematyzacji tego typu układów doprowadził do definicji szeregowo-kolumnowego układu figur jako pojęcia matematycznego.

Praca badawcza zainspirowana została wynikami Lynne Outhred (Australia) przedstawionymi na kongresie ICME w 1992 r. w Québeku.⁷ Badania te dotyczyły postrzegania przez dzieci prostokąta o wzorze szachownicy (rys. 5), który w omawianej rozprawie nazwano **pokratkowanym prostokątem**. Wyniki wskazywały, że dzieci na początku szkoły mają trudności z uchwyceniem układu regularnych pionowych i poziomych rzędów.



rys. 5. Pokratkowany prostokąt

Przeprowadzone dla potrzeb rozprawy badania były typu diagnostycznego. Jako główne cele badań przyjęto:

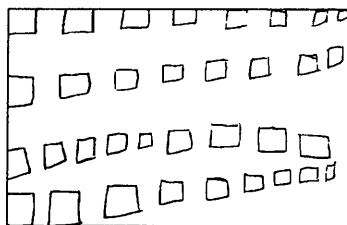
1. Wstępne zbadanie spontanicznej wiedzy dziecka w wieku od 6 do 9 lat, związanej z szeregowo-kolumnowymi układami figur.
2. Diagnozę niektórych trudności i prawidłowości rozwojowych tych dzieci w rozumieniu szeregowo-kolumnowego układu figur.

Metody badań zostały zaczerpnięte z dorobku pedagogiki, psychologii i ogólnej metodologii nauk. Do planowego organizowania i prowokowania sytuacji, które ujawniają wiedzę dzieci związaną z szeregowo-kolumnowymi układami figur, zastosowano w badaniach zadania diagnostyczne. Diagnozie prowadzonej za pomocą skonstruowanej serii zadań towarzyszyły następujące metody: obserwacja uczestnicząca, indywidualna rozmowa z dzieckiem oraz analiza dokumentów, a w szczególności rysunków dzieci. Badania empiryczne były prowadzone od 1992 do 1998 roku w przedszkolach i szkołach podstawowych południowej Polski. Łącznie uczestniczyło w badaniach 388 dzieci. Uczniowie pracowali z badaczem indywidualnie.

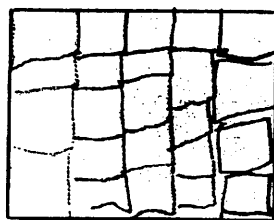
⁷Outhred L., *The array: convention or confusion*, referat wygłoszony na ICME-7, 1992, Québec

Głównym zadaniem badanych było układanie, rysowanie oraz słowne opisywanie szeregowo-kolumnowych układów figur ukazanych w różnych kontekstach. Poniżej przedstawiono najważniejsze wnioski z badań zilustrowane wybranymi pracami dzieci⁸.

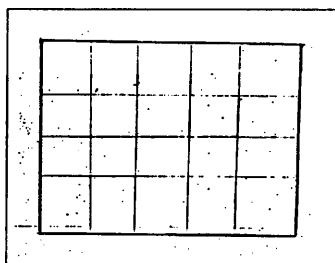
- Szeregowo-kolumnowy układ figur dzieci postrzegają w trzech aspektach: punktowym, pokryciowym i liniowym. SKUF jest postrzegany jako **punktowy** (rys. 6), gdy na plan pierwszy rzucają się pojedyncze, izolowane od siebie elementy. Układ jest postrzegany jako **pokryciowy** (rys. 7), gdy obserwator zwraca uwagę na to, że elementy układu pokrywają całą powierzchnię, nie pozostawiając luk. Wreszcie aspekt **liniowy** (rys. 8) w percepcji układu — to skupienie uwagi na przecinających się liniach, a ignorowanie obszarów między nimi. Oczywiście, pokratkowany prostokąt może być postrzegany we wszystkich trzech aspektach. Jak wynika z badań, każdy aspekt z osobna jest w zakresie kompetencji dzieci w wieku 6 lat; nie znaczy to jednak, że dzieci są w stanie swobodnie przechodzić od jednej percepcji układu do drugiej.



rys. 6. Damian - 7 lat



rys. 7. Magda - 6 lat



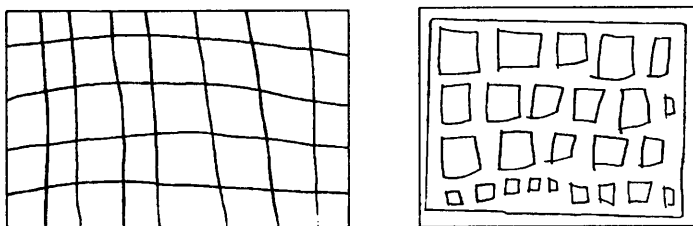
rys. 8. Paulina - 9 lat

⁸Jednym z zadań badawczych było pokrywanie prostokąta 12 jednostkowymi kwadratami w układzie 3 na 4 oraz przedstawianie na rysunku powstałego w ten sposób pokratkowanego prostokąta. W niniejszym tekście zaprezentowano jedynie prace dzieci będące rozwiązaniem tego zadania.

- Dzieci w różnym stopniu ujawniają w swoich rozumowaniach cechy trzech podstawowych struktur SKUF: szeregowo-kolumnowej, liczbowej i powierzchniowej. Przy rysowaniu SKUF istotne jest dostrzeżenie podwójnego układu szeregów i kolumn, tymczasem znaczna część dzieci w wieku do 7 lat, a także pewna grupa ośmiolatków, nie uwzględniła jednocześnie szeregów i kolumn (rys. 6). Trudności w zachowaniu cech struktury liczbowej polegały m. in. na nie uwzględnieniu zadanej we wzorze liczby szeregów i kolumn (rys. 6-8). Tego typu trudności pojawiały się w każdej grupie wiekowej od 6 do 9 lat, z tendencją do zmniejszania się. Problemy z odzwierciedleniem cech struktury powierzchniowej ujawniły się głównie brakiem pokrycia całej powierzchni (rys. 6). Najtrudniejsze jednak dla badanych dzieci było uchwycenie cech wszystkich struktur jednocześnie.

Skupienie uwagi tylko na cechach pewnej struktury, prowadziło do dominacji jednej struktury nad pozostałymi i błędów popełnianych w odniesieniu do innych struktur. Nastawienie dziecka na uwzględnienie jednej z tych cech (np. na to, by elementy SKUF rozmieszczone były równomiernie na całej powierzchni) powodowało nieraz nie zwracanie uwagi na inne cechy (np. na konieczność uwzględnienia liczby elementów układu).

- Trudności związane z jednoczesnym uchwyceniem cech struktur SKUF maleją z wiekiem dzieci od 6 do 9 lat. Wniosek ten potwierdzają zamieszczone w pracy wyniki ilościowe, przedstawiające ujawnione w trakcie badań zachowania dzieci związane ze strukturami SKUF.
- Dzieci rysujące pokratkowany prostokąt przez liniowanie nie zawsze są świadome układu szeregowo-kolumnowego. Dla wielu dzieci nie było oczywiste, że prostokąt pokryty kwadratowymi kafelkami można przedstawić na rysunku za pomocą linii pionowych i poziomych. Dopiero stworzenie odpowiedniego kontekstu sytuacyjnego spowodowało, że liniowanie, nawet bez specjalnego uczenia, jest dostępne już dla dzieci sześciolletnich. W takim świetle szczególnie zaskakujący okazał się fakt, że część dzieci, które w początkowych zadaniach rysowały linie, podczas rysowania pojedynczych kwadratów miała trudności w zachowaniu układu szeregów i kolumn (rys. 9). Umiejętność liniowania nie spowodowała ominięcia trudności związanych z koordynacją szeregów i kolumn. Liniowanie nie świadczy więc jednoznacznie o uświadomieniu sobie, przez rysujące dziecko, podwójnego układu szeregów i kolumn; nie stanowi też najwyższego etapu przedstawiania pokratkowanego prostokąta na rysunku.



rys. 9. Ania 6;4

- Dzieci obliczają elementy SKUF na różne sposoby: liczą wskazując pojedyncze elementy, liczą po 2, dodają jednakowe składniki, wykonują mnożenie. Częstość występowania poszczególnych sposobów zależy od wieku dziecka. Dodawanie kilku jednakowych składników świadczy o dostrzeżeniu przez dziecko układu szeregów bądź układu kolumn, zależnie od tego, co dodaje. Jednak znajdowanie liczby elementów za pomocą mnożenia, nie zawsze oznacza umiejętność widzenia przez dziecko układu kilku rzędów, po tyle samo w każdym. Część dzieci automatycznie stosuje wyuczony w szkole schemat: rozpoznaje sytuację prostokątnego układu i wie, że należy pomnożyć liczbę elementów pierwszej kolumny przez liczbę elementów pierwszego szeregu.

Podsumowując, można powiedzieć, że wyniki badań świadczą o istnieniu u dzieci w wieku od 6 do 9 lat naturalnych ograniczeń rozwojowych, związanych z uchwyceniem jednocześnie kilku cech SKUF. Pokazują one, jak trudne dla dzieci okazało się reprodukcowanie na rysunku pozornie oczywistego układu i jak różnie dzieci spostrzegały jego strukturę. Istnieje duży rozdźwięk pomiędzy tym, co dziecko wie naprawdę, a powszechnym wyobrażeniem dorosłych na ten temat. Na początku nauki szkolnej dzieci nie mają jeszcze dobrze ukształtowanych elementów SKUF, potrzebnych do rozumienia związanych z nim pojęć matematycznych. Posługiwanie się w nauczaniu pojęciami, których uczeń należycie nie rozumie, jest bezcelowe, a może być nawet szkodliwe.

Omawiana praca dotyczy jedynie fragmentu zaproponowanej tu tematyki. Przeprowadzone badania dotyczyły diagnozy stanu istniejącego: zaobserwowania występujących prawidłowości i rejestracji trudności uczniów. Wyniki tych badań sugerują wyraźnie potrzebę podjęcia dalszych i głębszych poszukiwań w zakresie rozumienia SKUF przez dzieci, a także projektowania koncepcji dydaktycznych, wdrażania ich do szkoły i weryfikowania.