

DOKTORATY

Małgorzata Przeniosło
WSP, Kielce

Obraz granicy funkcji kształtowany w czasie studiów matematycznych

Praca poświęcona jest obrazom granicy funkcji powstającym w toku nauki¹.

Przez obraz pojęcia² u studenta autorka rozumie strukturę poznawczą zawierającą wszelkie skojarzenia i wyobrażenia myślowe, które wiąże on z tym pojęciem, także odnoszące się do jego własności i dotyczących go twierdzeń, w tym intuicje, elementy formalnego rozumienia, schematy (również swoiste) i strategie operowania nim. Istotne jest w niej ponadto dostrzeganie zależności między jej elementami i związków ze strukturami odnoszonymi do innych pojęć. Przy tym nie wszystkie jej elementy bywają uświadomione, a niektóre mogą pozostawać w sprzeczności ze sobą. Mechanizmy poznawania pojęć matematycznych sprawiają, że uczący się, przyswajając nowe pojęcie, tworzy w umyśle taką strukturę poznawczą, która umożliwia mu posługiwanie się nim i dalsze rozwijanie jego rozumienia. W procesie asymilacji wciąż nowych informacji, poprzez usuwanie sprzeczności i świadome abstrahowanie, ulega ona nieustannym przekształceniom. W przypadku skomplikowanych pojęć abstrakcyjnych, jakim jest niewątpliwie granica funkcji, struktura ta może być bardzo

¹Tekst jest zmodyfikowaną wersją autoreferatu rozprawy doktorskiej obronionej 8 VII 1999 r. na Wydziale Matematyczno-Fizyczno-Technicznym WSP w Krakowie. Promotorem pracy był dr hab. Gustaw Trelński, a jej recenzentami — dr hab. Maria Korcz i dr hab. Eugeniusz Wachnicki.

²Porównaj „concept image” w D. O. Tall, S. Vinner, Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limit and continuity, *Educational Studies in Mathematics* 12, 1981, s. 152, oraz „koncepcja pojęcia” w A. Sierpińska, O niektórych trudnościach w uczeniu się pojęcia granicy na podstawie studium przypadku, *Dydaktyka Matematyki* 4, 1985, s. 114.

złożona. Najistotniejsze są w niej skojarzenia związane z nieformalnym znaczeniem pojęcia; gdy są z nim zgodne, mogą być operatywnie wykorzystane zwłaszcza w rozumowaniach.

Analizując literaturę dotyczącą rozumienia granicy funkcji stwierdzono, że polskich pozycji omawiających tę problematykę powstało niewiele. Relacjonowane w niej badania odnoszą się jedynie do intuicji pierwotnych, związanych z granicą ciągu u osób, które nie poznały jeszcze tego pojęcia w toku nauki. Bogatsza jest natomiast rodzima oferta propozycji wprowadzania granicy. Wśród prac niepolskich autorów można znaleźć już znacznie więcej pozycji dotyczących rozumienia tego pojęcia. Badania w tym zakresie prowadzili m.in. we Francji Bernard Cornu i Aline Robert, w Wielkiej Brytanii i Stanach Zjednoczonych — Robert Davis, David Tall, Shlomo Vinner i Steven Williams.

Praca została oparta na szerokich badaniach przeprowadzonych wśród studentów matematyki WSP w Kielcach. Objęto nimi osoby z różnych roczników studiów, w tym szczególnie pierwszego roku i roku kończącego kurs analizy; ogółem było to 21 grup i 325 studentów. Prowadzono je systematycznie, poczynawszy od roku akademickiego 1993/94, skończywszy na 1996/97. Celem badań przeprowadzonych wśród studentów, którzy ukończyli kurs analizy matematycznej, była odpowiedź na wynikające z tytułu pracy pytanie, jaki obraz granicy funkcji został ukształtowany na studiach. Chodziło zwłaszcza o identyfikację skojarzeń, wyobrażeń i intuicji związanych z pojęciem granicy, świadomość ich wzajemnych zależności oraz związków z innymi pojęciami matematycznymi, stopień ich operatywności, przyczyny powstawania i źródła „degeneracji” pojęcia granicy. To z kolei miało prowadzić do ogólniejszych wniosków dotyczących tworzenia się obrazów pojęcia granicy. Wiązał się z tym także główny cel badania osób rozpoczynających studia: identyfikacja ich obrazu granicy jako wyjściowej podstawy dalszych badań. Badania prowadzone na pierwszym roku miały ponadto służyć wypracowaniu sposobów korygowania i rozwijania rozumienia pojęcia granicy w czasie studiów, jak i poprawienia sposobu jego wprowadzania w szkole.

Przy realizacji wymienionych celów posłużono się kilkoma metodami badawczymi. Była to analiza prac pisemnych, wywiad (rozmowa indywidualna)³, a także obserwacja uczestnicząca dyskusji grup studentów. Wykorzystano przy

³W pracy używano zamiennie obu terminów. Biorąc pod uwagę metodologię stosowaną w dociekaniach pedagogicznych i psychologicznych, czy odnoszącą się do dydaktyki matematyki (zob. np. M. Łobodzki, *Metodologia badań pedagogicznych*, Warszawa 1982; W. Nowak, Wybrane zagadnienia metodologii badań dydaktyki matematyki, *Dydaktyka Matematyki* 1, 1981, s. 61-126) forma tej części badań miała zarówno cechy wywiadu, jak i rozmowy. Był to bowiem specyficzny rodzaj wywiadu, prowadzonego nie według sztywnego, z góry ustalonego kwestionariusza, ale w sposób otwarty. Stawiane pytania zależały od przebiegu rozmowy i powstawały w jej trakcie.

tym obszerne zestawy specjalnie dobranych zadań, pozwalających na badanie postrzegania znaczenia pojęcia granicy w konkretnych sytuacjach, a jednocześnie umożliwiających wyciąganie wniosków ogólniejszych, niż tylko ich dotyczących. Zgromadzony materiał badawczy okazał się bardzo bogaty (kilka tysięcy stron sprawdzianów pisemnych i transkryptów nagrań magnetofonowych).

Analizę zebranego materiału rozpoczęto od kategoryzacji rozwiązań każdego z zadań sprawdzianu badawczego oddzielnie. Wyróżniono różnorodne kategorie i podkategorie, reprezentujące podobny typ rozumienia granicy funkcji. (Dla większej przejrzystości zostały one nazwane przy użyciu zwrotów stosowanych przez studentów.) Jednocześnie poszukiwano przyczyn powstawania i źródeł „degeneracji” ujawnionych skojarzeń. Następnie dokonano syntezy wszystkich tych ustaleń, wyróżniając w przypadku badań ze studentami, którzy ukończyli kurs analizy matematycznej, kilka obrazów. Zostały one nazwane z uwzględnieniem kluczowego elementu każdego z nich i uporządkowane poczynając od tych najlepiej oddających sens pojęcia granicy do najbardziej błędnych.

Scharakteryzuję tu w skrócie kluczowy element każdego z wyróżnionych obrazów. Pierwszy z nich to „Otoczenia”. Skojarzenia z nim związane prezentowane były przez 10% badanych studentów i okazały się (w większości) najbardziej operatywne z wszystkich ujawnionych. Były to różne formy odformalizowania definicji pojęcia granicy, głównie w sensie Cauchy’ego, mniej lub bardziej precyzyjne. Na przykład w odniesieniu do granicy ciągu, dość powszechne było wyobrażenie, iż „do dowolnego otoczenia liczby będącej granicą, czy też pasa wokół odpowiadającej jej prostej, muszą wpadać wszystkie wyrazy począwszy od pewnego miejsca”. Czasem badani chcieli jednak, by było to jedno „miejsce” (wskaźnik, czy też wyraz) dla wszystkich otoczeń, albo wystarczało im rozważanie tylko jednego w różny sposób wybieranego otoczenia.

Kolejny kluczowy element opisanego obrazu to „Dążenie wartości”, charakterystyczny dla 16% badanych. W tym przypadku nierzadko widoczne były wpływy określenia w sensie Heinego, choć do samej definicji odwoływało się niewielu studentów. Najbardziej charakterystyczne z ujawnionych skojarzeń to rozważanie, „czy dla argumentów bliskich, coraz mniej odległych, aż wreszcie »nieskończenie« bliskich punktu x_0 ($x_0 \in \mathbb{R}$), w którym ustalano granicę, wartości dążą do pewnej liczby, coraz mniej się różnią od niej, czy ta różnica staje się dowolnie mała”. Nie dla wszystkich musiała być jednak dowolnie mała; to jedna z ujawnionych „degeneracji”.

Następny wyróżniony obraz to „Dążenie wykresu”, występujący u największej grupy (34%) badanych osób. Charakterystyczne było tu ustalanie granicy

funkcji przez obserwację „dążenia” punktów wykresu, „ruchu” po nim. W przypadku $x_0 \in \mathbf{R}$ i granicy „właściwej” towarzyszyła mu zazwyczaj chęć dotarcia do punktu o pierwszej współrzędnej x_0 , choć samo x_0 nie musiało należeć do dziedziny. Większości studentów wystarczyło, by było tak jedynie dla argumentów bliskich x_0 . Wydawało im się, że dla istnienia granicy funkcji w takim punkcie konieczne jest istnienie ciągłych — w sensie intuicyjnym — „kawałków” wykresu z obu stron x_0 , chociażby „niewyobrażalnie”, „nieskończenie” małych, jak mówili. Byli jednak również tacy, którzy chcieli „poruszać się” w taki sposób po wykresie w całej dziedzinie. Traktowali więc granicę funkcji jako jej własność globalną; sądzili, iż wpływ na nią mają wszystkie jej argumenty i wszystkie wartości.

Kolejny kluczowy element to „Musi być określona”. Dla 18% badanych pierwszym brany pod uwagę elementem była określoność funkcji w punkcie (oczywiście, gdy $x_0 \in \mathbf{R}$). Traktowana była więc ona jako warunek konieczny istnienia w nim granicy. Niektórzy z nich w takiej sytuacji wprost kojarzyli granicę z ciągłością w tym punkcie, inni odwoływali się np. do skojarzeń związanych z „dążeniem” wykresu.

Następny wyróżniony element to „Wartość”. Przyjmowało ją za granicę funkcji w punkcie 9% badanych. Przy tym dla połowy z nich określoność w x_0 była warunkiem koniecznym i wystarczającym do istnienia w nim granicy, zaś dla pozostałych wystarczającym.

Ostatni obraz posiadany przez pozostałe 13% studentów nazwany został „Schematy”. Charakterystyczna dla nich była skłonność do organizowania wiedzy w procedury postępowania w określonych sytuacjach, często swoiste, niepoprawne i wzajemnie sprzeczne.

Powyżej przybliżono głównie kluczowy element każdego z obrazów granicy, a — jak wspomniano — każdy z nich zawierał jeszcze wiele innych. Niektóre można było znaleźć nawet w skrajnie odmiennych obrazach. Interesujące są skojarzenia związane z rozważaniem granicy funkcji w punkcie izolowanym jej dziedziny. Dość duża grupa badanych (11%) wprost stwierdziła, iż granica w takim punkcie, jako szczególnym, jest równa jej wartości (często jako uzasadnienie pojawiał się zwrot „z definicji”). Dla kolejnych 15% studentów było tak w sytuacji, gdy wszystkie elementy dziedziny były jej punktami izolowanymi (np. w odniesieniu do ciągu i naturalnego x_0). Następne 18% stwierdziło, że granica funkcji w takim x_0 jest równa wartości, gdy dostrzegali wizualne dążenie tych „oddzielnych”, jak mówili, punktów wykresu do $(x_0, f(x_0))$. Warto jeszcze wspomnieć np. o skojarzeniach związanych z podstawowymi twierdzeniami dotyczącymi granic. Aż 51% badanych zastosowało twierdzenie o granicy sumy również do nieskończenia wielu ciągów, a tylko 11% stwierdziło, że nie można tego zrobić. Ponad jedna trzecia (38%) z nich sądziła, że granica

różnicy funkcji jest równa różnicy ich granic również dla funkcji o granicy $+\infty$; mniej, bo 22% podało, iż by można je stosować, granice muszą być skończone. Wielu badanych studentów przyswoiło więc te twierdzenia w postaci nie uwzględniającej ich założeń.

W strukturach poznawczych studentów współistniały sprzeczne elementy: poprawna definicja i sprzeczne z nią skojarzenia, które nigdy nie były konfrontowane. Dla większości z nich to nie definicja była „ważniejszym” elementem obrazu, jeśli za kryterium „ważności” przyjąć wykorzystywanie podczas rozwiązywania problemów. Często wynikało to z niedostatecznego rozumienia samego sformułowania definicji granicy funkcji i nieumiejętności jej interpretacji⁴. Nierzadko wiązało się jednak z niezrozumieniem roli definicji matematycznej, nadającej sens pojęciu, i przeświadczeniem, iż o znaczeniu pojęcia decydują właśnie różnorodne skojarzenia. Czasem wprost te skojarzenia traktowane były, w szczególnych przypadkach, jako definicja.

Warto jeszcze wspomnieć, jakie skojarzenia w mniejszym, a jakie w większym stopniu uległy korekcie w toku studiów. Zupełnie skorygowane zostały głównie te bardzo osobliwe, stanowiące indywidualne procedury postępowania, znacznie różniące się od znaczenia pojęcia. W porównaniu bowiem z osobami rozpoczynającymi studia, u kończących je ujawniono ich niewiele. Udział procentowy niektórych niepoprawnych skojarzeń, dość powszechnych wśród badanych z pierwszego roku, nie uległ natomiast zbyt znaczącym zmianom. Dotyczyło to na przykład traktowania określoności funkcji w punkcie, jako warunku koniecznego istnienia w nim granicy (w obu przypadkach było to około 30% badanych). Zasięg wielu innych zmalał w mniejszym lub większym stopniu. Za przykład może służyć odpowiednio: utożsamianie granicy funkcji w punkcie skupienia dziedziny z jej wartością w nim oraz to samo przekonanie w odniesieniu do ciągu. Niektóre skojarzenia, których bezpośredni wpływ był znacznie mniejszy u osób kończących studia niż u rozpoczynających je, pozostawiły jednak swój ślad. Dotyczyło to na przykład postrzegania granicy funkcji jako jej własności globalnej; przekonania, iż wpływ na granicę mają wszystkie jej argumenty i wszystkie wartości (było ono dość powszechne wśród osób rozpoczynających studia, wśród kończących je dotyczyło 13% badanych). To właśnie mogło być źródłem uznawania przez wielu studentów za konieczne istnienie ciągłych, w sensie intuicyjnym, „kawałków” wykresu, chociażby „nieskończenie” małych, z obu stron x_0 .

⁴Prawie 70% badanych podawało definiens definicji, nawet w różnych wersjach, ale tylko 9% potrafiło operatywnie go wykorzystać. Zwykle studenci nie uwzględniali założeń, że punkt, w którym funkcja ma granicę, musi być punktem skupienia jej dziedziny. Często nie byli tego świadomi, skoro — jak wspomniano — blisko połowa z nich wskazywała wartość jako granicę w punkcie izolowanym.

Wydaże się zatem, że wiele błędnych skojarzeń związanych z granicą funkcji, jakie stwierdzono u osób, które ukończyły akademicki kurs analizy matematycznej, powstało jeszcze podczas poznawania tego pojęcia w szkole średniej. Istotne jest więc pytanie, dlaczego w toku studiów nie tylko nie zostały one w pełni skorygowane, ale pojawiły się nowe, a ukształtowany obraz granicy funkcji u osób kończących studia okazał się niezadowolający. Skoro stan ten jest porównywalny z obserwowanym w uczelniach zagranicznych, co wynika z publikacji, nasuwa się wniosek, iż przyswajanie pojęcia granicy niesie ze sobą tak wiele trudności, przeszkód i możliwości degeneracji, kryjących się w samej jego naturze, że kształtowanie tego pojęcia wymaga specjalnej organizacji i nie powinno być pozostawione — jak to się dzieje obecnie — głównie samym studentom.