

Marianna Ciosek
Akademia Pedagogiczna, Kraków

Dziewięć rozwiązań zadania geometrycznego — studium heurazy

1 Wstęp

Sprawdzanie prac pisemnych z egzaminów wstępnych na nauczycielskie studia matematyczne skłania do podjęcia pogłębionej analizy dydaktycznej takich prac w celu uzyskania, przynajmniej częściowej, odpowiedzi na pytania: Jak absolwenci dotychczasowej szkoły średniej radzą sobie z rozwiązywaniem zadań? Jak wykorzystują zdobyte w szkole wiadomości i umiejętności matematyczne? Czy stosują, a jeśli tak, to jakie, zabiegi heurystyczne ułatwiające rozwiązanie zadania? Na jakie trudności napotykają? Jak rozumieją metodę matematyczną?

Badanie dydaktyczne polegające na analizie gotowego już materiału, jaki stanowią pisemne rozwiązania zadań przedstawione przez kandydatów na studia matematyczne, choć ograniczone co do metody (badania kliniczne procesu rozwiązywania zadania są niewątpliwie głębsze), spełniają ważny warunek: obejmują niemalą populację absolwentów szkół średnich i uwzględniają znaczną różnorodność szkół.

Przedmiotem analizy prezentowanej w tym artykule są głównie pisemne rozwiązania zadania z geometrii analitycznej z jednego z egzaminów wstępnych na kierunek matematyka WSP w Krakowie. Jako element wspomagający metodę analizy prac pisemnych została zastosowana metoda obserwacji indywidualnych. Obserwowano 20 innych osób w czasie rozwiązywania tego zadania: uczennicę IV klasy jednego z krakowskich liceów oraz 19 studentów IV i V roku matematyki Akademii Pedagogicznej w Krakowie (październik 1999). Chodziło o uzyskanie odpowiedzi na pytanie, czy były wykonywane i ewentualnie w którym momencie pracy nad zadaniem: rysunek do zadania oraz sprawdzanie rachunku i otrzymanego wyniku rozwiązania. Tych informacji nie można było w sposób pewny odczytać z prac pisemnych kandydatów

na studia. Wyniki obserwacji indywidualnych miały pewien wpływ na sposób interpretacji niektórych zapisów z prac pisemnych egzaminowanych osób.

Analiza wspomnianego materiału jest ukierunkowana na pytania postawione na początku artykułu; jej celem jest w szczególności ujawnienie:

- 1) pozytywnych zabiegów heurystycznych stosowanych w rozwiązywaniu zadań z geometrii analitycznej,
- 2) charakteru trudności, na jakie uczniowie i absolwenci dotychczasowych szkół średnich napotykają w rozwiązywaniu takich zadań.

Zadania z działu „geometria analityczna” zostały wybrane z dwu powodów. Po pierwsze, wydaje się, że analiza rozwiązań zadań z egzaminów wstępnych może ujawnić przyczyny sukcesu i porażki w procesie rozwiązywania zadania w większym stopniu niż analiza rozwiązań innych zadań egzaminacyjnych. Tym, co skłania do takiego założenia jest fakt, że w odróżnieniu od innych zadań — próby rozwiązania zadania z geometrii analitycznej podejmuje większość kandydatów. Po drugie, refleksja nad przyczynami sukcesu i porażki w rozwiązywaniu zadań tego działu może pomóc w takim ukierunkowaniu uczenia ich rozwiązywania, by szczególnie sprzyjało realizacji celów kształcenia, jakie stawia się przed reformowaną szkołą. Mam tu na myśli przede wszystkim świadome planowanie rozwiązania zadania, świadomy wybór środków do realizacji poszczególnych punktów tego planu oraz świadome kontrolowanie przez ucznia wyników swojej pracy.

2 Treść zadania. Kierunek analizy jego rozwiązań

Na pisemnym egzaminie wstępnym na kierunek matematyka WSP w Krakowie w lipcu 1996 r. kandydaci rozwiązywali, między innymi, następujące zadanie:

Na płaszczyźnie dane są punkty $A(1, -3)$, $B(5, -1)$.

- a) Ile jest trójkątów prostokątnych o wierzchołkach A , B , C , gdzie C należy do wykresu funkcji $y = |x - 2| - 2$?
- b) Wyznacz współrzędne tego punktu C , dla którego pole trójkąta ABC z punktu a) zadania jest najmniejsze. Oblicz to pole.

W świetle klasyfikacji zadań matematycznych według Z. Krygowskiej (Krygowska, 1977b) jest to zadanie—zwykle zastosowanie teorii. W pewnym sensie

jest to nietypowe zadanie „na ekstrema” w kontekście pól figur; rozwiązując je, należy wskazać figurę o najmniejszym polu w skończonym zbiorze figur, który to zbiór trzeba wcześniej wyznaczyć. Uzyskanie końcowej odpowiedzi nie wymaga jednak ani trudnego rozumowania, ani skomplikowanego rachunku.

Analiza prac kandydatów na studia ujawniła z jednej strony

(1) różnorodność dróg rozwiązywania zadania,

z drugiej zaś

(2) trudności, na jakie absolwenci szkoły średniej napotykali w rozwiązywaniu tego zadania, a także błędy, jakie były ich udziałem.

Ta część artykułu zawiera dokładniejsze omówienie wymienionych wyżej punktów (1) i (2) oraz — na tym tle —

(3) ogólniejsze refleksje odnoszące się do przyczyn sukcesu i porażki w rozwiązywaniu zadań z geometrii analitycznej, w tym w szczególności uwagi o roli rysunku w rozwiązywaniu takich zadań.

3 Różne podejścia do zadania

Z liczby 161 kandydatów, którzy przystąpili do egzaminu, 18 nie podjęło żadnych prób rozwiązania analizowanego zadania. Pozostałe prace różnią się wieloma cechami. Wymienię niektóre z nich.

1. Cechą różniącą prace, widoczną już na pierwszy rzut oka, jest to, czy znajdują się w nich rysunki danych zadania, czy też nie. W 20 pracach pierwszego typu rysunek został wykonany błędnie (źle narysowano wykres funkcji).
2. Następną różnicą związana jest z kolejnością, w jakiej kandydaci rozwiązywali części a) i b) zadania. Niektórzy odpowiadali najpierw na pytanie a), stwierdzając wyraźnie, ile żądanych trójkątów istnieje, a dopiero potem podejmowali próbę rozwiązania zadania b), na ogół wykonując pewien rachunek. Inni — wykonywali najpierw rachunek, by w jego następstwie odpowiedzieć niejako równolegle na pytanie a), jak i na polecenie zawarte w części b).
3. Dalsze cechy, które różnicują rozwiązania, odnoszą się do:
 - liczby wskazanych trójkątów,
 - tego, czy na rysunku danych, o ile taki znajdował się w pracy, wskazywano położenie poszukiwanych punktów,

- sposobu wykonywania takiego rysunku (odręcznie, przy pomocy ekierki, konstrukcyjnie),
- sposobu uzyskania odpowiedzi do zadania b), w szczególności sposobu obliczania współrzędnych poszukiwanych punktów.

Rozwiązujący to zadanie podawali różne odpowiedzi na pytanie a). I tak:

- wielu stwierdziło poprawnie, że są 4 takie trójkąty; kąty proste dwu z nich umiejscawiali w wierzchołkach odpowiednio A i B , natomiast dla dwu pozostałych trójkątów wierzchołek kąta prostego wskazywali odpowiednio na półprostej o równaniu $y = -x$ dla $x < 2$ oraz półprostej o równaniu $y = x - 4$ dla $x \geq 2$;
- inni wskazali 3 lub tylko 2 z opisanych wyżej trójkątów;
- byli i tacy, którzy w wyniku przeprowadzonego (z błędem) rachunku odpowiadali: albo — istnieje tylko jeden trójkąt spełniający warunki zadania, albo — nie ma takiego trójkąta, który te warunki spełnia, albo — istnieje pięć takich trójkątów.

Ze względu na sposób poszukiwania przez rozwiązujących odpowiedzi na pytanie, który z trójkątów, o jakich mowa w zadaniu, ma najmniejsze pole, można wyodrębnić trzy różne podejścia do zadania.

Podejście pierwsze, typowo analityczne, charakteryzuje się tym, że dominującym elementem rozumowania prowadzącego do rozwiązania zadania był rachunek analityczny obejmujący:

- obliczenie współrzędnych każdego ze wskazanych w odpowiedzi do zadania a) punktów C_i ($i = 1, 2, 3, 4$),
- obliczenie pól wszystkich trójkątów prostokątnych, odpowiadających tym punktom,
- porównanie tych pól i wskazanie trójkąta o najmniejszym polu.

W podejściu drugim — geometrycznym — istotnym elementem było wcześniejsze ustalenie (w wyniku dostrzeżenia związków geometrycznych między figurami na rysunku), który ze wskazanych trójkątów spełnia warunek b) zadania, a dopiero później przeprowadzenie rachunku wyznaczającego nieznane współrzędne jednego z jego wierzchołków, różnego od punktów A i B .

W podejściu trzecim — uwzględniającym elementy rachunku różniczkowego — wykorzystywano schemat badania ekstremum funkcji.

Poniżej przedstawię 9 przykładowych rozwiązań omawianego zadania. Przykłady dobrane są tak, by ilustrowały opisane wcześniej różnice w rozwiązaniach, a także ujawniały stosowane przez kandydatów zabiegi heurystyczne

oraz wskazywały na trudności napotykane podczas rozwiązywania tego zadania. Prezentacja każdego rozwiązania będzie obejmować:

- kopię fragmentu pracy kandydata,
- opis rozwiązania zadania znajdującego się w tej pracy,
- komentarz, który jest próbą przedstawienia w zwięzłej formie umiejętności matematycznych kandydata, postrzeganych w świetle jego rozwiązania zadania.

Wspomniany komentarz uwzględnia trzy z wymienionych przez Schoenfelda (1985, 1987) kategorii czynników mających wpływ na proces rozwiązywania zadania przez jednostkę. Tymi kategoriami są:

- wiedza (*resources*),
- heurystyka (*heuristics*) — strategie i techniki stosowane w rozwiązywaniu zadań,
- samoregulacja, zarządzanie — panowanie nad sytuacją (*control*): ogół decyzji odnoszących się do wyboru wiedzy i strategii stosowalnych w danej sytuacji, planowanie czynności, sprawdzanie stopnia ich wykonania oraz poprawności otrzymywanych rezultatów na każdym etapie rozwiązywania zadania.

W komentarzach znajdują się także odniesienia do idei rozwoju wiedzy matematycznej według M. Hejný'ego, której istotę autor ujmuje krótko w następujący sposób:

... źródło naszych matematycznych działań rozłożymy na cztery części: pojęcia, fakty, umiejętność stosowania i schematy. (Hejný, 1997, s. 15)

Poza tym w artykule zwrócona będzie uwaga na typy rozumowania uwidocznione w rozwiązaniach zadania. Chodzi tu o rozumowanie formalne, rozumowanie intuicyjne oraz wnioskowanie empiryczne (Krygowska, 1977a).

UWAGA: W opisach rozwiązań zadania znajdują się dwojakiego rodzaju wyróżnienia tekstu. Jedno z nich, zaznaczone jako „[...]” jest interpretacją, jaką autorka artykułu nadaje zapisom rozwiązujących zadanie, drugie, **wytłuszczenia**, obejmuje opisy tych czynności rozwiązującego, które według piszącej te słowa zdecydowanie pomogły rozwiązać zadanie albo zdecydowanie to utrudniły.

4 Przykłady rozwiązań zadania

4.1 Rozwiązanie 1

4.1.1 Kopia fragmentu pracy autora Rozwiązania 1

ul. Fochowskich 2
39-204 KRAKÓW

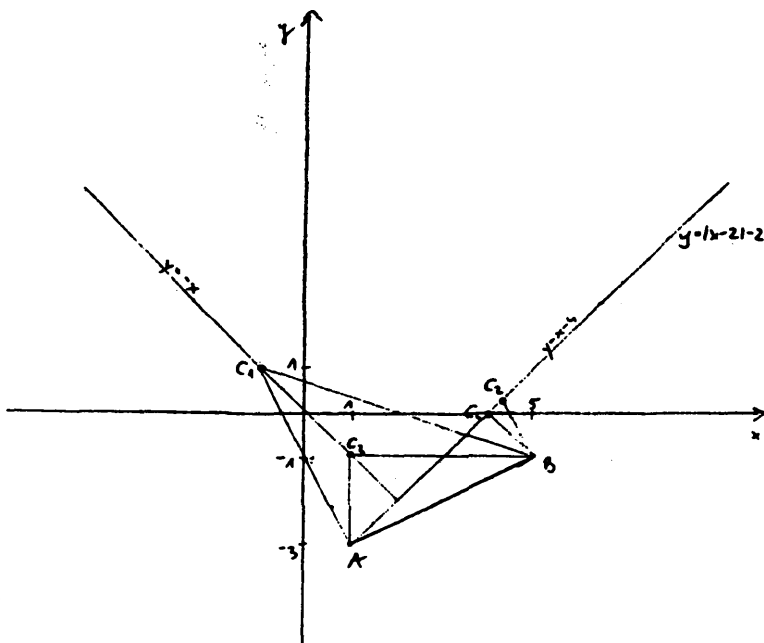
$$A(1, -3) \quad B(5, -1)$$

a) $C \in y = |x-2|-2$

$$y = |x-2|-2$$

$$\text{I} \begin{cases} x \in (-\infty; 2) \\ y = -x+2-2 \\ y = -x \end{cases}$$

$$\text{II} \begin{cases} x \in [2; +\infty) \\ y = x-2-2 \\ y = x-4 \end{cases}$$



Równanie prostej AB: $A(\overset{x_1}{1}, \overset{y_1}{-3}) \quad B(\overset{x_2}{5}, \overset{y_2}{-1})$

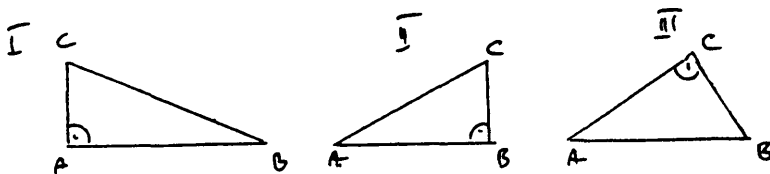
$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1)$$

$$(y + 3)(5 - 1) = (x - 1)(-1 + 3)$$

4.1.2 Opis Rozwiązania 1

W pracy znajduje się poprawnie wykonany rysunek danych zadania, ze starannie naniesionymi czterema trójkątami, z których każdy ma jako dwa wierzchołki punkty A , B , a trzeci wierzchołek należący do wykresu danej funkcji. Z rysunku można odczytać, że trójkąty te są prostokątne.

Poniżej rysunku rozwiązujący napisał równanie prostej przechodzącej przez punkty A , B . Zauważył dalej, że wierzchołek kąta prostego w trójkątach, o jakie chodzi w zadaniu, może się znajdować albo w punkcie A , albo w punkcie B , albo w punkcie C ; zapisał bowiem: „Są trzy możliwości”. Zilustrował je poniższymi rysunkami:



Potem kandydat zapisał współrzędne punktu C jako $C(x, |x-2|-2)$ i obliczył odległość AB , natomiast odległości AC i BC wyraził za pomocą niewiadomej x . Następnie zajął się dokładniej przypadkiem I, to jest obliczył współrzędne punktu C_1 według planu:

Sposób 1. Stosowanie twierdzenia Pitagorasa

(w $\triangle ABC_1$ kąt przy wierzchołku A jest prosty):

- wyrażenie współrzędnych punktu C_1 jako $(x, |x-2|-2)$,
- wyznaczenie odległości AB , AC oraz BC jako długości wektorów odpowiednio $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{BC}$,
- rozwiązanie równania (z niewiadomą x) $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

W podobny sposób zdający rozpatrzył wyróżnione wcześniej przypadki II i III. Ostatecznie, w wyniku przeprowadzonego rachunku, podał odpowiedź do zadania a) w następującej postaci:

Są cztery takie trójkąty:

- $A(1, -3)$, $B(5, -1)$, $C_1(-1, 1)$;
- $A(1, -3)$, $B(5, -1)$, $C_2(4\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$;
- $A(1, -3)$, $B(5, -1)$, $C_3(1, -1)$;
- $A(1, -3)$, $B(5, -1)$, $C_4(4, 0)$.

Rozwiązujący obliczył następnie pole każdego z czterech trójkątów jako połowę iloczynu jego przyprostokątnych, po czym wskazał wśród otrzymanych liczb najmniejszą. Odpowiedź (poprawną) do części b) zadania wyraził w następujący sposób: *Pole trójkąta ABC jest najmniejsze wtedy, gdy punkt C ma współrzędne (4, 0).*

UMOWA: W opisach wszystkich pozostałych rozwiązań zostaną zachowane oznaczenia punktów C_1 – C_4 z Rozwiązania 1. W niektórych przypadkach będą więc one niezgodne z oznaczeniami na kopii pracy kandydata.

4.1.3 Komentarz

Wiedza

fakty: autor Rozwiązania 1 zna

- wzór wyrażający równanie prostej przechodzącej przez 2 punkty o zadanych współrzędnych,
- wzór na pole trójkąta prostokątnego,
- wzór na pole trójkąta wyrażony za pomocą współrzędnych jego wierzchołków,
- twierdzenie Pitagorasa;

umiejętność stosowania: autor Rozwiązania 1 umie

- zastosować definicję bezwzględnej wartości liczby do przedstawienia przepisu funkcji $y = |x - 2| - 2$ w postaci dwunormowej,
- sporządzić wykres funkcji zadanej dwunormowo,
- rozwiązać równanie, w którym występuje symbol bezwzględnej wartości,
- wykorzystać twierdzenie Pitagorasa do wskazania, o ile istnieje, punktu, którego współrzędne opisuje dany związek i który wraz z dwoma danymi punktami wyznacza trójkąt prostokątny.
[Kandydat nie ma chyba świadomości faktu, że w rozwiązaniu tego zadania stosuje się zarówno twierdzenie Pitagorasa, jak i twierdzenie do niego odwrotne.]

Heurystyka — autor Rozwiązania 1 stosuje strategię „Przedstaw sytuację na rysunku” (chodzi tu o rysunek, na którym występują dane zadania, jak również rysunki pomocnicze).

Jest prawdopodobne, że punkty C_1 — C_4 zostały naniesione na rysunek na pierwszej stronie pracy autora Rozwiązania 1 (patrz kopia) dopiero

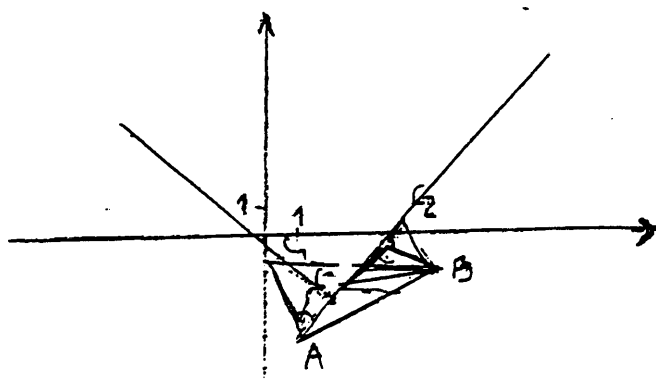
po obliczeniu ich współrzędnych. Rysunek ten pełni rolę ilustracji wyników otrzymanych drogą rachunkową — jest formą sprawdzenia, czy wyznaczone punkty spełniają warunek prostokątności odpowiednich odcinków.

Panowanie nad sytuacją. Sprawdzanie wyników — autor pracy niepotrzebnie pisał równanie prostej przechodzącej przez punkty A, B — nigdzie go nie wykorzystał. Być może obliczył „to, co można”, zanim powstał plan rozwiązania. W dalszej części swojej pracy rozwiązujący postępował już planowo. Są oznaki świadomego wyboru środka do realizacji (fragmentów) planu: najpierw — zamierzał liczyć pole trójkąta ABC (część b) zadania) za pomocą wzoru, będącego konsekwencją wzoru wyznacznikowego. Zapisany wzór autor rozwiązania jednak przekreślił i wybrał wzór na pole trójkąta prostokątnego — być może dlatego, że uznał go za prostszy do stosowania w rozważanej sytuacji. Wszystkie rachunki autor pracy wykonał bezbłędnie.

4.2 Rozwiązanie 2

4.2.1 Kopia fragmentu pracy autora Rozwiązania 2

$$y = |x-2| - 2 = \begin{cases} x-4 & x \geq 2 \\ -x & x < 2 \end{cases} \quad \text{wart. bezwzględny}$$



2)

nclm. pr. AB

$$y+3 = \frac{-1+3}{5-1}(x-1) \quad y = \frac{1}{2}x - 3\frac{1}{2}$$

Przyjmując te punkty wierzchołków C może być 3

 C_1, C_2 — gdy $\angle A$ lub $\angle B$ jest prosty C_3, C_4 — gdy $\angle C$ jest kątem prostym.

Próbnemu pr. prostopadłej do AB i przech. przez A

$$y+3 = -2(x-1) \Rightarrow y = -2x-1 \quad \text{wtedy} \quad C_1 = (-1, 1)$$

nclm. pr. prostopadłej do AB i przech. przez B

$$y+1 = -2(x-5) \Rightarrow y = -2x-9 \quad \text{wtedy} \quad C_2 = (-\frac{5}{2}, -\frac{9}{2})$$

4.2.2 Opis Rozwiązania 2

Autor omawianego rozwiązania wykonał rysunek danych. Umieścił w nim, rysując odręcznie, 4 trójkąty zachowujące pewne własności trójkątów, o jakie chodzi w zadaniu. Dla zaznaczenia tego, że trójkąty są prostokątne użyty został symbol kąta prostego (bez tego trudno byłoby tę własność trójkątów odczytać z rysunku).

Pod rysunkiem znalazł się zapis: *Przyjmując te punkty wierzchołków C może być 4;*

C_1, C_2 — gdy kąt A lub kąt B jest prosty

i C_3, C_4 — gdy kąt C jest kątem prostym.

Dalszą część pracy stanowi rachunek mający na celu ustalenie współrzędnych wspomnianych wcześniej punktów: C_1, C_2, C_3, C_4 .

Współrzędne punktu C_1 obliczone zostały (poprawnie) w następujący sposób:

Sposób 2. Szukanie punktu wspólnego prostych

(w $\triangle ABC_1$ kąt przy wierzchołku A jest prosty):

- napisanie równania prostej przechodzącej przez punkty A, B,
- napisanie równania prostej k prostopadłej do prostej AB przechodzącej przez punkt A,
- rozwiązanie układu warunków: równania prostej k oraz równania $y = -x$, z dołączeniem warunku $x < 2$ (część wykresu funkcji $y = |x-2|-2$).

Ostatni punkt powyższego planu rozwiązujący zadanie wykonał (poprawnie) — bez zapisania drugiego równania układu, tj. równania fragmentu wykresu danej funkcji, pod pierwszym równaniem.

W analogiczny sposób obliczone zostały współrzędne punktu C_2 , dla którego kąt przy wierzchołku B w trójkącie ABC_2 jest prosty (tym razem poprowadzono prostą przechodzącą przez punkt B , prostopadłą do prostej AB). I tu także kandydat nie zapisał drugiego równania układu pod pierwszym. Wynik, jaki tu otrzymał: $C_2 = (-\frac{5}{3}, -\frac{17}{3})$, jest błędny.

Dla obliczenia współrzędnych poszukiwanego wierzchołka trójkąta prostokątnego o kącie prostym w tym wierzchołku, należącym do wykresu danej funkcji, rozwiązujący wykonał czynności obejmujące:

Sposób 3. Stosowanie zależności między współczynnikami kierunkowymi prostych prostopadłych

(w $\triangle ABC_3$ kąt przy wierzchołku C_3 jest prosty):

- a) wyrażenie współrzędnych punktu C_3 jako (x_0, y_0) ,
- b) napisane równania prostej k , przechodzącej przez punkty A, C_3 (z parametrami: x_0, y_0),
- c) napisanie równania prostej l przechodzącej przez punkty B, C_3 ,
- d) napisanie równania wyrażającego związek między współczynnikami kierunkowymi prostych k, l jako prostych do siebie prostopadłych,
- e) rozwiązanie dwu układów warunków:
 - (1) równania opisanego w punkcie d) i równania: $y = x - 4$, z dołączeniem warunku $x \geq 2$
oraz
 - (2) równania opisanego w punkcie d) i równania $y = -x$, z dołączeniem warunku $x < 2$.

Do rozwiązywania układu (1) wkradł się błąd rachunkowy; jego następstwem było stwierdzenie rozwiązującego, że układ ten nie ma rozwiązania.

Układ (2) rozwiązany został poprawnie. W wyniku przeprowadzonego rachunku rozwiązujący zadanie napisał: *Są więc trzy takie trójkąty*. Wprowadził też poprawki do zdania napisanego w rozwiązaniu pod rysunkiem na wstępie. Cyfrę „4” zamienił na „3” oraz wykreślił symbol C_4 .

4.2.3 Komentarz

Wiedza

fakty: autor Rozwiązania 2 zna

- wzór wyrażający równanie prostej przechodzącej przez 2 punkty,
- związek między współczynnikami kierunkowymi w równaniach prostych wzajemnie prostopadłych,
- twierdzenia odnoszące się do rozwiązywania równania kwadratowego;

umiejętność stosowania: autor Rozwiązania 2 umie

- sporządzić wykres funkcji, w której występuje znak bezwzględnej wartości,
- zastosować wymienione wyżej wzór i twierdzenie,
- rozwiązać układ równań: równanie o dwu niewiadomych w postaci proporcji oraz równanie liniowe o dwu niewiadomych z dołączeniem dodatkowego warunku w postaci nierówności typu $x < a$ lub $x \geq a$.

Heurystyka — autor Rozwiązania 2 stosuje strategię „Przedstaw sytuację na rysunku”. Po przedstawieniu danych zadania w układzie współrzędnych, próbuje odpowiedzieć na pytanie — Ile może istnieć obiektów spełniających warunki zadania? Hipotetyczną (prawdopodobną) odpowiedź na to pytanie ilustruje na rysunku. Samo wykonanie rysunku, choć tu niezbyt starannego, jest integralną częścią rozwiązania. Rysunek przedstawia globalny, geometryczny obraz sytuacji powstały w wyniku pewnego rozumowania — poszukiwania odpowiedzi na pytanie: Jak geometrycznie określić położenie poszukiwanych punktów? Dopiero po wykonaniu rysunku kandydat przystępuje do analizy lokalnej sytuacji, tj. rachunku współrzędnych poszczególnych punktów.

Panowanie nad sytuacją. Sprawdzanie wyników — są w analizowanej tu pracy oznaki panowania nad sytuacją; jej autor zmienił wstępną, hipotetyczną, odpowiedź na pytanie „Ile?”, uwzględniając wynik przeprowadzonego rachunku. Nie uświadomił sobie jednakże tego, że to rachunek jest przeprowadzony z błędem, a nie błędnie postawiona hipoteza. Rozwiązujący popełnił kilka błędów rachunkowych. Ich przyczyną może być między innymi to, że nie zapisywał wyraźnie obok siebie równań układu: jedno zapisał, drugie „przerzucił” w pamięci z innej części kartki. Przy

takiej technice łatwo o pomyłkę, a trudno sprawdzić poprawność rachunku. Tej ostatnio wspomnianej czynności zdający raczej nie wykonywał.

4.3 Rozwiązanie 3

4.3.1 Kopia fragmentu pracy autora Rozwiązania 3

 dane
 $A(1, 3)$
 $B(5, 1)$
 $C(x, |x-2|-2)$

$y = |x-2|-2$
 $|y| = |x| \quad \vec{v} = [2, -2]$

$C = (x, x-4) \text{ dla } x \geq 2$
 $C = (x, -x) \text{ dla } x < 2$

$|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$
 $|AB| = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$
 $AC = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (x-1)^2}$
 b
 $|AC| = \sqrt{(x-1)^2 + (x-3)^2}$
 $B(1)$

$\vec{AB} = [5-1, 1-3] = [4, -2]$
 $\vec{AC} = [x-1, x-4] \text{ dla } x \geq 2$
 $\vec{AC} = [x-1, 3-x] \text{ dla } x < 2$

$\vec{AB} \perp \vec{AC} \Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \cdot (x-1) + 2 \cdot (x-4) = 4x-4+2x-8 = 6x-12 = 0$
 $6x-12=0 \Leftrightarrow 6x=12 \Leftrightarrow x=2$

$\vec{AC} \cdot \vec{AB} = 4(x-1) + 2(3-x) = 4x-4+6-2x = 2x+2 = 0 \Leftrightarrow$
 $2x+2=0 \Leftrightarrow 2x=-2 \Leftrightarrow x=-1$

$\vec{CA} = [1-x, 3-x]$
 $\vec{CB} = [5-x, 1-x]$

$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = (1-x)(5-x) + (3-x)(1-x) = 5-5x+x^2-3x+x^2+3-3x+x^2 = 3x^2-10x+8 = 0$
 $3x^2-10x+8=0 \Leftrightarrow \Delta = 100-96 = 4 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 4/3$

$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = (1-x)(5-x) + (3-x)(1-x) = 5-5x+x^2+3-3x+x^2 = 2x^2-8x+8 = 0$
 $2x^2-8x+8=0 \Leftrightarrow \Delta = 64-64 = 0 \Rightarrow x = 2$

4.3.2 Opis Rozwiązania 3

Kandydat wykonał rysunek danych. Zapisał współrzędne poszukiwanego punktu C jako:

$$C = (x, x - 4) \quad \text{dla } x \geq 2, \quad C = (x, -x) \quad \text{dla } x < 2.$$

Następnie obliczył odległość AB oraz wyraził odległość AC jako funkcję zmiennej x , określoną dwunormowo. Obliczenia te zostały jednak przekreślone, a w dalszej części pracy nad rozwiązaniem zadania zdający przeszedł na rachunek wektorowy. Podjął najpierw obliczenie współrzędnych tego z poszukiwanych punktów, dla którego kąt przy wierzchołku A jest prosty. Rachunek przebiegał według planu:

Sposób 4. Stosowanie warunku: iloczyn skalarny wektorów prostopadłych jest równy 0 (w $\triangle ABC_1$ kąt przy wierzchołku A jest prosty):

- wyrażenie współrzędnych punktu C_1 jako $(x, |x - 2| - 2)$,
- wyznaczenie współrzędnych wektorów $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{BC}$,
- rozwiązanie równania $\vec{AB} \circ \vec{AC} = 0$.

W realizacji ostatniego punktu powyższego planu kandydat uwzględnił dwa przypadki. W równaniu $\vec{AB} \circ \vec{AC} = 0$ podstawił współrzędne wektora $\vec{AC}$:

- raz przy założeniu, że punkt C należy do półprostej o równaniu $y = x - 4$,
- drugi raz — przy założeniu, że punkt C należy do półprostej o równaniu $y = -x$.

W żadnym z tych przypadków rozwiązujący nie uwzględnił stosownego założenia odnoszącego się do x , a więc: $x \geq 2$ w pierwszym z nich oraz $x < 2$ — w drugim. W ten sposób w pierwszym przypadku otrzymał warunek $x = 1$, obok którego zanotował: (czyli 1 Δ). Rozważając przypadek 2. doszedł do warunku $x = -1$; obok niego także zanotował (czyli 1 Δ).

W żadnym z tych dwu przypadków rozwiązujący nie obliczył rzędnych poszukiwanych punktów, dla których otrzymane kolejno liczby były odciętymi.

Następnie zdający zajął się warunkiem $\vec{CA} \perp \vec{CB}$, prowadzącym do równania $\vec{CA} \circ \vec{CB} = 0$. Znow rozróżnił dwa przypadki, analogiczne do 1. i 2. Otrzymał kolejno dwa równania kwadratowe z niewiadomą x jako odciętą poszukiwanego punktu C . Stwierdził, że jedno z tych równań ma dodatni wyróżnik. Obok tego zapisu zanotował: (czyli 2 Δ). Drugie z rozważanych równań

kwadratowych przyjęło postać $x^2 = -1$; stosownie do tego rozwiązujący zapisał: $x \in \emptyset$.

Warunek $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{BA}$, rozważany jako ostatni, doprowadził autora rozwiązania najpierw do równania $x = 4\frac{1}{3}$, opatrzonego komentarzem (czyli 1Δ), a potem do równania $x = 9$, opatrzonego analogicznym komentarzem.

Przedstawiony wyżej etap rozwiązywania zadania kandydat zamknął stwierdzeniem: „Zgodnie z warunkami zadania można otrzymać 6 trójkątów prostokątnych ABC ”.

Następny etap swojej pracy zdający zaczął od obliczania rzędnych punktów, których odcięte obliczał wcześniej. Podstawiał kolejno otrzymywane wartości x , tak do przepisu $y = x - 4$, jak i do przepisu $y = -x$, bez uwzględniania założeń, przy których te przepisy obowiązują.

Po otrzymaniu współrzędnych tylko trzech punktów:

$$(*) \quad C(1, -3), C(1, -1), C(-1, 4)$$

(ten ostatni obliczony z błędem), kandydat przeszedł do obliczania pól trójkątów odpowiadających wyznaczonym powyżej punktom C . Stwierdził, że pole trójkąta odpowiadającego punktowi $C(1, -3)$, liczone jako połowa wartości bezwzględnej wyznacznika pary wektorów $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, jest równe 0. Prawdopodobnie po uzyskaniu takiego wyniku zdający uświadomił sobie, że ten punkt nie spełnia warunków zadania. Widoczne jest bowiem, że w rozwiązaniu zostały dokonane poprawki:

- skreślono zapisy (*),
- skreślono notatkę (czyli 1Δ) obok zapisu $x = 1$,
- odpowiedź do części a) zadania: ...można otrzymać 6 trójkątów zastąpiono sformulowaniem: ...można otrzymać 5 trójkątów.

Ostatnim rachunkiem zapisanym w pracy jest obliczenie pola jeszcze jednego trójkąta ABC , odpowiadającego kolejnemu z wyznaczonych punktów C (patrz (*)).

4.3.3 Komentarz

Wiedza

fakty: autor Rozwiązania 3 zna

- warunek prostopadłości wektorów o zadanych współrzędnych jego końców,

- wzór na pole trójkąta wyrażone za pomocą wyznacznika pary wektorów;

umiejętność stosowania: autor Rozwiązania 3 umie

- zastosować wspomniany wyżej warunek oraz wzór na pole trójkąta,
- zastosować definicję bezwzględnej wartości liczby do przepisu funkcji f , gdzie $f(x) = |x - 2| - 2$, w konsekwencji czego otrzymuje funkcję zadaną dwunormowo:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = -x & \text{dla } x < 2 \\ f_2(x) = x - 4 & \text{dla } x \geq 2, \end{cases}$$

- sporządzić wykres funkcji f ,
- natomiast nie umie zastosować przepisu funkcji f , jako funkcji zadanej dwunormowo; rozumie jej przepis jako: $y = f_1(x)$ lub $y = f_2(x)$, bez założeń ograniczających zakres stosowalności każdego z przepisów, mimo iż odpowiednie założenia zapisuje obok przepisów funkcji.

Heurystyka — autor Rozwiązania 3 nie stosuje strategii „Przedstaw sytuację na rysunku”, bo choć wykonał rysunek danych, to nie wykorzystał go ani do uzyskania odpowiedzi na pytanie typu: „Ile?”, ani do sprawdzenia, czy uzyskane rachunkiem rezultaty są prawdopodobne;

Panowanie nad sytuacją. Sprawdzanie wyników — autor Rozwiązania 3 postępował według ustalonego planu. W zasadzie sprawdzał otrzymane wyniki (współrzędne punktów) wybiórczo. Odrzucił punkt $(1, -3)$, otrzymany w wyniku przeprowadzonego rachunku, jako pozostający w sprzeczności z warunkami zadania; obliczeń odnoszących się do współrzędnych innych punktów raczej nie sprawdzał.

Odpowiedź: *Jest 5 punktów...* świadczy o tym, że autor omawianego rozwiązania w ogóle nie ma całościowego obrazu sytuacji — polega jedynie na rachunku, którego nie wykonał poprawnie z powodu trudności pojęciowej.

4.4.2 Opis Rozwiązania 4

Kandydat wskazał na rysunku danych tylko dwa punkty, które spełniają warunki zadania, mianowicie te, dla których wierzchołek kąta prostego należy do wykresu danej funkcji. **Wyznaczył je konstrukcyjnie**, kreśląc okrąg o środku w punkcie, który jest środkiem odcinka AB , i promieniu długości równej długości odcinka AB . Szukane punkty, wskazane przez rozwiązującego zadanie, to punkty wspólne wspomnianego okręgu z wykresem danej funkcji. Współrzędne tych punktów obliczone zostały w wyniku postępowania obejmującego:

Sposób 5. Szukanie punktów wspólnych okręgu z wykresem funkcji

(w $\triangle ABC_3$ kąt przy wierzchołku C_3 jest prosty)

(w $\triangle ABC_4$ kąt przy wierzchołku C_4 jest prosty):

- a) napisanie równania okręgu $o(O, \frac{AB}{2})$, gdzie O jest środkiem odcinka AB ,
- b) rozwiązanie układu równań: równania okręgu z a) oraz równania $y = |x - 2| - 2$.

Odpowiedź do zadania a), napisana przez zdającego, brzmiała: *Są 2 takie trójkąty.*

Następnie rozwiązujący obliczył pola trójkątów prostokątnych odpowiadających wyznaczonym punktom, kolejno jako: $\frac{1}{2}|\overrightarrow{d(AB, AC_3)}|$ oraz $\frac{1}{2}|\overrightarrow{d(AB, AC_4)}|$. Wynik porównania otrzymanych liczb zapisał w następującej postaci: *Dla $C = (4, 0)$ pole trójkąta ABC jest najmniejsze i wynosi $3j^2$.*

4.4.3 Komentarz

Wiedza

fakty: autor Rozwiązania 4 zna

- twierdzenie: Kąt wpisany w okrąg oparty na jego średnicy jest prosty,
- wzory wyrażające współrzędne środka odcinka przy zadanych współrzędnych jego końców,
- wzór na długość odcinka przy zadanych współrzędnych jego końców,
- postać równania okręgu o zadanych współrzędnych jego środka i znanej długości promienia,
- wzór na pole trójkąta prostokątnego;

umiejętność stosowania: autor Rozwiązania 4 umie

- zastosować (w nietypowej sytuacji) wymienione wyżej twierdzenie oraz wykorzystać wymienione wzory,
- rozwiązać układ równań, z których jedno jest równaniem drugiego stopnia o dwu niewiadomych, a drugie równaniem, w którym występuje znak bezwzględnej wartości.

Heurystyka — autor Rozwiązania 4 stosuje heurystyki: „Przedstaw sytuację na rysunku”, „Jeśli potrafisz, skonstruuj poszukiwaną figurę”.

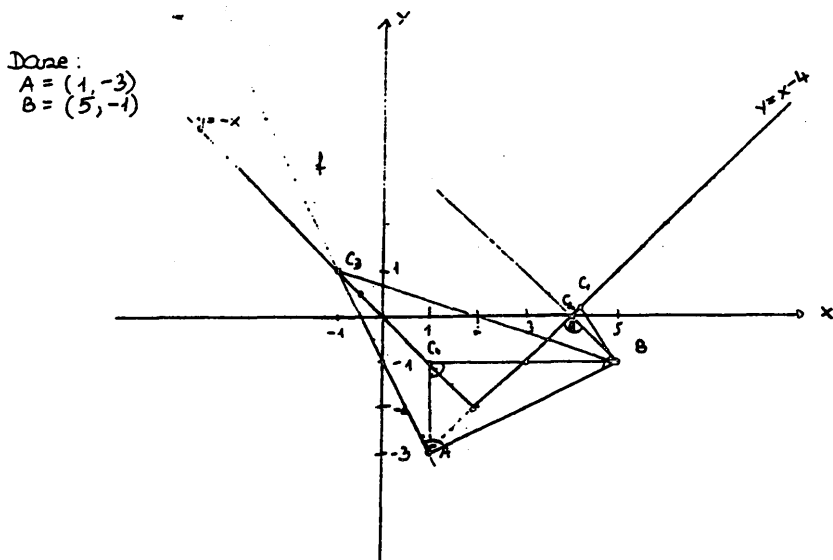
Tu poszukiwanych figur jest kilka; każda z nich jest trójkątem prostokątnym, w istocie wyznaczonym przez poszukiwany jeden jego wierzchołek. Sposób konstrukcji wskazuje jednocześnie sposób obliczania współrzędnych poszukiwanych punktów. Polega on na przetłumaczeniu każdego kroku konstrukcji na język rachunku, np. „narysuję okrąg” — „napiszę równanie tego okręgu”.

Panowanie nad sytuacją. Sprawdzanie wyników — autor Rozwiązania 4 po znalezieniu dwóch trójkątów raczej nie zadaje sobie pytania, czy nie ma jeszcze innych trójkątów spełniających warunki zadania. Powodem może być to, że niejako dodatkowo założył (czyli nałożył więcej warunków, niż wynikałoby to z treści zadania), iż wierzchołek kąta prostego musi należeć do wykresu danej funkcji. Wyzначył więc tylko takie trójkąty i uznał, że zadanie rozwiązał. Mogłoby być i tak, że ta sytuacja skojarzyła się zdającemu od razu z twierdzeniem „kąta wpisany w okrąg, oparty na jego średnicy jest prosty”. Tę ideę zaczął od razu realizować, i to spowodowało, że zagubił kierunek myślenia nastawionego na pytanie „Ile?”. Odpowiedź na to pytanie mogłaby polegać na postawieniu sobie pytania: „Przy którym z trzech wierzchołków może być umiejscowiony wierzchołek kąta prostego?”.

[Prowadzone przeze mnie obserwacje pokazały, że obydwie interpretacje postępowania autora omawianego rozwiązania są prawdopodobne.]

4.5 Rozwiązanie 5

4.5.1 Kopia fragmentu pracy autora Rozwiązania 5



a) $y = |x-2| - 2$

1° $x-2 \geq 0$
 $x \geq 2$

$y = x-2-2$

$y = x-4$

2° $x-2 < 0$
 $x < 2$

$y = -x+2-2$

$y = -x$

$$y = \begin{cases} -x & \text{dla } x \in (-\infty, 2) \\ x-4 & \text{dla } x \in [2, +\infty) \end{cases}$$

Odp. Są 3 Δ prostokątne ABC, gdzie C należy do wykresu funkcji $y = |x-2| - 2$

b) - pr. AB: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$

$A = (1, -3), B = (5, -1)$

$y + 3 = \frac{-1+3}{5-1} (x-1)$

$y + 3 = \frac{2}{4} (x-1)$

$y = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} - 3$

$y = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} - \frac{6}{2}$

$y = \frac{1}{2} x - \frac{7}{2}$

pr. l $\perp$ AB i przechodzi przez punkt B = (5, -1)

l: $y = -2x + b$

$-1 = -10 + b$

$b = -1 + 10 = 9$

$y = -2x + 9$

punkt. C: $\begin{cases} y = -2x + 9 \\ y = \frac{1}{2} x - \frac{7}{2} \end{cases}$

$x - 4 = -2x + 9 \quad C_1 = (\frac{13}{3}, \frac{1}{3})$

$x + 2x = 9 + 4$

$3x = 13$

$x = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$

$hy = \frac{13}{3} - \frac{12}{3} = \frac{1}{3}$

4.5.2 Opis Rozwiązania 5

Na rysunku wykonanym przez kandydata znajdują się dane zadania oraz naniezione 4 trójkąty, o których rozwiązujący zakłada, że spełniają warunki zadania.

[Odpowiedź do części a) zadania zapisana pod rysunkiem sugeruje, że do obliczenia współrzędnych poszukiwanych punktów rozwiązujący przeszedł po wyraźnym uświadomieniu sobie, ile jest trójkątów spełniających warunki zadania. Najpierw widział 3 takie trójkąty (świadczą o tym „niekolejne” oznaczenia wskazanych wierzchołków oraz cyfra „3” wyraźnie widniejąca w zapisie odpowiedzi do części a) zadania), a później dostrzegł jeszcze jeden i poprawił cyfrę „3” na „4”. W którym momencie to się stało, nie wiadomo. Jest faktem, że ostatecznie autor wskazał wszystkie trójkąty spełniające warunki zadania.]

Sposób obliczenia poszukiwanych współrzędnych sugeruje, że autor rozwiązania zadał sobie pytanie: **W jaki sposób skonstruować poszukiwane punkty?** Każdy z 4 wskazanych na rysunku punktów C_1 , C_2 , C_3 , C_4 został wyznaczony przy pomocy rysowania odpowiednich prostych.

Rachunek współrzędnych tych wierzchołków trójkątów prostokątnych, dla których kąty proste znajdują się przy wierzchołkach A i B przebiegał odpowiednio według sposobu opisanego już na str. 13 jako Sposób 2 (poszukiwanie punktów wspólnych dwu prostych). Punkty, dla których odpowiadające im trójkąty mają kąty proste przy wierzchołkach należących do wykresu danej funkcji, autor tego rozwiązania skonstruował inaczej niż autorzy wcześniej opisanych rozwiązań.

I tak — dla wyznaczenia poszukiwanego punktu należącego do półprostej $y = -x$ dla $x < 2$ kandydat poprowadził prostą przechodzącą przez punkt B i prostopadłą do osi Oy oraz prostą przechodzącą przez punkt A i prostopadłą do osi Ox . Te proste przecinają się, oczywiście, w punkcie należącym do prostej $y = -x$, bo odcięta punktu A wynosi 1, a rzędna punktu B jest liczbą do niej przeciwną. Zgodnie z przyjętymi wcześniej oznaczeniami współrzędne punktu C_3 (na rysunku kandydata jest to punkt C_4) wyznaczone zostały w następujący sposób:

Sposób 6. Prowadzenie prostych równoległych do osi układu współrzędnych (w $\triangle ABC_3$ kąt przy wierzchołku C_3 jest prosty):

- napisanie równania prostej przechodzącej przez A i prostopadłej do osi Ox , czyli $x = 1$,
- napisanie równania prostej przechodzącej przez punkt B , prostopadłej do osi Oy ,
- wskazanie punktu $(1, -1)$ jako punktu wspólnego prostych wyznaczo-

nych w a) i b).

Dalej zdający zauważył, że punkt A należy do prostej o równaniu $y = x - 4$. Skonstatował więc, że dla wskazania punktu C_4 (na rysunku tej osoby odpowiada on punktowi C_2) wystarczy poprowadzić prostą przechodzącą przez B , prostopadłą do prostej, równanie której z warunkiem $x \geq 2$ opisuje część wykresu danej funkcji. Stosownie do tego sposobu konstrukcji, współrzędne punktu C_4 obliczone zostały według planu:

Sposób 7. Szukanie punktu wspólnego prostych prostopadłych

(w $\triangle ABC_4$ kąt przy wierzchołku C_4 jest prosty):

- a) napisanie równania prostej m przechodzącej przez punkt B , prostopadłej do prostej o równaniu $y = x - 4$,
- b) rozwiązanie układu warunków: równania prostej m i równania $y = x - 4$ z dołączeniem warunku $x \geq 2$.

Po obliczeniu współrzędnych punktu C_1 **rozwiązujący od razu obliczył pole $\triangle ABC_1$, jako połowę iloczynu przyprostokątnych. Podobnie postępował w odniesieniu do każdego z pozostałych punktów.** Liczby wyrażające pola trójkątów w tekście rozwiązania jego autor wyróżnił podkreśleniem.

W ten sposób uzyskał i zapisał poprawną odpowiedź do części b) zadania.

4.5.3 Komentarz

Wiedza

fakty: autor Rozwiązania 5 zna

- wzór wyrażający równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez 2 punkty o zadanych współrzędnych,
- wzór wyrażający związek między współczynnikami kierunkowymi prostych prostopadłych,
- wzór na długość odcinka o zadanych współrzędnych jego końców,
- wzór na pole trójkąta prostokątnego;

umiejętność stosowania: autor Rozwiązania 5 umie

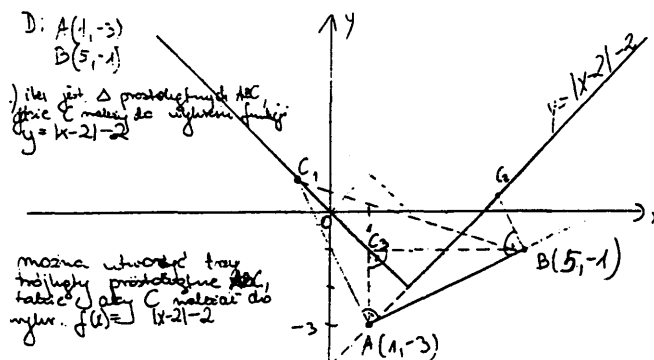
- zastosować wymienione wyżej wzory,
- sprawdzić, czy punkt o zadanych współrzędnych spełnia równanie prostej oraz podać związek między współrzędnymi punktu należącego do wykresu funkcji,
- rozwiązać układ równań liniowych o dwu niewiadomych.

Heurystyka — autor Rozwiązania 5 stosuje heurystyki: „Przedstaw sytuację na rysunku”, „Zbadaj, czy dane zadania pozostają ze sobą w jakimś związku” (chodzi tu np. o to, czy dany punkt należy do danej prostej), „Jeśli potrafisz, skonstruuj poszukiwaną figurę”. Jeśli chodzi o związki między danymi zadaniami, to autor tego rozwiązania wykorzystał zarówno to, że punkt A należy do danej prostej, jak i to, że odcięta punktu A jest przeciwna do rzędnej punktu B .

Panowanie nad sytuacją. Sprawdzanie wyników — zapis Rozwiązania 5 świadczy o tym, że Autor kontrolował wyniki swojej pracy. Zmienił pierwotną odpowiedź na pytanie „Ile?” z 3 na 4. Można wnosić, że zadawał sobie pytanie: „Czy wyznaczyłem już wszystkie punkty, o które chodzi w zadaniu?”. Wyraźnym przejawem panowania nad całością zadania jest optymalne gromadzenie wyników częściowych potrzebnych do uzyskania końcowej odpowiedzi na zadanie b): po obliczeniu współrzędnych wskazanego punktu od razu obliczał pole trójkąta odpowiadającego temu punktowi (inni przechodzili do obliczania pól trójkątów dopiero po obliczeniu współrzędnych wszystkich wyznaczonych punktów, co wymagało odszukania w tekście rozwiązania — składającego się nieraz z kilku stron — potrzebnych danych).

4.6 Rozwiązanie 6

4.6.1 Kopia fragmentu pracy autora Rozwiązania 6



$$\begin{aligned}
 & \text{pr. AB: } y = \frac{4}{3}x - 3\frac{1}{3} \\
 & \quad \quad \quad -x + 2y + 4 = 0 \\
 & C_1(-1, 1) \quad C_3(1, -1) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} 2 \text{ wierzchołki} \\
 & C_2(x, x-4) \quad |BC_2| = \sqrt{(x-5)^2 + (x-4-1)^2} \quad |BC_3| = \frac{|-1+2(x-4)+4|}{\sqrt{5}} \\
 & \quad \quad \quad |BC_2| = \sqrt{(x-5)^2 + (x-3)^2} \\
 & \text{Pole } \triangle ABC_1 = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC_1| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(4-5)^2 + (-3-1)^2} \cdot \sqrt{(1+1)^2 + (-3-1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{20} = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10 \\
 & \text{Pole } \triangle ABC_3 = \frac{1}{2} \cdot |AC_3| \cdot |BC_3| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4 \\
 & \sqrt{(x-5)^2 + (x-3)^2} = \frac{|x-1|}{\sqrt{5}} \\
 & (x-5)^2 + (x-3)^2 = \frac{(x-1)^2}{5} \\
 & 5(x^2 - 10x + 25 + x^2 - 6x + 9) = x^2 - 2x + 1 \\
 & 10x^2 - 80x + 140 - 6x^2 + 30x + 45 = x^2 - 2x + 1 \\
 & 4x^2 - 50x + 185 = 0 \quad \Delta = 6084 - 4 \cdot 169 \cdot 9 = 6084 - 6084 = 0 \quad \sqrt{\Delta} = 0 \\
 & x = \frac{50}{8} = 6\frac{1}{4} \quad y = x - 4 = 6\frac{1}{4} - 4 = 2\frac{1}{4} \quad C_2(6\frac{1}{4}, 2\frac{1}{4})
 \end{aligned}$$

4.6.2 Opis Rozwiązania 6

Kandydat wskazał na rysunku trzy trójkąty jako spełniające warunki zadania.

[Do pełnej liczby poszukiwanych trójkątów brakuje trójkąta ABC_4 o kącie prostym przy wierzchołku należącym do półprostej $y = x - 4$ dla $x \geq 2$.]

Pod rysunkiem znajduje się zapis równania prostej przechodzącej przez punkty A, B. Współrzędnych punktów C_1 i C_3 rozwiązujący nie obliczał. **Odczytał je z rysunku** — wyrażnie to w pracy zaznaczył.

[Najprawdopodobniej punkt C_3 został wyznaczony konstrukcyjnie, tak jak w Rozwiązaniu 5. Konsekwencją tego sposobu wyznaczenia punktu było odczytanie jego współrzędnych (obserwacje indywidualnej pracy studentów nad rozwiązaniem tego zadania pokazały, że był on stosowany przez wiele osób). Jeśli chodzi o punkt C_1 , to z rysunku wykonanego przez rozwiązującego na kratkowanym papierze i być może przy pomocy ekierki, odczytana została jedna z jego współrzędnych jako prawdopodobna, a druga obliczona z warunku $y = -x$.]

Następnie zdający obliczył pola trójkątów odpowiadających każdemu z punk-

tów C_1, C_3 . Jeśli chodzi o współrzędne punktu C_2 , to wyznaczył je inaczej niż w dotychczas opisanych rozwiązaniach:

Sposób 8. Stosowanie wzoru na odległość punktu od prostej
(w $\triangle ABC_2$ kąt przy wierzchołku B jest prosty):

- obliczenie odległości BC_2 , gdzie $C_2(x, x-4)$, jako długości wektora $\overrightarrow{BC_2}$,
- obliczenie odległości BC_2 jako odległości punktu C_2 od prostej AB ,
- rozwiązanie równania wyrażającego równość odległości z a) i b).

4.6.3 Komentarz

Wiedza

fakty: autor Rozwiązania 6 zna

- wzór na długość odcinka o zadanych współrzędnych jego końców,
- wzór wyrażający równanie prostej przechodzącej przez 2 punkty o zadanych współrzędnych,
- wzór wyrażający odległość punktu od prostej,
- wzór na pole trójkąta prostokątnego;

umiejętność stosowania: autor Rozwiązania 6 umie

- zastosować wymienione wcześniej wzory,
- rozwiązać równanie, które da się sprowadzić do równania kwadratowego.

Heurystyka — autor Rozwiązania 6 stosuje heurystyki, które zostały opisane w poprzednim rozwiązaniu (str. 27). Jeśli chodzi o heurystyki typu „Zbadaj związki” oraz „Skonstruuj”, to zostały one zastosowane do wyznaczenia punktu C_3 . Mimo iż autor rozwiązania dostrzegł fakt należenia punktu A do prostej o równaniu $y = x - 4$, to nie umiał go wykorzystać do wyznaczenia punktu C_4 (tego punktu w ogóle nie wskazał).

Panowanie nad sytuacją. Sprawdzanie wyników — autor Rozwiązania 6 raczej nie kontrolował swoich zapisów, a jeśli to robił, to niedokładnie; w jego pracy widniał zapis

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, x \geq 1 \\ -x, x < 1. \end{cases}$$

Drugi wiersz zapisu po prawej stronie jest oczywiście błędny, zamiast $-x$ powinno być: $-x + 1$.

Rozwiązujący nie zadawał sobie także pytania typu: „Czy nie ma jeszcze innych punktów spełniających warunki zadania poza tymi, które wskazałem?” (wskazał trzy z czterech możliwych punktów).

4.7 Rozwiązanie 7

4.7.1 Kopia fragmentu pracy autora Rozwiązania 7

$$A(1; -3) \quad B(5; -1) \quad C \text{ należy do } y = |x-2| - 2$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{dla } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{dla } x < 2 \end{cases}$$

$$10 \quad C \text{ należy do } y = \begin{cases} x-2-2 & \text{dla } x \geq 2 \\ x-2+2 & \text{dla } x < 2 \end{cases}$$

Szukam równania prostej przechodzącej przez A i B

$$\begin{cases} -3 = a + b \\ -1 = 5a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 - b \\ -1 = 5(-3 - b) + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 - b \\ -1 = -15 - 5b + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -3 - b \\ -14 = -4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 - b \\ b = \frac{14}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 - b \\ b = \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 + \frac{7}{2} = \frac{1}{2} \\ b = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Szukaną prostą ma postać $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$

Aby szukana była prostą, to C musi leżeć na prostej przechodzącej przez pkt A lub pkt B

Skorzystam ze wzoru

$$A(1; -3) \quad y - y_0 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) (x - x_0)$$

$$y + 3 = -2(x - 1)$$

$$y + 3 = -2x + 2$$

$$y = -2x - 1$$

$$\begin{cases} y = -2x - 1 \\ y = x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 1 = x - 4 \\ -3x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$

- odpowiedź z wartości

$$B(5; -1)$$

$$y + 1 = -2(x + 5)$$

$$y = -2x - 10 - 1$$

$$y = -2x - 11$$

4.7.2 Opis Rozwiązania 7

Kandydat **nie wykonał żadnego rysunku**. Punktów spełniających warunki zadania szukał jedynie na prostych prostopadłych do prostej AB i przechodzących odpowiednio przez punkty A, B . Współrzędne tych punktów obliczał, rozwiązując 4 poniższe układy warunków:

$$(1) \quad \begin{cases} \text{równanie prostej } k, (k \perp \text{pr. } AB, A \in k), \\ \text{równanie prostej } y = x - 4, x \geq 2. \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \text{równanie prostej } l, (l \perp \text{pr. } AB, B \in l), \\ \text{równanie prostej } y = -x - 4, x \geq 2. \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \text{równanie prostej } k, \\ \text{równanie prostej } y = -x, x < 2. \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \text{równanie prostej } l, \\ \text{równanie prostej } y = -x, x < 2. \end{cases}$$

Tylko układ (1) został rozwiązany poprawnie. W rozwiązaniach układów (2) i (4) wystąpiły błędy rachunkowe. Rozwiązując układ (3) — poprawnie rachunkowo — zdający otrzymał punkt $(-1, 1)$; odrzucił go, chyba przez nieuwagę, jako niespełniający założeń.

Ostatecznie, w odpowiedzi do części a) zadania, rozwiązujący wskazał tylko jeden punkt, mianowicie punkt $(-11, 11)$, jako spełniający warunki zadania. Pola trójkąta odpowiadającego temu punktowi nie obliczał.

4.7.3 Komentarz

Wiedza

fakty: autor Rozwiązania 7 zna

- postać kierunkową równania prostej,
- wzór wyrażający zależność między współczynnikami kierunkowymi prostych prostopadłych;

umiejętność stosowania: autor Rozwiązania 7 umie

- napisać równanie prostej, gdy dane są współrzędne dwu punktów do niej należących,
- zastosować wyżej wymieniony wzór do napisania prostej prostopadłej do prostej o danym równaniu, przechodzącej przez punkt o zadanych współrzędnych,

- zastosować definicję bezwzględnej wartości liczby do przedstawienia funkcji danej przepisem $y = |x - 2| - 2$ w postaci dwunormowej,
- rozwiązać układ równań liniowych o dwu niewiadomych, przy dodatkowym założeniu nakładanym na jedną z niewiadomych.

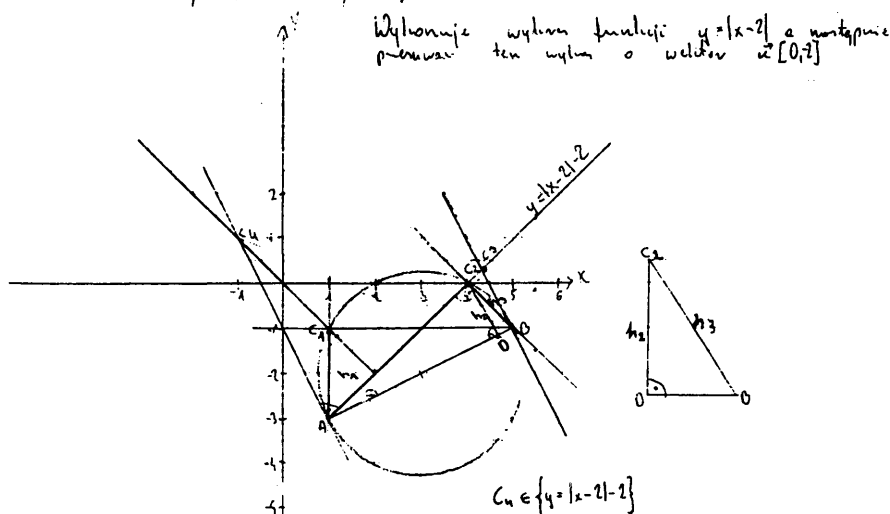
Heurystyka — autor Rozwiązania 7 nie stosuje heurystyki „Przedstaw sytuację na rysunku”.

Panowanie nad sytuacją. Sprawdzanie wyników — autor Rozwiązania 7 nie ma geometrycznego obrazu sytuacji zadaniowej. Nie zadaje sobie pytania, czy trójkąt, jaki wskazał jest rzeczywiście prostokątny i czy nie istnieją jeszcze inne. Popelnia błędy rachunkowe. Nie sprawdza wykonywanych rachunków.

4.8 Rozwiązanie 8 (podejście drugie)

4.8.1 Kopia fragmentu pracy autora Rozwiązania 8

Dane: $A(1, -3)$; $B(5, -1)$; $y = |x - 2| - 2$



a) Trójkątów prostokątnych: $\triangle ABC_n$ jest utwory

$$b) P_{\Delta AC_1B} = P_{\Delta AC_2B}$$

$$P_{\Delta AC_1B} = \frac{1}{2} AB \cdot h_1$$

$$P_{\Delta AC_2B} = \frac{1}{2} AB \cdot h_2 \Rightarrow P_{\Delta AC_1B} > P_{\Delta AC_2B}$$

$$h_1 > h_2$$

Z ΔC_2DB wynika, że $h_2 < h_3$

$$P_{\Delta ABC_1} < P_{\Delta ABC_3}$$

Wniosek: Z utworzonych trójkątów prostokątnych najmniejszy jest trójkąt ABC_2

Z rysunku wynika, że punkt C_2 ma współrzędne (4,0)

4.8.2 Opis Rozwiązania 8

Na rysunku danych zdający wskazał wszystkie cztery poszukiwane punkty. Wyzначył je konstrukcyjnie. Te, które odpowiadają trójkątom o kątach prostych przy wierzchołkach A i B — przez poprowadzenie prostych prostopadłych do prostej A i B i przechodzących odpowiednio przez A i B (być może przy pomocy ekierki). Dwa pozostałe punkty zostały wyznaczone przy pomocy okręgu, tak jak w Rozwiązaniu 5. Po wykonaniu rysunku rozwiązujący przeszedł do porównania pól wskazanych trójkątów.

Z rysunku zapewne odczytał, że trójkąt o kącie prostym przy wierzchołku A zajmuje największą powierzchnię [nie zanotował tego, a więc można przypuszczać, że było to dla niego oczywiste]. Jeśli chodzi o trójkąty ABC_1 oraz ABC_2 , to początkowo uznał, że mają one jednakowe pola; świadczy o tym pierwsza linijka zapisu pod rysunkiem (patrz kopia pracy). Ten zapis został jednak przekreślony. Dla porównania pól wspomnianych dwu trójkątów narysował w każdym z nich wysokości odpowiednio h_1 i h_2 opuszczone na wspólny bok AB . Na podstawie oglądu stwierdził, że $h_1 > h_2$, a stąd wywnioskował, że pole trójkąta AC_1B jest większe od pola trójkąta AC_2B . O tym, że pole trójkąta AC_2B jest mniejsze od pola trójkąta AC_3B , kandydat rozstrzygnął dedukcyjnie. Mianowicie zauważył, że w ΔAC_2B (patrz rysunek w kopii pracy) — wysokość h_2 poprowadzona do odcinka AB jest przyprostokątną ΔC_2DB , natomiast odcinek C_2B , oznaczony jako h_3 , jest przeciwprostokątną tego trójkąta. Stąd, wiedząc, że przeciwprostokątna trójkąta prostokątnego jest większa od każdej jego przyprostokątnej, zapisał: $h_2 < h_3$. Jako wniosek z tego warunku zapisał: pole trójkąta AC_2B jest mniejsze od pola trójkąta AC_3B .

[Taki wniosek byłby uzasadniony, gdyby pole ostatniego wymienionego trójkąta wyrazić jako połowę iloczynu długości odcinków AC_3 i h_3 (odcinek AC_3 jako prze-

ciwprostokątna w trójkącie AC_3B jest dłuższy od odcinka AB , będącego przyprostokątną w tym trójkącie). Czy właśnie tak zdający rozumował — nie wiadomo.]

Ostatecznie, jako wniosek z przeprowadzonego rozumowania kandydat napisał: *Z czterech trójkątów prostokątnych najmniejszy jest trójkąt AC_2B* (oczywiście, chodzi o pola tych trójkątów). Po tym stwierdzeniu rozwiązujący zadanie odczytał z rysunku (wyraźnie to napisał), że punkt C_2 ma współrzędne $(4,0)$ i obliczył (poprawnie) pole odpowiadającego mu trójkąta — jako połowę wartości bezwzględnej wyznacznika pary wektorów $\vec{C_2B}$, $\vec{C_2A}$.

4.8.3 Komentarz

Wiedza

fakty: autor Rozwiązania 8 zna

- twierdzenie: kąt wpisany w okrąg oparty na jego średnicy jest prosty,
- wzór wyrażający pole trójkąta poprzez długość jego podstawy i odpowiadającej jej wysokości,
- wzór wyznacznikowy na pole trójkąta,
- związek: przyprostokątna trójkąta prostokątnego jest krótsza od jego przeciwprostokątnych;

umiejętność stosowania: autor Rozwiązania 8 umie

- zastosować wyżej wymienione wzory, związek oraz twierdzenie (w nietypowej sytuacji).

Heurystyka — autor Rozwiązania 8 stosuje heurystyki „Przedstaw sytuację na rysunku”, „Jeśli możesz, skonstruuj figurę, o jaką chodzi w zadaniu”, „Dla zwrócenia uwagi na jakąś własność figury występującej na rysunku ujmującym całość sytuacji zadaniowej, przedstaw tę figurę na oddzielnym rysunku”.

Panowanie nad sytuacją. Sprawdzanie wyników — autor planuje rozwiązanie zadania i dąży do uzyskania globalnego geometrycznego obrazu sytuacji zadaniowej (rachunek sprowadza do niezbędnego minimum). Są oznaki autokontroli (kandydat poddaje weryfikacji wstępne przypuszczenia stwierdzające równość pól trójkątów, które odpowiadają punktom znajdującym się na okręgu). Nie sprawdza jednak, czy współrzędne odczytanego z rysunku punktu rzeczywiście spełniają warunki zadania.

4.9 Rozwiązanie 9 (podejście trzecie)

4.9.1 Kopia fragmentu pracy autora Rozwiązania 9

Zadanie nr 5

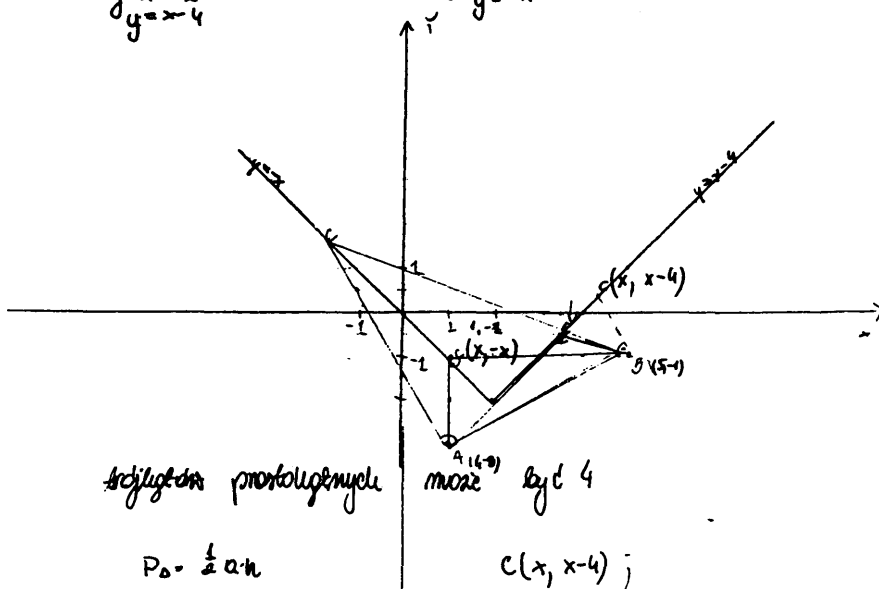
Dane: $A(1, -6)$ $B(5, -1)$ $C(x, y)$

$$y = |x-2| - 2$$

$$1^o \quad x-2 \geq 0 \\ x \geq 2$$

$$y = x-2-2 \\ y = x-4$$

$$2^o \quad x-2 < 0 \\ x < 2 \\ y = -x+2-2 \\ y = -x$$



trójkąt prostokątny

może być 4

$$P_D = \frac{1}{2} a \cdot h$$

$$P_D = \frac{1}{2} |CB| \cdot |CA|$$

$$|CB| = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} \quad |CB| = \sqrt{(5-x)^2 + (-1-x-4)^2} = \sqrt{25 + 0x^2 + x^2 - 6x + 9} = \sqrt{2x^2 - 6x + 34}$$

$$= \sqrt{2x^2 - 6x + 34}$$

$$|CA| = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$$

$$|CA| = \sqrt{(1-x)^2 + (-6-x-4)^2} = \sqrt{1 - 2x + x^2 + x^2 - 2x + 1} = \sqrt{2x^2 - 4x + 2}$$

$$P_D = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2x^2 - 6x + 34} \cdot \sqrt{2x^2 - 4x + 2}$$

aby obt. minimalne pole, obliczam pochodną $f(x)$ - pole

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{2x^3 - 4x^2 + 2x - 15 + 34}{(x^2 - 4x + 2)(x^2 - 16x + 84)} \cdot [(4x - 4)(2x^2 - 16x + 84) + (2x^3 - 4x^2 + 2x - 15 + 34)(4x - 16)]$$

$$f'(x) = \frac{4(2x^3 - 4x^2 + 2x - 15 + 34)(x^2 - 16x + 84) + (2x^3 - 4x^2 + 2x - 15 + 34)'(x^2 - 4x + 2)(x^2 - 16x + 84)}{(x^2 - 4x + 2)^2 (x^2 - 16x + 84)^2}$$

podzielmy licznik przez $x^2 - 4x + 2$ i $x^2 - 16x + 84$

$$8x^3 - 60x^2 + 136x - 84 = 0 : 2$$

$$4x^3 - 30x^2 + 68x - 42 = 0$$

proszę o pomoc w rozwiązaniu tego zadania

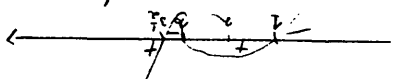
rozwiązanie

1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4
1	2	3	4

$$(x-1)(x^2 - 4x + 2) = 0$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x_1 = 2 + \sqrt{2}, x_2 = 2 - \sqrt{2}$$



dla $x = 1$ i $x = 2 \pm \sqrt{2}$ pole jest minimum

$$f''(x) = \frac{4(2x^3 - 4x^2 + 2x - 15 + 34)(x^2 - 16x + 84) + (2x^3 - 4x^2 + 2x - 15 + 34)'(x^2 - 4x + 2)(x^2 - 16x + 84)}{(x^2 - 4x + 2)^3 (x^2 - 16x + 84)^2}$$

$$f''(x) = \frac{4(2x^3 - 4x^2 + 2x - 15 + 34)(x^2 - 16x + 84) + (2x^3 - 4x^2 + 2x - 15 + 34)'(x^2 - 4x + 2)(x^2 - 16x + 84)}{(x^2 - 4x + 2)^3 (x^2 - 16x + 84)^2}$$

4.9.2 Opis Rozwiązania 9

Na rysunku danych rozwiązujący zaznaczył 4 punkty, o jakie jego zdaniem chodziło w zadaniu. Współrzędnych tych punktów nie obliczał.

[Trójkąt odpowiadający jednemu z tych punktów — na rysunku wyraźnie nie jest prostokątny. Chodzi o ten z dwu punktów należących do półprostej o równaniu $y = x - 4$ dla $x \geq 2$, który znajduje się bliżej punktu A (patrz kopia pracy). Prawdopodobnie jest tak dlatego, że w odróżnieniu od pozostałych punktów szukanych, tego punktu rozwiązujący nie umiałby skonstruować. Umieścił go więc „jakkolwiek” i za pomocą symbolu kąta prostego dał wyraz temu, że odpowiadający mu trójkąt ma być prostokątny. Możliwe jest też inne wyjaśnienie. Najpierw rozwiązujący wskazał tylko 3 trójkąty, odpowiadając na pytanie a) zadania. Rachunek, jaki przeprowadził dla rozwiązania części b) zadania uświadomił mu, że istnieje jeszcze jeden trójkąt — o wyliczonych właśnie współrzędnych. Nie zwrócił jednak uwagi na to, że trójkąt, jaki powstał, nie wydaje się być prostokątny. To drugie wyjaśnienie jest chyba bardziej prawdopodobne.]

Część b) zadania kandydat rozwiązał w następujący sposób. Wyraził pole poszukiwanego trójkąta ABC jako połowę iloczynu przyprostokątnych AC i CB , oznaczając nieznaną odciętą jego wierzchołka przez x , natomiast rzędną przez $x - 4$. **Nie dodał założenia:** $x \geq 2$. [Znaczy to, że zdający założył, iż poszukiwany punkt należy do prostej o równaniu $y = x - 4$.] W wyniku odpowiedniego podstawienia (wykonanego z błędem w znaku) i przeprowadzenia rachunku zapisał równość:

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \sqrt{2x^2 - 4x + 2} \cdot \sqrt{2x^2 - 16x + 34}.$$

Następnie symbol P_{Δ} potraktował jako $f(x)$, po czym zapowiedział: ... *obliczam pochodną $f(x)$ — pola*. Po obliczeniu zapowiedzianej pochodnej funkcji, przyrównał ją do zera. Rozwiązaniami otrzymanego równania trzeciego stopnia okazały się: $x = 1$, $x = 3$ oraz $x = 3\frac{1}{2}$. Po naszkicowaniu wykresu odpowiedniego wielomianu, rozwiązujący stwierdził, że funkcja f przyjmuje minimum lokalne dla dwu wartości: $x = 1$ oraz $x = 3\frac{1}{2}$. Dalej kandydat podstawiał $x = 1$ do przepisu funkcji $y = -x$, natomiast $x = 3\frac{1}{2}$ do przepisu $y = x - 4$. W ten sposób wskazał dwa punkty: $C(1, -1)$, $C(3\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Następnie obliczył pola odpowiadających im trójkątów ABC , podstawiając odpowiednio odcięte tych punktów do przepisu funkcji wyrażającej pole trójkąta prostokątnego ABC (patrz strona 1 kopii pracy). Praca kończy się zapisem: *Dla $x = 3\frac{1}{2}$ i $y = -\frac{1}{2}$ (współrzędnych punktu C) pole trójkąta prostokątnego jest najmniejsze i wynosi $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{31,25}$* . Odpowiedź jest oczywiście błędna. [Należy zwrócić uwagę na to, że wbrew pogładowi autora tego rozwiązania podany przez niego wzór nie wy-

raża pola żadnego trójkąta ABC , gdzie A , B są danymi w zadaniu punktami, a punkt C należy do wykresu funkcji zadanej wzorem: $y = x - 4$.]

4.9.3 Komentarz

Wiedza

fakty: autor Rozwiązania 9 zna

- wzór wyrażający pole trójkąta prostokątnego,
- wzory na pochodną funkcji wielomianowej, funkcji $y = \sqrt{x}$ oraz funkcji złożonej z tych funkcji,
- schemat badania ekstremum funkcji;

umiejętność stosowania: autor Rozwiązania 9 umie

- narysować wykres funkcji, w której przepisie występuje znak bezwzględnej wartości,
- przedstawić przepis danej funkcji w postaci dwunormowej f_1 , f_2 ,
- zastosować wymienione wcześniej wzory,
- rozwiązać równanie wielomianowe,
- zna schemat badania ekstremum funkcji,
- nie umie zastosować przepisu tej funkcji dwunormowej (podstawiając za y np. $f_1(x)$, nie uwzględnia założenia ograniczającego dziedziny f_1).

Heurystyka — autor Rozwiązania 9 stosuje heurystykę „Przedstaw sytuację na rysunku”.

Panowanie nad sytuacją. Sprawdzanie wyników — autor Rozwiązania 9 nie panuje nad całością sytuacji: punkty a) i b) zadania traktuje jakby niezależnie od siebie. Wybiera schemat niestosowny do sytuacji. Raczej nie sprawdza rachunku ani nie konfrontuje wyniku ze sporządzonym przez siebie wcześniej rysunkiem — i to, między innymi, jest przyczyną niedostrzeżenia sprzeczności wyniku rachunku z rysunkiem.

4.10 Reprezentatywność przykładów

Przedstawione rozwiązania reprezentują zarówno poprawne, jak i te, których autorom udało się podać tylko częściowy wynik poprawny, jak wreszcie i te, które są rozwiązaniami błędnymi. Pełne, poprawne rozwiązanie zadania przedstawiło tylko około 10% badanych.

5 Wyniki obserwacji indywidualnych

W grupie osób obserwowanych indywidualnie w czasie pracy nad zadaniem zauważono, co następuje:

1. Wszystkie osoby wykonywały rysunek danych i wskazywały na nim punkty, o które chodzi w zadaniu: na ogół odręcznie, a pięć osób przez wykonanie pewnej konstrukcji. Niektórzy wskazali wszystkie 4 punkty, inni — samodzielnie wskazali tylko 1, 2 albo 3 poszukiwane punkty. Często jako pierwszy wskazywany był punkt C_3 , za pomocą konstrukcji opisanej w Rozwiązaniu 5.
2. Stosowane były różne, z już opisanych, sposoby wyznaczania współrzędnych wskazywanych punktów, ale w mniejszej różnorodności, niż w grupie osób egzaminowanych.
3. Pojawiły się dwa podejścia do zadania: podejście pierwsze wybierane przez większość osób i drugie — przez uczennicę — Beatę. Po wykonaniu rysunku, na którym Beata wskazała hipotetyczne położenie poszukiwanych punktów, stwierdziła, że jeśli chodzi o część b) zadania, to w grę mogą wchodzić tylko dwa trójkąty: ABC_3 i ABC_4 . Wyznaczyła współrzędne punktów C_3 i C_4 , stosując warunek na zerowanie się iloczynu skalarnego wektorów, po czym obliczyła pola trójkątów odpowiadających tym dwu punktom i następnie wskazała (poprawnie) trójkąt prostokątny o najmniejszym polu. Uczennica kilkakrotnie powracała do pytania „Ile?”, ale rachunku nie sprawdzała. Skonstatowała ostatecznie: *Innych trójkątów już chyba nie ma*. Na pytanie obserwatora, czy mogłaby uzasadnić jakoś swój pogląd, Beata odpowiedziała: *Nie wiem, jak to zrobić, ale jakoś czuję, że nie ma już innych trójkątów, które by spełniały warunki zadania*.
4. Spośród innych obserwowanych osób niektórzy sprawdzali poprawność wyników w ten sposób, że konfrontowali je z rysunkiem. Sam rachunek sprawdzany był sporadycznie.

6 Synteza wyników badania

W paragrafie tym zestawione będą trudności, które były przyczyną porażki, jak również pozytywne zabiegi o charakterze heurystycznym i technicznym sprzyjające sukcesowi w rozwiązywaniu analizowanego zadania przez kandydatów na studia matematyczne. Zestawienie to uwzględnia Rozwiązania 1 — 9, jak i fragmenty rozwiązań, które nie były wcześniej analizowane.

6.1 Trudności — przyczyny porażki

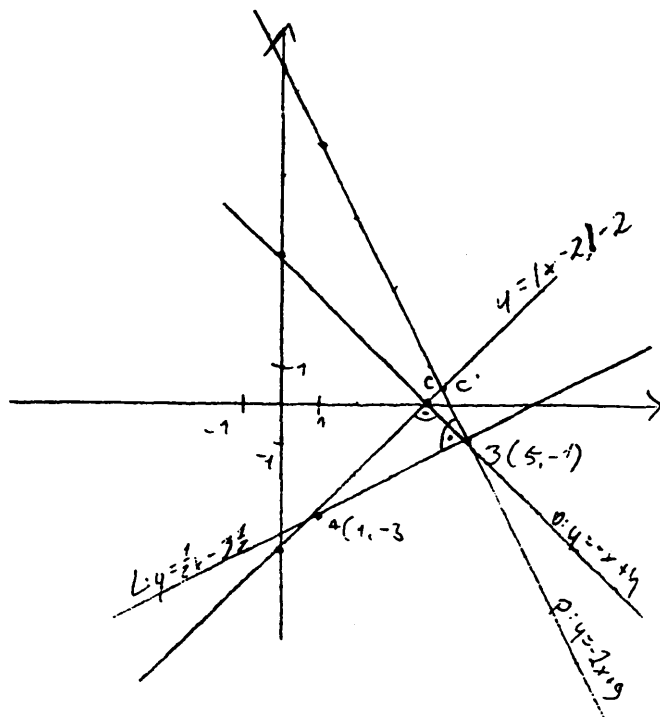
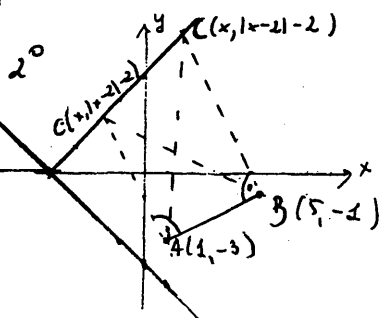
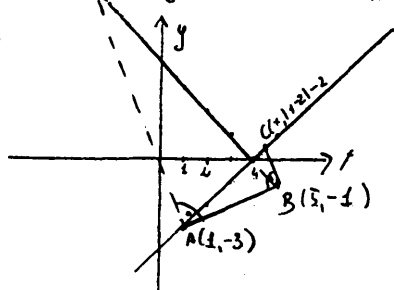
6.1.1 Trudności odnoszące się do wartości bezwzględnej liczby

Jak już wcześniej wspomniano, wielu kandydatów nie umiało poprawnie narysować wykresu funkcji $y = |x - 2| - 2$. Przedstawiali go na przykład tak:

$$1^{\circ} \quad x - 2 \geq 0 \Rightarrow y = x - 2 - 2 \Rightarrow y = x - 4$$

$$2^{\circ} \quad x - 2 < 0 \Rightarrow y = -x - 2 - 2 \Rightarrow y = -x - 4$$

4°



Praca jednego z kandydatów wskazała na trudności w rozwiązywaniu równania, w którym występuje znak bezwzględnej wartości liczby. Równanie

$$|c - 2| = 1 - 2c,$$

gdzie c to odcięta poszukiwanego w zadaniu punktu, autor wspomnianej pracy rozwiązał w następujący sposób:

$$\begin{array}{lcl} |c-2| = 1-2c & & \\ c-2 = 1-2c & \text{lub} & c-2 = -1+2c \\ 3c = 3 & & -c = 1 \\ \underline{c = 1} & & \underline{c = -1} \\ C(1; -1) & \text{lub} & C(-1; 1) \end{array}$$

Równanie rozwiązane zostało błędnie. Dla liczby $c = 1$ bowiem, wyrażenie po lewej stronie tego równania przyjmuje wartość ujemną, równą -1 . Znaczyliby to, że wartość bezwzględna wyrażenia mogłaby być liczbą ujemną. Błąd, jaki tu wystąpił, jest wynikiem zastosowania schematu

$$|f(x)| = k \implies [f(x) = k \text{ lub } f(x) = -k],$$

który funkcjonuje tylko przy założeniu $k > 0$. Z konieczności uwzględnienia tego założenia autor rozwiązania najwidoczniej nie zdawał sobie sprawy.

6.1.2 Trudności dotyczące pojęcia funkcji

Na przykładzie Rozwiązań 3 i 9 (tak było w większej liczbie przypadków) widać, że niektórzy absolwenci dotychczasowej szkoły średniej umieją zastosować definicję bezwzględnej wartości liczby do przepisu funkcji występującej w treści zadania, by zapisać ją w postaci dwunormowej, umieją też sporządzić wykres takiej funkcji, ale **nie umieją stosować przepisu tej funkcji dwunormowej**: nie uwzględniają założeń ograniczających stosowalność każdego z dwu wzorów opisujących taką funkcję.

6.1.3 Trudności w rozumieniu pojęcia ekstremum funkcji oraz zmiennej

Poznany w szkole schemat badania ekstremum funkcji, wykorzystywany przez około 10% rozwiązujących zadanie, nie był dobrany stosownie do sytuacji. Na przykładzie Rozwiązania 9 widać, że litera x , która występowała w wyrażeniu opisującym pole poszukiwanego trójkąta, została potraktowana jako zmienna ciągła. Tymczasem, trójkąt, którego pole autor rozwiązania wyraził w ten sposób, jest tylko jeden (jest to wyrażenie uwidocznione na rysunku, który własnoręcznie rozwiązujący wykonał). Traktowanie prawej strony tego wzoru (zob. 4.9.1) jako funkcji $f(x)$ zmiennej ciągłej zupełnie rozmija się z jego sensem. Zwrot „... dla którego pole trójkąta ... jest najmniejsze”, występujący w treści zadania, był dla autora Rozwiązania 9 (i wielu innych) sygnałem uruchamiającym stosowanie znanego schematu, jak się wydaje — bez głębszego wnikania w to, wartość najmniejszą jakiego zbioru należy wyznaczyć. Postępowanie odpowiadające na ten sygnał jest przykładem stosowania tzw. strategii pierwszego obiecującego sygnału (*strategy of the first promising signal* — Hejny, 1992; patrz przykład w pracy: Ciosek, 1995, s. 47).

Trudność polegająca na traktowaniu niewiadomej jako zmiennej ciągłej, uwidoczniła się także w poniższym (zaskakującym) rozumowaniu:

Rozwiązanie 10. Kandydat wykonał (poprawnie) rysunek danych, ale nie wskazał na nim poszukiwanych punktów. Badał oddzielnie położenie punktu C na półprostej o równaniu $y = x - 4$ dla $x \geq 2$ oraz półprostej o równaniu $y = -x$ dla $x < 2$. Napisał: *Aby trójkąt o współrzędnych $C(x, x - 4)$, $C(x, -x)$ był prostokątny, powinien zostać spełniony któryś z następujących warunków:*

$$\text{a) } |AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$$

lub

$$\text{b) } |AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$

lub

$$\text{c) } |BC|^2 + |AC|^2 = |AB|^2$$

Rozważając przypadek a) obliczył AB (z błędem) oraz wyraził odległości AC , BC za pomocą x . Otrzymał równość:

$$32 + 2(1 - x)^2 = (5 - x)^2 + (3 - x)^2,$$

którą przekształcił do postaci

$$2x^2 - 4x + 34 = 2x^2 - 16x + 34 \quad (**)$$

Stwierdził, że wyrażenie występujące po lewej stronie tej równości jest różne od wyrażenia po prawej stronie. W podobny sposób rozważył pozostałych pięć przypadków, za każdym razem stwierdzając, że warunek konieczny na to, by trójkąt był prostokątny nie jest spełniony. Ostatecznie skonstatował:

z moich obliczeń (z pewnością błędnych) wynika, że nie ma na prostej $y = |x-2|-2$ takiego punktu, kt. w połączeniu z dwoma punktami danych Δ prostokątny.

Przedstawione rozumowanie świadczy o tym, że jego autor zinterpretował zapis (**) w następujący sposób: wielomiany występujące po obu stronach znaku równości mają mieć te same wartości dla każdego x . Tymczasem, chodzi o zbadanie, czy istnieje takie x , dla którego oba wielomiany przyjmują tę samą wartość.

6.1.4 Brak głębszej analizy sytuacji zadaniowej

Wielu kandydatów, którzy w odpowiedzi do części a) zadania podali albo „2 trójkąty” albo „3 trójkąty”, po prostu nie analizowało sytuacji zadaniowej głębiej. Wielokrotnie u obserwowanych studentów miało miejsce takie postępowanie: jeśli po narysowaniu danych rozwiązujący umiał opisać w jakiś sposób położenie któregoś z poszukiwanych punktów, to bezpośrednio po zaznaczeniu tego punktu przechodził do obliczenia jego współrzędnych, nie zatrzymując się dłużej nad zagadnieniem liczby wszystkich poszukiwanych punktów. W ten sposób myśl rozwiązującego zadanie, skierowana początkowo na pytanie „Ile?” (czy „Które?”) została jakby przerwana i zwrócona w innym kierunku, mianowicie na pytanie: „Jak wyznaczyć współrzędne domniemanego punktu?” Ponieważ rachunek wymagał pewnego wysiłku i czasu, pytanie „Ile?” często nie powracało w dalszej części pracy. Można przypuszczać, że w podobny sposób postępowali kandydaci na studia i to było przyczyną podania przez nich niepełnych odpowiedzi na pytanie a).

6.1.5 Brak autokontroli

Częstą przyczyną niepowodzenia w rozwiązywaniu analizowanego zadania przez kandydatów na studia, mimo całkiem rozsądnego, planowego poszuki-

wania przez nich tego rozwiązania, były błędy rachunkowe. Autorzy rozwiązań raczej nie sprawdzali swoich rachunków. W znalezieniu błędu omawianego typu wielu rozwiązującym zadanie mogła pomóc konfrontacja wyników otrzymanych na drodze rachunku z rysunkiem globalnym sytuacji, jaki na ogół wykonywali na wstępie. Takiej konfrontacji w bardzo wielu przypadkach kandydaci nie podejmowali. Autor Rozwiązania 2 co prawda zestawiał rysunek z wynikiem rachunku, ale w tym przypadku kryterium poprawności rysunku był wynik rachunku; rachunek weryfikował rysunek, a nie odwrotnie. Rachunek był błędny i spowodowało to odrzucenie jednego z rozwiązań uwidoczniionych na rysunku. Przyczyna błędu tkwiła w technice zapisu. Dla przypomnienia: na pewnym etapie swojej pracy kandydat rozwiązywał układ równań. Jedno z tych równań zapisał (zob. 4.2.2), a drugie, otrzymane w wyniku wcześniejszego rachunku (znajdowało się w innej części kartki) w pamięci dołączył do pierwszego. W rozwiązywaniu tego układu popełnił błąd rachunkowy. Można powiedzieć, że brak zestawienia w jednym miejscu poszczególnych równań układu pozbawił szansę wykrycia błędu rachunkowego. Po rozwiązaniu zadania trudno jest bowiem szybko zorientować się, w wyniku rozwiązania jakiego układu otrzymało się taką, a nie inną parę liczb.

6.2 Zabiegi heurystyczne i techniczne sprzyjające sukcesowi w rozwiązywaniu zadania 1

6.2.1 Wykonanie rysunku sytuacji zadaniowej

Bardzo ważną rolę w wielu rozwiązaniach odegrało wykonanie rysunku: przedstawienie danych oraz naniesienie w układzie współrzędnych punktów poszukiwanych w zadaniu. Wykonanie takiego rysunku to przejaw stosowania heurystyki, która wcześniej została nazwana „Przedstaw sytuację na rysunku”.

Samemu poszukiwaniu punktów, o jakie chodziło w zadaniu, towarzyszyło zapewne pytanie: Przy którym wierzchołku trójkąta może być umiejscowiony kąt prosty? Niektórzy zadawali sobie dalsze pytanie: Jak taki punkt można wyznaczyć geometrycznie, czyli jak go skonstruować? Osoby, które zadawały sobie to ostatnie pytanie, stosowały heurystykę „Jeśli potrafisz, skonstruuj poszukiwaną figurę”.

W tej grupie znalazły się osoby, które dla skonstruowania poszukiwanego punktu wykorzystały w istotny sposób związki między danymi, a więc stosowały oprócz heurystyki ostatnio wymienionej jeszcze inną, mianowicie „Zbadaj, czy dane zadania pozostają ze sobą w jakimś związku?”

Rysunek danych z naniesionymi punktami, o które chodziło w zadaniu, prezentował globalne ujęcie sytuacji zadaniowej przez rozwiązującego zadanie.

W odpowiedzi na pytanie, jak wykonany przez rozwiązującego rysunek był wykorzystany w dalszej części rozwiązania zadania, można wyróżnić kilka jego funkcji.

- (1) Rysunek jako środek pomagający w dokonaniu lokalnej analizy sytuacji zadaniowej.

Autor Rozwiązania 2 na przykład, zatrzymywał się na poszczególnych fragmentach schematycznie wykonanego rysunku sytuacji i odczytywał, które odcinki są do siebie prostopadłe. Następnie zastanawiał się nad tym, jakim warunkiem opisać tę własność. Podobną rolę pełniły rysunki pomocnicze w Rozwiązaniu 1, a także w rozwiązaniach wielu obserwowanych studentów.

- (2) Rysunek jako wskaźnik sposobu wykonania rachunku.

Taką funkcję pełnił rysunek w przypadku, gdy rozwiązującemu zadanie udało się odpowiedzieć na pytanie, jak skonstruować poszukiwany punkt. Wtedy poszczególne czynności konstrukcji zostały przetłumaczone na język algebry, np.: „narysować okrąg” — „napisać równanie tego okręgu”, „narysować prostą l prostopadłą do prostej k ” — „napisać równanie prostej l ”.

- (3) Rysunek jako środek służący weryfikacji poprawności rachunku.

Taką rolę spełnił rysunek na przykład w Rozwiązaniu 1, którego autorka najpierw obliczyła współrzędne poszukiwanych punktów, a następnie naniosła na rysunek danych otrzymane punkty. Służyło to sprawdzeniu, czy odpowiadające tym punktom trójkąty wydają się być prostokątne (w podobny sposób sprawdzało swoje rozwiązania 11 z obserwowanych indywidualnie studentów).

- (4) Rysunek jako środek do odczytywania związków między figurami geometrycznymi.

- (5) Rysunek jako sposób wyznaczania współrzędnych punktu.

W taki sposób wykorzystał rysunek konstrukcyjny na przykład autor Rozwiązania 8 (wystąpiło to także u innych osób).

Ten empiryczny sposób byłby do zaakceptowania, o ile towarzyszyłoby mu sprawdzenie, czy współrzędne tego punktu spełniają równanie zbioru punktów, do którego on należy.

6.2.2 Ujęcie całościowe sytuacji zadaniowej

Można mówić o dwu wyraźnych przejawach spojrzenia całościowego na sytuację zadaniową.

Pierwszy z nich to starania rozwiązującego zadanie, by odpowiedzieć wyczerpująco na pytanie, gdzie mogą być umiejscowione wierzchołki kątów prostych rozważanych trójkątów. Te starania uwidaczniały się na rysunkach bądź w zapisach uwzględniających możliwe położenia wierzchołka kąta prostego.

Drugi przejaw całościowego ujęcia zadania to traktowanie części b) zadania jako nierozzerwalnie związanej z częścią a) i niejako równoczesne myślenie o obu tych częściach. Najwyraźniej można było to zaobserwować w Rozwiązaniu 5 (zob. 4.5). Jego autor po wyznaczeniu współrzędnych jednego z punktów od razu obliczał pole trójkąta prostokątnego odpowiadającego temu punktowi i wyróżniał podkreśleniem otrzymaną liczbę. Tak postępował w odniesieniu do każdego z rozważanych punktów. Taka kolejność rachunku pozwoliła na szybkie odszukanie w tekście rozwiązania informacji potrzebnych do uzyskania odpowiedzi.

6.3 Elementy rozumowania matematycznego uwidocznione w rozwiązaniach

W analizowanych rozwiązaniach przeplatały się: rozumowanie dedukcyjne, rozumowanie intuicyjne oraz wnioskowanie empiryczne.

Elementy rozumowania dedukcyjnego zostały uwidocznione, między innymi, w:

- rozróżnianiu przypadków: wierzchołek kąta prostego może znajdować się albo w punkcie A , albo w punkcie B , albo w punkcie należącym do wykresu danej funkcji,
- zapisaniu i rozwiązaniu układu warunków, jaki spełniać mają współrzędne punktów,
- uzasadnieniu, że jeden z trójkątów ma pole większe od drugiego (zob. 4.8.2).

Można uznać, że rozumowanie intuicyjne wystąpiło w rozwiązaniach tych osób, które nie obliczały współrzędnych wskazanych na rysunku punktów, a stwierdzały, że istnieją dokładnie 4 punkty, o które chodzi w zadaniu. Nie uzasadniały swojej odpowiedzi drogą rozumowania dedukcyjnego, że podany przez nich sposób wyznaczenia punktów prowadzi do uzyskania 4 punktów, i że nie ma ich więcej.

Jeśli chodzi o empirię, to wystąpiła ona w rozumowaniu tych osób, które:

- odczytywały współrzędne punktu z rysunku,
- stwierdzały tylko na podstawie rysunku, który ze wskazanych trójkątów ma pole większe od innych, np. Rozwiązanie 8 (zob. 4.8.2) bądź rozumowanie uczennicy — Beaty (zob. 5).

Poprzestanie w badaniu matematycznym na stwierdzeniu jakiegoś faktu tylko na drodze empirycznej świadczy o stosunkowo niskim poziomie rozumienia metody matematycznej. Egzamin wstępny na kierunek matematyka do Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Krakowie w roku 1999 zdaje się wskazywać, że taki jest on u większości maturzystów.

7 Uwagi końcowe

Przedstawiona w tym artykule analiza ujawniła różnorodność dróg, na jakich kandydaci na studia matematyczne poszukiwali rozwiązania prostego zadania geometrycznego, jak również i trudności, na które rozwiązujący napotykali. Skłania to do pewnych refleksji na temat oceny zadań egzaminacyjnych. Obserwuje się tendencje, by do zadań egzaminacyjnych dołączać precyzyjne kryteria oceny aż do przyznawania punktów za poszczególne elementy rozwiązania włącznie. Wyniki analizy tu przedstawionej skłaniają do krytycznej oceny tych tendencji. Jeśli chcemy, by uczniowie autentycznie rozwiązywali zadanie, a nie tylko stosowali wyuczone schematy postępowania, to musimy się liczyć z potencjalną różnorodnością dróg rozwiązywania i w konsekwencji sposobów rozwiązania zadania. Niektóre z tych sposobów mogą w ogóle nie przystawać do zaproponowanej punktacji. Ocena powinna brać pod uwagę nie tyle poszczególne elementy rozwiązania, co to, czy rozwiązujący ma całościowy pogląd na sytuację zadaniową, czy w jego rozumowaniu nie ma sprzeczności.

Ponadto, jeśli egzaminowany rozwiązuje zadanie niezależnie, to może wejść na drogę trudną, może się zdarzyć, że nie zdąży zadania rozwiązać w przewidzianym czasie, może popełnić błąd. Należałoby więc oceniać niezależność podejścia do zadania, próbę samodzielnego uporania się ucznia z zadaniem. System oceniania powinien ulec zmianie. Na potrzebę zmiany stosowanych narzędzi oceny zwracał uwagę S. Turnau już w latach osiemdziesiątych (Turnau, 1986). Ten postulat jednakże ciągle nie jest uwzględniany.

Literatura

- Ciosek, M.: 1995, O roli przykładów w badaniu matematycznym, *Dydaktyka Matematyki* **17**, 5-85.
- Ciosek, M.: 1998, W poszukiwaniu rozwiązania zadania, *NiM* **25**, 7-10.
- Hejný, M.: 1992, Analysis of student's solution of the equations $x^2 = a^2$ and $x^2 - a^2 = 0$, *Acta Didactica Universitatis Comenianae*, Comenius University.
- Hejný, M.: 1997, Rozwój wiedzy matematycznej, *Dydaktyka Matematyki* **19**, 15-28.
- Krygowska, Z.: 1977a, *Zarys dydaktyki matematyki, cz.1*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.
- Krygowska, Z.: 1977b, *Zarys dydaktyki matematyki, cz.3*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa.
- Schoenfeld, A. H.: 1985, *Mathematical problem solving*, Academic Press, INC.
- Schoenfeld, A. H.: 1987, What's all the fuss about metacognition?, w: *Schoenfeld, A. H., Cognitive science and mathematics education*, Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 189-215.
- Turnau, S.: 1986, Dlaczego szkolne lekcje matematyki nie uczą matematyki?, *Dydaktyka Matematyki* **6**, 161-174.

Nine ways of solving a geometrical problem — a heuristic study

S u m m a r y

The article presents an analysis of the process of solving a geometrical problem. The problem to solve was:

Two points: $A(1, -3)$ and $B(5, -1)$ are given.

- a) How many right-angled triangles ABC , where C belongs to the graph of function $f(x) = |x - 2| - 2$, do exist?
- b) Calculate coordinates of one of possible points C from a), for which the area of the corresponding triangle ABC is minimal. Calculate this area.

Sources of the study are written entrance exam papers of candidates to the mathematics university department.

Schoenfeld's three categories — resources, heuristic, control — and also Hejný's theory of the development of mathematical knowledge are used in the analysis. Reasons of success and failure in solving the problem have been distinguished.