OFIA KRYGOWSKA (Kraków)

Główne problemy i kierunki badań współczesnej dydaktyki matematyki

Przedstawiony tu szkic aktualnej sytuacji w dydaktyce matematyki nie pretenduje ani do szczegółowej, ani do wyczerpującej analizy tego tematu. Pełna prezentacja tego, co się dziś w dydaktyce matematyki na świecie dzieje, wymagałaby obszernego opracowania monograficznego, przekraczającego możliwości autorki wobec tego, że jest jej dostępna tylko część materiałów publikowanych zagranicą, wobec ogromnego zróżnicowania tych publikacji z punktu widzenia ich wartości, wobec skomplikowanej bardzo sieci różnych nurtów działalności dydaktyków matematyki na świecie. Sądzę jednak, że nawet taka, zawierająca wiele luk, wstępna i tylko szkicowa charakterystyka problematyki i kierunków rozwoju badań w tej dziedzinie, zilustrowana niewielu wybranymi przykładami, ze zwróceniem szczególnej uwagi na ważniejsze zagadnienia otwarte, może być już dziś pożyteczna. Dlatego z całą świadomością dużych niedostatków i powierzchowności tego artykułu przedstawiam go jako wstęp do całej serii DYDAKTYKA MATEMATYKI.

1. DYDAKTYKA MATEMATYKI JAKO AUTONOMICZNA I INTERDYSCYPLINARNA DZIEDZINA BADAŃ

W roku 1929 S.Neapolitański następującą definicją rozpoczął przedmowę do pierwszego wydania swej książki "Zarys dydaktyki matematyki": "Przez dydaktykę matematyki rozumiem naukę, która poucza, jak stosować zasady i wnioski dydaktyki ogólnej do nauczania matematyki, uwzględniając treść materialną tej nauki, jej metody badania oraz cel jej nauczania w szkole" /Neapolitański, 1958, str. 5/.

Typową pracą z zakresu tak rozumianej dydaktyki matematyki jest książka F.Urbańczyka "Zasady nauczania matematyki", zaopatrzona celowo przez autora podtytułem: "Stosowanie zasad nauczania w procesie nauczania matematyki" /Urbańczyk, 1960/. Te zasady - według autora książki traktowanej jako istotny fragment dydaktyki matematyki - to "Ogólne normy, wskazujące, jak należy postępować w procesie nauczania w celu uzyskania dobrych wyników" ... "ich uzasadnieniem stało się doświadczenie pedagogiczne potwierdzające ich słuszność" ... "są to niewątpliwie zasady szczególnie ważne dla nauczania" - pisze autor - "W stosunkowo nielicznych wskazaniach, łatwych do ogarnięcia pamięcią, obejmują one całość procesu nauczania. Nauczyciel, który je rozumie i systematycznie, a przy tym umiejętnie stosuje, jest z reguły dobrym, jeżeli nie przodującym nauczycielem" /Urbańczyk, 1960, str. 8,9/.

W tym ujęciu zatem, w istocie rzeczy, "całość procesu nauczania" jest określona przez pięć zasad ogólnodydaktycznych. Dydaktyka matematyki ma więc za zadanie przede wszystkim poszukiwanie sposobów realizacji tych zasad w praktyce nauczania matematyki. Ten pogląd jest już dziś nie do utrzymania, z różnych powodów. Ustala on jednostronną zależność jednej dziedziny /zwanej szczegółową/ od drugiej /zwanej ogólną/. F.Urbańczyk twierdzi, że "słuszność" ogólnych zasad nauczania znajduje swe uzasadnienie w doświadczeniu pedagogicznym. Ale doświadczenie pedagogiczne w zakresie nauczania - to doświadczenie ściśle związane z nauczaniem konkretnych treści: matematycznych, fizycznych, geograficznych, historycznych itp. Gdyby dydaktyka ogólna nie miała być oparta między innymi na stałym uogólnianiu rezultatów badań dydaktyk szczegółowych, na stałej konfrontacji z ich postępami, to - jak to wyraża znane powiedzenie niemieckie - stałaby się "tkaniem bez wełny" /S t r i c k e n o h n e W o l l e/. Między rozwojem dydaktyki ogólnej a rozwojem dydaktyk szczegółowych zachodzi bardzo mocne i skomplikowane sprzężenie zwrotne. Te dydaktyki stanowią z jednej strony dziedziny badań teoretycznych i empirycznych, które mogą prowadzić do uogólnień pozbawionych już konkretnych, specyficznych treści wyznaczonych przez przedmioty nauczania, do ogólnych norm, zasad, ogólnych modeli nauczania, z drugiej strony są terenem weryfikacji teorii ogólnodydaktycznych, mogą je podważać lub modyfikować.

Użyłam tu liczby mnogiej, istnieją bowiem "teorie dydaktyczne" różne, czasem nawet rozbieżne w swych tezach. Dotyczy to także teorii psychologicznych uczenia się. Dydaktyk matematyki nie może ograniczyć się jedynie do bezkrytycznego stosowania jednej tylko z takich teorii, każda bowiem z nich osobno oświetla proces uczenia się i nauczania konkretnej dyscypliny jedynie z pewnej strony i w pewien szczególny sposób, co bardzo wyraźnie ujawnia na przykład próba eklektycznego wykorzystania niektórych z tych teorii dla sformułowania "zasad nauczania matematyki" w jednym z nowszych podręczników dydaktyki matematyki /Wittmann, 1975/.

S.Neapolitański wiąże mocno i jednostronnie dyscyplinę, którą nazywa dydaktyką matematyki, z dydaktyką ogólną; dydaktyk niemiecki Friedrich Drenckhahn natomiast tej samej nazwy używa na określenie dziedziny badań związanych ściśle z matematyką. W jednym ze swych "ideologicznych" artykułów z roku 1952 określa on dydaktykę matematyki jako dyscyplinę zajmującą się opracowywaniem matematycznych treści w postaci dostosowanej do poziomu nauczania w celu ich przekazu. Od matematyki-nauki różni się - według F.Drenckhahna - dydaktyka matematyki nie tyle przedmiotową treścią, ile sposobem przedstawienia tej treści. Naukowa systematyzacja bowiem - to ostatni etap procesu tworzenia, ginie w nim to, co można określić jako docieranie do wiedzy, ginie, jak mówił Kronecker krytykując z tego powodu, z tego punktu widzenia "disquisitiones" Gaussa wszelki ślad drogi myśli prowadzącej do poznania.

Zadaniem dydaktyki matematyki jest tę drogę dla celów nauczania odtwarzać, i to na różnych poziomach /według Drenckhahna są takie trzy poziomy: indukcyjno-empiryczny, intuicyjny, formalny/, dla których dydaktyka matematyki konstruuje kolejne "matematyki", uwzględniając nie formalno-logiczne, ale przedmiotowo-logiczne aspekty nauki. Zadaniem dydaktyka matematyki jest - według Drenckhahna - przede wszystkim odkrywanie dla rozważanego fragmentu wiedzy /dla twierdzenia, grupy twierdzeń, większych związków, systemu/ przewodnich wyobrażeń i przedstawień, pojęć, sądów, wniosków, metod, które "wynikają z natury rzeczy z logiczną koniecznością" - a więc z natury samej matematyki. Przez naukową m e t o d y k ę d y d a k t y k i m a t e m a t y k i autor rozumie metodologię konstruowania takich "matematyk" różnych poziomów. Natomiast problemami realizacji tych konstrukcji teoretycznych w procesie nauczania zajmuje się m e t o d y k a n a u c z a n i a m a t e m a t y k i. Przedmiotem metodyki nauczania matematyki jest proces nauczania, a nie treść matematyczna i jej struktura opracowana przez dydaktykę matematyki. Metodyka nauczania jest zorientowana psychologicznie i ukierunkowana przez pedagogikę. Jednak - sądzi Drenckhahn - w żadnym przypadku myślenie metodyczne nie powinno przyznawać takiego miejsca psychologii, aby wpływała ona na istotne zmiany w strukturze materiału i zastępowała struktury wypracowane przez dydaktykę matematyki /od ich źródeł do systematyzacji/ przez metodyczno-pedagogiczne konstrukcje. Jeżeli tak się dzieje, to szybko się ujawniają w takich koncepcjach matematyczne błędy /Drenckhahn, 1978/.

Podobnie jak książka F.Urbańczyka jest paradygmatycznym przykładem wiernego stosowania definicji dydaktyki matematyki S.Neapolitańskiego, tak za paradygmatyczny przykład realizacji koncepcji F.Drenckhahna można uznać trzon działalności Belgijskiego Ośrodka Pedagogiki Matematyki /Centre Belge de la Pédagogie de la Mathématique/ stworzonego i kierowanego przez profesora Uniwersytetu w Brukseli,George'a Papy i jego żonę Fréderique Papy, oraz zorganizowaną przez nich międzynarodową grupę badań Girp /Groupe international de la recherche en pédagogie de la mathématique/. Główny nurt tej działalności - to właśnie konstruowanie strukturalnej matematyki elementarnej "jednolitej od przedszkola do uniwersytetu" i ściśle związanej w koncepcji i ideologii z naukowym kierunkiem "bourbakizmu". Oczywiście, jak każda definicja, tak i definicja F.Drenckhahna może być traktowana czysto konwencjonalnie i syntetycznie. Nie jest ona jednak - podobnie jak definicja Neapolitańskiego - adekwatna do rzeczywistego, współczesnego stanu rzeczy, określonego przez rozmaitość rozpraw przedstawianych jako rozprawy z zakresu dydaktyki matematyki, badań prowadzonych przez ośrodki zajmujące się - z ich nazwy - rozwojem dydaktyki matematyki, monografii podsumowujących już w pewnej mierze dotychczasowy dorobek różnych takich ośrodków na świecie.

Pewną syntezę cytowanych poprzednio definicji dydaktyki matematyki i metodyki jej nauczania stanowi określenie sformułowane przez niemieckiego matematyka i dydaktyka H.Griesela /Griesel, 1971/, powtórzone z pewnymi zmianami w znanym podręczniku E.Wittmanna /Wittmann, 1975/ i przyjęte też przez kanadyjskiego dydaktyka matematyki D.Lunkenbeina /Lunkenbein, 1978/: "Dydaktyka matematyki jest nauką zajmującą się opracowywaniem nadających się do realizacji w praktyce kursów matematyki, ich zastosowaniem w praktyce, oraz ich weryfikacją empiryczną z uwzględnieniem analizy ich celów i doboru ich treści".

Wittmann komentuje bliżej tę definicję w sposób następujący:

/a/ Dydaktyka matematyki jest dziedziną w s k a z a ń i k o n s t r u k c j i, to znaczy formułuje twierdzenia odnoszące się do tego, jakie treści i metody, ze względu na określone celami nauczania kwalifikacje, są najbardziej efektywne i opracowuje programy obudowane materiałami dla ucznia i nauczyciela, środkami dydaktycznymi itp.

/b/ Dydaktyka matematyki ma charakter i n t e g r u j ą c y - to znaczy jej zadaniem jest ujęcie w spójny system rozmaitych aspektów działalności nauczyciela: aspekt rzeczowy /proces nauczania odnosi się do treści nauczania, których merytoryczna struktura jest określona przez matematykę/, aspekt pedagogiczny łącznie ze społecznym /proces nauczania realizuje ogólne cele nauczania poprzez nauczanie konkretnych treści/, aspekt psychologiczny łącznie z socjologicznym /proces nauczania musi uwzględniać dyspozycje uczącego się/, aspekt konstruktywny /planowanie i praktyka nauczania wymagają dojrzałych zawodowo decyzji, w których interweniują matematyczne, pedagogiczne i psychologiczne czynniki/.

Wittmann stwierdza dalej: "Oczywiście dydaktyka matematyki opiera się na rezultatach i metodach matematyki, pedagogiki i psychologii. Ale funkcjonuje ona w stosunku do tych dziedzin nie jako prosty odbiorca. We wszystkich trzech dziedzinach istnieją obszary wymagające specyficznego opracowania i integracyjnego wkładu dydaktyki matematyki, aby umożliwić postępy w nauczaniu matematyki i projektować efektywne kursy dla matematycznego kształcenia. Są to obszary następujące: psychologia matematycznego myślenia i uczenia się, matematyka szkolna i matematyka elementarna z wyższego stanowiska, matematyczna heurystyka, historia i teoria poznania matematyki, ogólne cele a nauczanie matematyki, planowanie nauczania" /Wittmann, 1975, str. 2,3/.

Jak z tego bardzo tylko szkicowego scharakteryzowania koncepcji Wittmanna wynika, interpretuje on zadania, problemy i metody dydaktyki matematyki szeroko i podkreślając integracyjny charakter tej dziedziny badań, uwypukla tym samym jej interdyscyplinarność. Ta interpretacja rozszerza przyjętą na wstępie definicję Griesela. Wskazuje bowiem na konieczność prowadzenia badań podstawowych, niekoniecznie od razu ukierunkowanych na cele bezpośrednio praktyczne. Chodzi o to, na przykład, że nasza wiedza o specyfice procesu uczenia się matematyki na różnych poziomach jest ciągle jeszcze znikoma, być może właśnie dlatego, że w tak zwanej tradycyjnej metodyce nauczania matematyki nastawialiśmy się z góry na szybkie uogólnienia i recepty dydaktycznego postępowania bez ich ugruntowania w badaniach podstawowych.

Pilnego rozwijania takich badań domagaliśmy się już w roku 1964, w toku ogólnopolskiej konferencji zorganizowanej przez ówczesną katedrę metodyki nauczania matematyki w Krakowie, poświęconej problemom dydaktyki matematyki jako nauki i przedmiotu studiów przyszłego nauczyciela. Nasze główne tezy musiały odpowiadać ogólnym tendencjom w różnych krajach, skoro wstępny referat /Krygowska, 1965/ został upowszechniony przez międzynarodowe wydawnictwo UNESCO w językach francuskim i angielskim /Krygowska, 1966/ oraz następnie opublikowany w innych jeszcze wydawnictwach w językach francuskim /Krygowska, 1968/, niemieckim /Krygowska, 1978/ i rumuńskim /Krygowska, 1971/; tę samą koncepcję z pewnymi uzupełnieniami przedstawiono na konferencji dydaktyków matematyki w roku 1971 w Bayreuth /Krygowska, 1972/.

Lapidarnie tę koncepcję dydaktyki matematyki ujmuje też raport z roku 1970, przygotowany przez grupę matematyków i dydaktyków matematyki amerykańskich: "Dydaktyka matematyki w sensie stosowanym w tym raporcie może być zdefiniowana jako dziedzina tych naukowych prac i badań, które służą poznaniu wszelkich procesów mających związek z uczeniem się matematyki, nauczaniem matematyki i matematyczną twórczością" /Long, 1970, str. 449/.

Podobną definicję podaje dydaktyk niemiecki H.G.Bigalke. Według niego dydaktyka matematyki jest nauką o uczeniu się i nauczaniu matematyki /Bigalke, 1974/. Bigalke uzupełnia tę definicję uwagami wyraźnie przeciwstawiającymi się określeniom Neapolitańskiego i Drenckhahna: "Dydaktyka matematyki nie jest ani metamatematyczną teorią, ani dziedziną zastosowań nauk pedagogicznych, psychologicznych i socjologii" ... "Dydaktyka matematyki... jest autonomiczną, interdyscyplinarną nauką" ... "Jej autonomia wyraża się w tym, że rozwija ona typowe dla niej metody, integrując przy tym metody różnych nauk. Udział w tym metod matematycznych i metamatematycznych i konieczne, przynajmniej lokalne, systematyczne konstruowanie matematyki różni dydaktykę matematyki od innych szczegółowych dydaktyk" /Bigalke, 1974, str. 114/.

W raporcie amerykańskim wyraźnie podkreśla się, że podstawowe badania, dotyczące twórczości matematycznej mogą i powinny być prowadzone także w ramach dydaktyki matematyki. Wittmann mówi w tym samym sensie o badaniach z zakresu heurystyki w matematycznym myśleniu. Realizacja tych postulatów wymaga przekraczania granic samej pedagogiki, głębszego wdzierania się w nauki psychologiczne, filozofię matematyki, jej metodologię, jej heurystykę. Takie badania - także w grupach interdyscyplinarnych - muszą podejmować dydaktycy matematyki jako specjaliści.

Na przykład, ogólna zasada organizowania procesu uczenia się z aktywnym udziałem ucznia w tym procesie pozostanie pustym hasłem lub będzie zupełnie wadliwie realizowana, jeżeli nie będziemy świadomi tego, na czym aktywność ucznia ma w procesie uczenia się konkretnego przedmiotu polegać. O jakiej aktywności ucznia myślimy, gdy rozważamy problemy nauczania matematyki na różnych poziomach ? Czy aktywny w tym jest uczeń, który pilnie wyucza się przekazanych mu wzorów, twierdzeń, definicji, dowodów, schematów rozwiązywania typowych zadań ? To oczywiście jest także w pewnej mierze potrzebne. Ale współczesna dydaktyka eksponuje inny rodzaj aktywności, aktywność twórczą, czynny i świadomy udział uczącego się w odkrywaniu pojęć, wzorów, twierdzeń, dowodów, w schematyzowaniu sytuacji, w ich matematyzowaniu, ogólnie w rozwiązywaniu problemów bardzo zróżnicowanych, obejmujących całość materiału nauczania. Chodzi zatem o aktywność typowo matematyczną. Trzeba więc dobrze rozumieć, co się pod tym terminem kryje.

Dydaktyka matematyki musi kierować swe badania - między innymi - na zdobycie jak najszerszej i jak najgłębiej ugruntowanej, rzetelnej, nadającej się do wykorzystania na różnych poziomach nauczania, wiedzy o istotnych nurtach matematycznej aktywności, matematycznej twórczości, matematycznej heurezy. Do tych problemów jeszcze powrócę. Tu chcę tylko podkreślić, jak bardzo szeroka dziedzina zagadnień specyficznych, trudnych metodologicznie, otwiera się przed dydaktykami matematyki, gdy zaczynają szukać racjonalnych, teoretycznych podstaw dla stosowania najbardziej nawet oczywistych zasad ogólnych, jak szybko musimy przekraczać w tych badaniach granice dzielące tradycyjną metodykę nauczania matematyki od psychologii, historii matematyki, jej metodologii, jej filozofii itp.

Na pytanie, czym jest dydaktyka matematyki, odpowiadamy więc następującą charakterystyką:

D y d a k t y k a m a t e m a t y k i j e s t n a u k ą, k t ó r e j p r o b l e m a t y k a o b e j m u j e w s z e l k i e z a g a d n i e n i a z w i ą z a n e z u c z e n i e m s i ę i n a u c z a n i e m m a t e m a t y k i. Rozwija się ona dziś jako nauka autonomiczna, choć badania prowadzone w tej dziedzinie mają w dużej mierze charakter interdyscyplinarny. Jakkolwiek bowiem specyfika problemów uczenia się i nauczania matematyki nie pozwala na całkowite ich włączenie do żadnej z innych rozwiniętych już dyscyplin, to te problemy pojawiają się i są rozważane najczęściej na granicach tak różnych przedmiotowo i metodologicznie nauk, jak matematyka, jej metodologia i historia, psychologia, dydaktyka ogólna i teoria wychowania, socjologia, prakseologia, informatyka, cybernetyka, lingwistyka. Rozwiązywanie takich zagadnień granicznych wymaga integrowania różnych metod badawczych od analiz teoretycznych począwszy do metod empirycznych rozmaitych typów. Rozwój matematyki, rozszerzanie się jej zastosowań, istotne wyniki badań nad jej podstawami uzyskane w ostatnich dziesiątkach lat, rozwój techniki, informatyki i komputeryzacja działalności człowieka, rozwój społeczeństwa i demokratyzacja wykształcenia ogólnego powodują konieczność podejmowania badań podstawowych, dotyczących celów matematycznego powszechnego kształcenia, pojęcia matematyki elementarnej jako przedmiotu nauczania na poziomie szkolnym, treści i struktury tego przedmiotu, procesu uczenia się matematyki i procesu nauczania matematyki.

Dydaktyka matematyki jako nauka znajduje się w początkach swego rozwoju i dorabia się powoli i stopniowo własnej metodologii i własnego języka. Mimo bardzo wielu publikacji, prezentujących rezultaty badań teoretycznych i empirycznych w tej dziedzinie, dalecy jeszcze jesteśmy od naukowo ugruntowanych uogólnień, od szerszych i głębszych teoretycznych ujęć, nie przekroczyliśmy bowiem jeszcze fazy tylko lokalnego systematyzowania i strukturowania wiedzy o procesach uczenia się matematyki i jej nauczania. Dydaktyka matematyki - to dyscyplina *in statu nascendi* i to powinni uznać *sine ira et studio* zarówno ci, którzy jej status naukowy jeszcze negują, jak i ci, którzy niesłusznie chcą widzieć w niej już rozwiniętą w pełni naukę.

Świadomość pionierskiego charakteru badań z dydaktyki matematyki jest potrzebna samym dydaktykom matematyki, chroni ich przed przedwczesnym absolutyzowaniem tez, nie opartych na solidnych podstawach teoretycznych i empirycznych i uwalnia od uwarunkowania przez dogmaty metodologiczne innych nauk. Integracja metod wymaga bowiem nie tylko ich wyboru, ale i przekształcania, dostosowywania do całości procesu badawczego; konieczne jest też poszukiwanie własnych nowych dróg prowadzących do rozwiązywania skomplikowanych problemów teorii i praktyki uczenia się i nauczania matematyki.

Charakterystyczną cechą wszelkich inicjatyw w zakresie dydaktyki matematyki oraz oceny rezultatów badań i ich interpretacji jest świadomość, że rozwiązania dydaktycznych problemów mogą mieć znaczenie tylko w pewnym okresie, że wszelkie koncepcje dydaktyczne muszą być stale konfrontowane z rozwojem nauki, techniki i społeczeństwa i w miarę potrzeby modernizowane mniej lub więcej gruntownie. W badaniach nad procesem uczenia się i nauczania matematyki nie można też pomijać faktu, że nigdy nie mamy tu do czynienia z ahistorycznym, modelowym typem ucznia i nauczyciela, ale że są to zawsze ludzie uwarunkowani czasem, w którym żyją, ustrojem społecznym, poziomem technologicznym społeczeństwa itp., przy czym szkoła tylko w pewnej mierze bierze udział w kształtowaniu ich postaw intelektualnych. Dydaktyka matematyki jest dziś szczególnie wyczulona na konieczność uwzględniania tej zmienności i tych uwarunkowań.

Rozwój w drugiej połowie XX wieku zawdzięcza dydaktyka matematyki - między innymi - ścisłej współpracy międzynarodowej pracowników nauki i nauczycieli. Prawie w każdym kraju zorganizowano w tym okresie ośrodki badań nad nauczaniem matematyki bądź przy szkołach wyższych, bądź jako samodzielne instytuty.

Zwrot ku podstawowym badaniom w tej dziedzinie wiąże się z problematyką światowego ruchu modernizacji szkolnej matematyki. Stymulują je aktywne w tym nurcie UNESCO, Międzynarodowa Komisja do Studiowania i Ulepszania Nauczania Matematyki, organizująca co roku w różnych krajach konferencje poświęcone wybranym problemom dydaktyki matematyki, oraz funkcjonująca od roku 1908 Międzynarodowa Komisja do Spraw Nauczania Matematyki, która od roku 1952 jest sekcją Międzynarodowej Unii Matematycznej i która co cztery lata organizuje światowe kongresy nauczania matematyki z udziałem twórczych matematyków, dydaktyków matematyki, psychologów, pedagogów, informatyków i licznych praktyków - nauczycieli matematyki.

W ramach organizowanego co cztery lata przez Międzynarodową Unię Matematyczną Międzynarodowego Kongresu Matematyków, jedna z sekcji jest poświęcona problemom nauczania i historii matematyki. Prócz tego, w związku z tym kongresem Międzynarodowa Komisja do Spraw Nauczania Matematyki przy Unii organizuje swoją trzydniową sesję. Podobnych konferencji o mniejszym zasięgu odbywa się co roku bardzo wiele. Liczne staże międzynarodowe, wymiana pracowników, tłumaczenia publikacji, czasopisma o charakterze międzynarodowym decydują o tym, że dydaktyka matematyki rozwija się jako dyscyplina międzynarodowa z wykorzystaniem badań naukowych i praktycznych doświadczeń nauczycieli matematyki na całym świecie. To wszystko świadczy o istnieniu wielu pilnych problemów związanych z nauczaniem matematyki, wymagających badań kompleksowych; świadczy także o uniwersalności tych problemów, pojawiających się wszędzie, niezależnie od ustrojów szkolnych oraz od stosunków społecznych i politycznych.

2. PROBLEMATYKA CELÓW NAUCZANIA MATEMATYKI

Problemy związane z precyzowaniem celów nauczania matematyki są w ramach dydaktyki matematyki rozważane w trzech aspektach: /a/ analiza różnych systemów celów, ich kategoryzacja, krytyczna ocena, /b/ taksonomiczne konstrukcje takich celów i ich krytyka, /c/ operacjonalizacja celów nauczania matematyki oraz krytyczna ocena produkowanych list takich celów operacyjnych.

Przykład badań pierwszego rodzaju można znaleźć - między innymi - w obszernej, liczącej 446 stron /w tym przeszło 100 stron przypisów i spis 632 szczegółowo wykorzystanych publikacji/ monografii niemieckiego dydaktyka H.Lenné /Lenné, 1969/.

Lenné zajmuje się - między innymi - rekonstrukcją z programów i publikacji dydaktycznych systemów celów nauczania matematyki formułowanych w ramach dydaktyki tradycyjnej matematyki szkolnej, koncepcji A.Witenberga /G e n e t i s c h e s L e r n e n/, koncepcji M.Wagenscheina /E x e m p l a r i s c h e s L e r n e n/ i dydaktyki "nowej matematyki" lat 1960-1970 w stylu bourbakistowskim.

Te systemy celów, traktowanych jako kwalifikacje, które ma uczeń zdobyć ucząc się matematyki, zróżnicowane na kwalifikacje w zakresie zachowań i kwalifikacje w zakresie wiedzy, poddaje Lenné bardzo wnikliwej analizie porównawczej, wychodząc z następujących założeń: /a/ szkoła i nauczanie mają ludzi przygotować do rzeczywistych sytuacji ich życia, /b/ to przygotowanie polega na zdobywaniu przez nich odpowiednich kwalifikacji, /c/ kwalifikacje zdobywa się w procesie uczenia się konkretnych treści.

Lenné formułuje z związku z tym metodologiczny problem: jakimi kryteriami kieruje się dydaktyka matematyki przy formułowaniu celów jako kwalifikacji zdobywanych w toku uczenia się matematyki, jakie kryteria ustalają związek między "rzeczywistymi sytuacjami" a "postulowanymi kwalifikacjami" oraz związek między "postulowanymi kwalifikacjami" a przewidzianymi programem "treściami" ? Przeprowadzona wszechstronnie analiza prowadzi autora do wniosku, że takie kryteria nie tylko nie zostały jeszcze wypracowane, ale nawet sam problem nie został w dydaktyce matematyki wyraźnie postawiony.

Lenné zwraca uwagę na to, że operacjonalizacja celów nauczania matematyki ma - między innymi - zapewnić możliwość oceny realizacji tych celów za pomocą obiektywnego pomiaru, na przykład metodą testów. Jest to "wewnątrzszkolna" - jak się wyraża autor - ich weryfikacja. Kwalifikacje zdobyte w toku nauczania matematyki mają mieć jednak wartość "pozaszkolną" i w tym sensie powinny być weryfikowane metodami "pozaszkolnymi". Jest to problem transferu ze szkoły w życie, dotąd metodologicznie w istocie rzeczy nietknięty. Dotyczy to także doboru treści. Do tego tematu wrócę jeszcze w dalszym ciągu. Tu tylko chcę podkreślić, że - jak twierdzi słusznie Lenné - metodologia doboru treści matematycznych dla celów nauczania znajduje się także jeszcze na poziomie prawie zerowym. W szczególności kryteria dostosowania treści do postulowanych kwalifikacji są równie nieokreślone, jak kryteria wyboru postulowanych kwalifikacji matematycznych do ich funkcjonowania w "życiowych sytuacjach". Taki jest stan faktyczny, mimo ogromnej lawiny publikacji zajmujących się problemami celów kształcenia.

Głęboko tę problematykę analizuje H.Freudenthal w wielu swych publikacjach, między innymi w obszernej monografii o znamiennym tytule w wydaniu niemieckim: "Mathematik als pädagogische Aufgabe" /Freudenthal, 1973, str. 66-96/. Analiza, którą tam autor przeprowadza, ujawnia, jak wiele jeszcze w tej dziedzinie problemów dydaktyka matematyki prawie nie poruszyła, jak wiele jeszcze jest pojęć metodologicznie niedopracowanych, którymi się w dyskusji nad celami nauczania szermuje.

Drugi z wspomnianych rodzajów prac, to konstruowanie taksonomii ogólnych celów matematycznego kształcenia. Pierwsze takie taksonomie oparte były na różnych wariantach pierwowzoru, którym była taksonomia Blooma ogólnych celów kształcenia /Bloom, 1956/. Ten wzorzec okazał się jednak nieodpowiedni dla taksonomicznego strukturowania celów nauczania ani matematyki, ani przedmiotów przyrodniczych. Pojawiły się więc i pojawiają ciągle w publikacjach różne taksonomie celów ogólnych nauczania matematyki, konstruowane niezależnie od tego wzorca /Wittmann, 1975/. Przykładem prac wiążących teorię taksonomii z konkretami matematycznego nauczania mogą być prace H.Wintera /Winter, 1972/.

Ten nurt jest mocno krytykowany z różnych punktów widzenia. H.Lenné ujawnia w swej monografii zasadnicze trudności i niedostatki metodologiczne takich prac, H.Freudenthal atakuje je z innych pozycji /Freudenthal, 1978/. Zarzuca on wzorcowej taksonomii Blooma i jej pochodnym zupełne ignorowanie podstawowych kognitywnych celów nauczania, które dla matematyki, nauk przyrodniczych, techniki i medycyny są typowe. Na próżno szuka się tam takich kwalifikacji, jak umiejętność inteligentnego obserwowania, inteligentnego eksperymentowania i inteligentnego planowania eksperymentu, które w sposób istotny także kształci się celowo przez nauczanie matematyki, jeżeli jest ono oparte na aktywności ucznia. Freudenthal krytykuje ostro także samą strukturę pionową taksonomii, analizując głęboko w zastosowaniu do matematyki takie pary kategorii Blooma, jak "rozumienie" i "wiedza", "synteza" i "analiza" itp. Pokazuje na konkretnych przykładach, do jakich nonsensów prowadzi większość prób operacjonalizacji taksonomicznie ustrukturowanych celów ogólnych w dziedzinie matematyki w postaci list zadań - testów przeznaczonych dla weryfikacji osiągnięcia przez uczącego się taksonomicznie zhierarchizowanych kwalifikacji. Pisze nawet agresywnie: "autorom, którzy taksonomię chcą wypełnić matematyką, być może brakuje zrozumienia dla matematycznego rozumienia, ale na pewno brak im zrozumienia dla poziomów matematycznego rozumienia" /Freudenthal, 1978, str. 92/.

"To czego się w taksonomii próbuje, jest groźnym uproszczeniem, łożem Prokrusta, reflektorem, który nie dopuszcza już żadnych odcieni. Nauczyciel, który uważa, że jeden uczeń rozumie pisemne dzielenie, a drugi umie tylko bezbłędnie stosować sztuczkę, nie błąka się w mglistych ideach; ma podstawy, że tak uważa i wie, jak to przekonanie uzasadnić. Bloomowi cum suis przeszkadza to, że ktoś opanowanie pisemnego dzielenia uznaje raz tylko za Wiedzę, drugi raz za Rozumienie i uważa to za niejasne; w rzeczywistości chodzi o dobrze zdefiniowane i zupełnie nie mgliste odcienie" /Freudenthal, 1978, str. 92/.

Bloom nawiązuje koncepcję swojej taksonomii do taksonomii biologicznych. Freudenthal krytykuje tę analogię. "Po pierwsze taksonomie biologiczne mają zupełnie określony cel, mianowicie zidentyfikować roślinę lub zwierzę za pomocą coraz to subtelniejszych podziałów; taksonomia Blooma natomiast daje gruby podział na klasy według poziomów celów nauczania, ale nie daje żadnej metody, aby móc coś tym klasom przyporządkować. Po drugie biologiczna taksonomia dotrzymuje tego, co obiecuje, to jest podział roślin i zwierząt, podczas gdy taksonomia Blooma obiecuje podział celów nauczania, a produkuje podział materiału nauczania według rzekomych poziomów"/Freudenthal, 1978, str. 92/.

Freudenthal nawiązuje tu do amerykańskich publikacji poświęconych właśnie klasyfikacji zadań matematycznych według taksonomicznej hierarchii celów nauczania, publikacji charakterystycznych dla amerykańskiego nurtu dydaktyki matematyki, orientowanego na naukową obiektywność w behawiorystycznej koncepcji. Przykłady zadań podporządkowywanych poszczególnym kategoriom taksonomii Blooma cytowane przez Freudenthala uzasadniają w zupełności jego krytykę. Ujawnia ona zasadniczą trudność w ujmowaniu w sztywne schematy aktywności matematycznej uczącego się, aktywności wielowymiarowej, ze względu na różne jej nurty, formy, elementy formalne, intuicyjne, heurystyczne i ich wzajemne relacje. Przykłady cytowane przez Freudenthala - to zadania, które w opinii autorów list takich zadań mają testować osiągnięcie celów taksonomicznie ustrukturowanych. Taksonomia hierarchizuje te cele i ta hierarchia przenosi się na zadania. Tak więc zadanie "na syntezę" zajmować powinno w ocenie pozycję wyższą niż zadanie "na analizę", zadanie "na zastosowanie" pozycję wyższą niż zadanie "na rozumienie". Bardzo nawet powierzchowna analiza proponowanych zadań z punktu widzenia matematyki ujawnia, jak bardzo taki podział i taka hierarchia pozbawione są racjonalnych podstaw.

Ta krytyka nie oznacza wcale wyrzucenia poza granice dydaktyki matematyki problematyki ogólnych celów matematycznego kształcenia i ich operacjonalizacji. Ilustruje jedynie niezadowalającą jeszcze merytorycznie i metodologicznie sytuację oraz potrzebę podejmowania i prowadzenia podstawowych badań w tej dziedzinie.

Trzeba tu wspomnieć o bardzo interesujących pozytywnych sugestiach H.Freudenthala, który na konkretnym przykładzie nauki o stosunku i proporcjonalności ilustruje pewną ogólną metodę f e n o m e n o l o g i c z n e g o, jak się wyraża, konstruowania listy celów operacyjnych /co wcale tu nie znaczy celów bezpośrednio kontrolowalnych testami/, związanych z konkretnym hasłem programowym. W reprezentowanym przez Freudenthala przykładzie występują kolejno grupy celów, wyrażonych w terminych umiejętności tak, że każda grupa jest ciągiem umiejętności związanych wielostronnie z celem głównym grupy i kolejność ich odpowiada coraz głębszemu aktywnemu opanowaniu podstawowego dla tej grupy pojęcia.

Jest to także taksonomia, ale taksonomia konstruowana nie w próżni, lecz w związku z konkretnym matematycznym materiałem nauczania i dydaktycznym jego opracowaniem, oraz w intencji autora tylko hipotetyczna. Z takim projektem - jak pisze Freudenthal - idzie się do klasy i tam go weryfikuje. Okazuje się, że konfrontacja z rzeczywistością procesu nauczania może taki projekt skorygować, uzupełnić poprzednio zarysowaną hierarchię celami, których autor przedtem nie dostrzegał, których możliwość osiągnięcia w żywym kontakcie z uczniami się ujawnia. Nie jest to więc dane a priori łoże Prokrusta, do którego się wtłacza przemocą żywe matematyczne treści, ale na odwrót pewna taksonomia a posteriori, "na miarę" danej treści, taksonomia żywa. Przykład ten pokazuje, jaką rolę w takich przypadkach /i w wielu innych sytuacjach/ spełnia wnikliwa i oparta na wysokich matematycznych kompetencjach analiza matematycznego materiału, rozpatrywanego nie z punktu widzenia "matematyki gotowej", ale u punktu widzenia matematycznej aktywności. Cytuję ten przykład, bo można go traktować jako metodologiczny paradygmat dla analogicznych teoretycznych analiz, koniecznych w dydaktyce matematyki /Freudenthal, 1978, str. 279-290/.

Badania nad taksonomiczną strukturyzacją celów nauczania matematyki wiążą się z badaniami nad ich operacjonalizacją oraz z konstruowaniem list celów operacyjnych i testów, sprawdzających realizację tych celów. Rozwinęły się one szczególnie w Stanach Zjednoczonych, przede wszystkim w ramach ogólniejszego nurtu behawiorystycznej dydaktyki. Dążenie do formułowania celów nauczania w postaci postulowanych zachowań, które można obiektywnie "wymierzać", doprowadziło w wielu przypadkach do skrajnej atomizacji postulowanych wyników. Stwierdza się jej katastrofalny wpływ na sam proces nauczania przez sprowadzenie tego procesu do wyuczenia izolowanych wiadomości i umiejętności /NACOME, 1974/.

"Atomizacja jest ostateczną mądrością dydaktyki - pędem wyrosłym na spłyconym behawioryzmie" - pisze ironicznie H.Freudenthal - "Eksponuje się »sztuczki«, drobne sztuczki, które można dokładnie opisywać i mierzyć, zamiast globalnych zachowań, co byłoby oczywiście »mgliste«. Najczęściej dzisiejszy behawioryzm identyfikuje się ze skrajnym atomizmem. Wszystko ma być podzielone na małe części, zatomizowane, materiał nauczania ma być sproszkowany i w takiej formie podawany łyżkami. Przemysł testowy tego żąda; bez operacyjnych celów nauczania nie można fabrykować żadnych testów. Do tego musi się nauczanie dostosować" /Freudenthal, 1978, str. 93/. Oczywiście "globalne zachowania" można obserwować i analizować jakościowo i tylko jako proces, a nie jako rezultat procesu, sygnalizowany przez wybranie jednej z kilku możliwych odpowiedzi lub wypełnienie luki w tekście. Ale "jest aksjomatem behawioryzmu, że procesu uczenia się nie można testować" /ibidem, str. 121/.

Idee operacjonalizacji celów przez ich atomizację przeniknęły już w szerokim zakresie poza granicę ich pierwotnej ojczyzny. Słuszna tendencja z jednej strony do nadania dydaktyce matematyki statusu nauki posługującej się "obiektywnymi metodami" badań, z drugiej do sprawniejszej w praktyce organizacji procesu nauczania i do obiektywizmu w ocenie jego wyników, jest chyba błędnie realizowana w wielu pracach poświęconych właśnie operacjonalizacji celów nauczania matematyki i ich testowaniu. Dzieje się tak - między innymi dlatego - że stosuje się w nich zbyt uproszczone, ogólne schematy, zbyt szybko chce się osiągnąć poziom "metodologicznego puryzmu" w dyscyplinie znajdującej się dopiero na początku swego rozwoju, zajmującej się problemami nie nadającymi się do żadnych uproszczeń ani w ich teoretycznym rozwiązywaniu, ani w stosowaniu tych rozwiązań w praktyce. Błędy wynikają też z bardzo powierzchownej analizy matematycznych treści i matematycznych aktywności oraz z bardzo skromnej jeszcze naszej wiedzy o procesie uczenia się matematyki.

W nurcie behawiorystycznym operacjonalizacji celów nauczania powstają konkretne prace adresowane bezpośrednio do nauczyciela i do ucznia, oparte wprawdzie na gruntownej analizie materiału nauczania, ale mimo ich niewątpliwych wartości, budzące również refleksje krytyczne. Przykładem może tu być zaprogramowanie w postaci 17 grup celów operacyjnych materiału nauczania matematyki dla pierwszej klasy liceum belgijskiego, przedstawione w obszernej przeszło 650 stron liczącej książce /Tourneur, 1974/. 17 grup celów odpowiada 17 tematom programu szkolnego; związki między tymi tematami /logiczne i odnoszące się do następstwa w czasie/ przedstawia przejrzysty organigram. Każda z poszczególnych grup celów operacyjnych jest też ustrukturowana podobnie, zawiera dla każdego "podcelu" operacyjnego przykład zadania, który go konkretyzuje, test diagnostyczny, ćwiczenia korekcyjne i wreszcie ostateczny test "bilansujący" wyniki nauczania materiału, do którego ta grupa się odnosi.

Jest to w istocie rzeczy bliskie nauczaniu programowanemu, z tym, że realizacja programu odbywa się w zespole klasowym pod kierunkiem nauczyciela. Organigramy osiągnięć w każdej grupie są też przekazywane uczniom w celu ich bardziej świadomego udziału w realizacji programu. Wszystko to razem odbiera się jako maszynę skonstruowaną z ogromnym nakładem pracy i niewątpliwie także dydaktycznej inwencji, która puszczona w ruch w klasie prawdopodobnie /potwierdzają to pierwsze weryfikacje/ umożliwi osiągnięcie ściśle określonych celów w zakresie wiedzy i pewnych dokładnie sprecyzowanych umiejętności. Ta maszyna reguluje proces nauczania tak, że nie ma w nim miejsca na sytuacje otwarte, na rozwój postaw heurystycznych, na twórcze poszukiwania rozwiązania problemu, nie mieszczącego się w przyswojonych schematach, na kształcące błądzenie itp.

Jak powinno się operacjonalizować ogólne cele nauczania matematyki, aby tej otwartości z procesu nauczania nie eliminować ? Na jakim stopniu uszczegółowienia należałoby się zatrzymać w określaniu wyników nauczania, aby w atomizacji nie zagubić kształcenia na rzecz wyuczania ? Oto przykłady podstawowych pytań, na które dydaktyka matematyki poszukuje jeszcze odpowiedzi.

Problematyka celów nauczania matematyki oraz ich operacjonalizacji - to dziedzina ciągle jeszcze otwarta dla dydaktyki matematyki zarówno od strony teoretycznej, jak i w zakresie konkretnych projektów adresowanych wprost do praktyki szkolnej.

3. PROBLEMY NA GRANICY MATEMATYKI I JEJ DYDAKTYKI

We współczesnej dydaktyce matematyki przywiązuje się szczególną wagę zawsze do tego, aby w każdej dziedzinie badań utrzymać możliwie silne więzy z samą matematyką; w pewnych jednak nurtach lub fragmentach tych badań te więzy są szczególnie mocne. Dydaktyk matematyki pracuje wtedy matematycznymi metodami lub analizuje samą matematykę z różnych punktów widzenia interesujących go właśnie jako dydaktyka, lub śledzi rozwój pewnych pojęć czy metod w historii matematyki itp. Takie badania podstawowe znajdują swe głębokie uzasadnienie w potrzebach dydaktyki matematyki, dla której nie tylko matematyczna wiedza, ale i w i e d z a o m a t e m a t y c e stanowi konieczną bazę dla innych nurtów badań. Matematyka dostarcza dydaktykowi matematyki tylko "surowiec", który w badaniach dydaktycznych jest analizowany z punktu widzenia potrzeb, warunków, możliwości nauczania, następnie przetwarzany na użytek nauczania, wreszcie ujmowany w postaci dydaktycznego projektu.

3.1. DYDAKTYCZNIE UKIERUNKOWANA ANALIZA MATEMATYCZNEGO MATERIAŁU I MATEMATYCZNYCH METOD. Każdemu prawie tematowi nauczania matematyki odpowiada kilka różnych teoretycznych ujęć w matematyce - nauce. Na przykład w standardowych teoriach konstrukcyjnych pojęcie liczby rzeczywistej jest określane rozmaicie przez definicje Cantora, Dedekinda, Weierstrassa /w szczególnym przypadku jako ułamek dziesiętny nieskończony/. Strukturę ciała liczb rzeczywistych definiuje się też bezpośrednio aksjomatycznie lub jako etap kolejnych rozszerzeń algebraicznych półgrupy liczb naturalnych. Definicje konstrukcyjne różnią się od strony matematycznej złożonością pod względem formalnym, konsekwencjami w rozwijaniu teorii /stopień komplikacji w definiowaniu działań i dowodzeniu ich własności/ oraz wykorzystaniem metody ich definiowania w teoriach abstrakcyjnych przestrzeni.

Z drugiej strony, definicje te różnią się istotnie ich poglądowością i naturalnością dla ucznia, który związał na przykład w poprzednich etapach pojęcie liczby z wymierzaniem, z miarą i dla którego naturalną potrzebę i drogę do rozszerzenia zakresu liczb może wskazywać między innymi intuicja geometryczna ciągłości prostej.

Te różnice formalne i poglądowe można zilustrować porównaniem definicji Cantora z definicją liczby rzeczywistej identyfikowanej z ułamkiem dziesiętnym nieskończonym /dla uzyskania jednoznaczności wyklucza się okres 9/. Definicja Cantora jest formalnie bardziej skomplikowana /abstrahowanie od pewnej relacji równoważnościowej w zbiorze pewnych ciągów liczb wymiernych/ niż definicja liczby rzeczywistej jako ułamka dziesiętnego nieskończonego /po prostu specyficzny ciąg, szereg, którego wyrazami są kolejne przybliżenia dziesiętne tej liczby/. Definicja Cantora nie nawiązuje do pomiaru, liczba rzeczywista jako ułamek dziesiętny nieskończony może być ściśle związana z mierzeniem odległości punktu półosi od jej początku, z pojęciem układu współrzędnych i pojęciem współrzędnej punktu. Definicja Cantora natomiast inicjuje ogólną metodę uzupełniania przestrzeni, ułamek dziesiętny nieskończony nie ma takiego zastosowania. Definiowanie działań i porządku oraz dowody ich własności oparte na definicji Cantora są na ogół proste /jedyną komplikacją jest konieczność dowodzenia niezależności definiowanych obiektów od reprezentacji liczb występujących w rozważanych relacjach/. Definiowanie działań w teorii opartej na definicji identyfikującej liczbę rzeczywistą z ułamkiem dziesiętnym nieskończonym jest skomplikowane, bowiem szereg, który jest sumą dwóch ułamków dziesiętnych nieskończonych, na ogół nie jest ułamkiem dziesiętnym nieskończonym, a więc nie jest liczbą rzeczywistą w tym sensie. Sumę i iloczyn liczb rzeczywistych trzeba zatem przy tej koncepcji inaczej definiować, zaś dowody ich własności wymagają sprawnego posługiwania się nierównościami i oszacowaniami.

Rozważmy jeszcze jeden przykład. Miarę wewnętrzną Jordana zbioru możemy na przykład definiować jako granicę ciągu pól zawartych w zbiorze segmentów sieci powstałych przez kolejne zagęszczanie sieci jednostkowej lub jako kres górny zbioru pól takich segmentów wyznaczonych przy wszelkich możliwych sieciach. Podobnie możemy dwoma różnymi sposobami definiować miarę zewnętrzną Jordana zbioru. W pierwszym przypadku trzeba udowodnić, że miary wewnętrzna i zewnętrzna nie zależą od wyboru ciągu sieci, co nie jest proste na poziomie szkolnym, w drugim ten problem w ogóle - z definicji - się nie pojawia. Natomiast w pierwszym przypadku dowód, że miara wewnętrzna jest nie większa od miary zewnętrznej, jest natychmiastowy, w drugim już nie tak prosty. Jeżeli przyjmiemy pierwszą definicję i ograniczymy się tylko do segmentów zawartych wewnątrz zbioru, to dowód niezależności od wyboru sieci jest prostszy niż dowód w przypadku, gdy rozważamy segmenty zawarte w zbiorze. Ale ograniczanie się do segmentów zawartych tylko wewnątrz zbioru jest dla ucznia sztuczne /w praktyce mierzenia wypełnia kwadratami cały prostokąt, a nie tylko jego wnętrze/ itp.

Rejestracja możliwych rozwiązań matematycznych i analiza ich walorów i wad z punktu widzenia trudności, naturalności, intuicyjności, możliwości wglądu i uchwycenia podstawowych idei, ekonomii w rozwijaniu teorii, możliwości zastosowania itp. jest podstawową pracą, którą musi wykonać dydaktyk przygotowujący projekt dydaktyczny. Takie badania ujawniają "zasadę zachowania trudności"; trudność wyeliminowana lokalnie przez przyjętą definicję, lub kolejność twierdzeń, pojawia się w innym punkcie rozwijanej teorii, bądź jest wyeliminowana kosztem sztuczności w przyjętej definicji, co jest również istotną jej wadą powodującą dydaktyczne trudności. Zlokalizowanie i ocena trudności - to bardzo ważne zagadnienie.

Trudności specyficzne danej koncepcji mogą być zlokalizowane tak lub mogą mieć taki charakter, że nie występują jeszcze w tym fragmencie matematyki szkolnej, którego podstawą jest analizowany fragment matematycznej teorii, albo nie pojawią się w ujęciu szkolnym ze względu na to, że na niższym poziomie nauczania ujmuje się pewne zagadnienia tylko poglądowo, że dowody zastępuje się intuicyjną oczywistością, że definicji nie formułuje się explicite, wykorzystując matematyczny surowiec jedynie z punktu widzenia zawartych w nim, odformalizowanych idei.

Lokalizacja trudności, ujawnienie jej szczególnego charakteru, stanowi istotny element dydaktycznej analizy matematyki. Taka analiza może być podstawą do wyboru matematycznej bazy dla fragmentu matematyki szkolnej także ze względu na wartości kształcące takiego lub innego ujęcia ze względu na to, że jedno jest bardziej niż inne otwarte dla aktywności i twórczości matematycznej na miarę ucznia, że uczy bardziej ogólnych lub szczególnie ważnych metod.

Dla rozwoju dydaktyki matematyki potrzebne są też studia dotyczące historycznego rozwoju matematycznych struktur i metod, ich genezy i wewnętrznych oraz zewnętrznych mechanizmów, które ten rozwój warunkują. Ujawnienie na przykład, jaką rolę w kształtowaniu się pojęcia struktury odegrało badanie grup transformacji i ich niezmienników, odkrywanie dualizmu i różnych izomorfizmów rzuca światło na pewne dydaktyczne problemy formowania się niektórych pojęć. W wyniku takich badań przywraca się czasem także znaczenie pewnym elementarnym metodom, wyrugowanym już z nauki przez nowoczesne środki matematycznej myśli, metodom, które mogą być wykorzystane w nauczaniu, eksponującym drogę genetyczną.

Analiza rozwoju języka matematyki, analiza jej współczesnego języka, studium porównawcze różnych systemów symboliki, operatywnej funkcji matematycznego symbolu, jego struktury, formy, ekonomii w zapisie i w komunikowaniu treści itp. - to wszystko stanowi pewien rodzaj badań z dydaktyki matematyki. Dotyczy to także analizy pewnych istotnych dla matematycznej aktywności procesów, jak matematyzacja, uogólnienie, specyfikacja, aksjomatyzacja, metody dowodzenia, definiowania itp., analizy zawsze podejmowanej i przeprowadzanej w perspektywie poszukiwania rozwiązań dla problemów uczenia się i nauczania matematyki.

Przykładem takich analiz mogą być liczne artykuły i książki H.Freudenthala, w szczególności wspomniana już obszerna książka "Mathematik als pädagogische Aufgabe" /Freudenthal, 1973/. Sam tytuł sugeruje, że autor rozważa matematykę z punktu widzenia jej nauczania. Analizuje się tu bardzo głęboko różne aspekty pojęć arytmetyki, geometrii, analizy, rachunku prawdopodobieństwa, logiki, język matematyki, jak Freudenthal się wyraża, fenomenologicznie. Niezależnie od tego, że ta analiza jest wyraźnie ukierunkowana przez osobistą filozofię autora, którego poglądy są czasem kontrowersyjne, formułowane często ostro, wręcz agresywnie, książka H.Freudenthala ujawnia ogromną, nigdy nie wyczerpaną dziedzinę zagadnień teoretycznych pojawiających się na granicy matematyki i jej nauczania, zagadnień ciągle nowych, bo ściśle związanych z rozwojem samej nauki, ze zmieniającymi się poglądami na jej podstawy, rozszerzaniem się jej zastosowań.

D.Lunkenbein charakteryzując ten nurt badań, które nazywa "analizą matematyki", pisze: "Badania w tej dziedzinie dotyczą obiektów i procesów matematycznych, oświetlanych dla celów dydaktycznych. Prace w tej dziedzinie były chyba jednymi z pierwszych prac w dydaktyce matematyki. Prace F.Kleina - to przykład p a r e x c e l l e n c e badań tego typu" /Lunkenbein, 1979, str. 18/. Porównanie klasycznej książki Kleina "Elementare Mathematic vom höheren Standtpunkt aus" /Klein, 1908, 1909/ z książką Freudenthala "Mathematik als pädagogische Aufgabe" ujawnia, jak specyficzne problemy dydaktyki matematyki są związane z samą matematyką, jak zmienia się problematyka badań "na granicy" wraz z rozwojem matematyki oraz o ile bardziej pogłębionych i skomplikowanych teoretycznych analiz wymaga ta problematyka dziś niż w czasach Kleina.

H.Griesel w swym pryncypialnym artykule na ten temat traktuje takie badania jako główny nurt współczesnej dydaktyki matematyki /Griesel, 1971/.

W cytowanym poprzednio raporcie amerykańskim /Long, 1970/ badania, które wielu dydaktyków /Lunkenbein, Steiner, Griesel i inni/ nazywa "analizą matematyki", określa się jako "prace interpretacyjne". Raport sugeruje całą listę tematów, np.: Zbadać różne matematyczne reprezentacje liczby wymiernej, sprecyzować na podstawie tej analizy rozmaite metody, za pomocą których można w nauczaniu opracować liczby wymierne i ich zastosowania. Zbadać różne typowe formy matematyzacji /tworzenie matematycznych modeli/, wybrać lub skonstruować charakterystyczne przykłady, z pomocą których te formy mogą być rozwijane w nauczaniu w szkole średniej. Porównać różne sposoby akjomatycznego ugruntowania geometrii euklidesowej, które są proponowane dla nauczania /Dieudonné, Choquet, Papy, Birkhoff, Blumenthal, Fladt, Pickert, Dellessert itp./ w celu ujawnienia przydatności jednej lub kilku z nich do nauczania geometrii; porównać aksjomatyczną konstrukcję euklidesowską z geometrią opartą na pojęciu ruchu. Przeprowadzić porównawcze badania różnych możliwości opracowania podstawowych pojęć analizy rzeczywistej /konsekwencje ciągłości lub na odwrót, różne możliwości zdefiniowania różniczkowalności i pochodnej, dojścia do niestandardowej analizy na drodze aksjomatycznej lub od strony niestandardowych modeli/. Wyróżnić charakterystyczne cechy matematyki stosowanej. Czy to jest jasno ograniczona dyscyplina ? Jaką rolę spełnia w nauczaniu matematyki ? Zbadać, jakie znaczenie ma nowoczesna epistemologia matematyki dla rozwijania nowych metod nauczania matematyki /metoda indukcyjna, stopniowe abstrahowanie, sytuacja jako punkt wyjścia, metoda odkrywania itp./ /Long, 1970/.

Są to tylko wybrane przykłady spośród wielu sugerowanych przez amerykański raport "zagadnień interpretacyjnych", których opracowanie powinno stanowić, zdaniem autorów raportu, jeden z nieodzownych elementów przygotowania dydaktycznego projektu dla większego lub mniejszego fragmentu nauczania, w zakresie treści i jej struktury, metody, środków itp. Przytoczone przykłady ilustrują tylko w zarysie to, co obejmuje analiza lub w innej terminologii badania interpretacyjne matematyki z punktu widzenia dydaktyki w rozmaitych aspektach: *matematyka "gotowa"* - /upowszechniony w literaturze naukowej *produkt aktywności matematycznej*: teorie, definicje, twierdzenia, sposoby prezentacji rezultatów badań, język, symbolika itp./, *matematyka w stanie tworzenia* /matematyczna heurystyka, tworzenie pojęć i ich definiowanie, odkrywanie twierdzeń, sposoby weryfikacji tez, możliwości i typy błędów, specyfikacja, uogólnienie, itp./, *historia matematyki* /historyczna geneza matematycznych struktur i ich rozwój, transformacje języka itp./, *matematyka w zastosowaniach* /proces matematyzacji, typy zastosowań/ oraz *filozofia i metodologia matematyki* /poglądy na przedmiot matematyki i jej stosunek do materialnego świata, badania nad podstawami matematyki/.

Oczywiście tego rodzaju badania wymagają głębokiej wiedzy i kultury matematycznej, współpracy z matematykami twórczymi, korzystania z ich nielicznych zresztą, niestety, wypowiedzi na temat ich poglądów na matematykę i doświadczeń z ich własnej twórczości, umiejętności wyławiania z faktów historycznych przede wszystkim idei w ich rozwoju. Nie każdy dydaktyk matematyki może podejmować tego typu badania w szerszym zakresie, ale refleksja nad matematyką w omówionym poprzednio sensie, choćby lokalna, powinna znaleźć swe ważne miejsce przy rozwiązywaniu każdego problemu dydaktycznego dotyczącego procesu uczenia się i nauczania matematyki.

3.2. ELEMENTARYZACJA I PROJEKT DYDAKTYCZNY. Przetworzenie materiału naukowego na użytek nauczania, poprzedzone analizą tego materiału w sensie określonym w 3.1, wymaga - zawsze na niższym poziomie nauczania - jego e l e m e n t a r y z a c j i. Pierwszym aktem jest ujawnienie podstawowych idei, intuicji, związków z materialnym doświadczeniem, genetycznych źródeł tego, co wybraliśmy jako przedmiot nauczania, idei zwykle w "gotowej nauce" przesłoniętych formalną stroną ostatecznej prezentacji tematu. Taka analiza ma na celu wykrycie n a t u r a l n e j d r o g i stopniowego schematyzowania, prowadzącej od doświadczeń ilościowych i przestrzennych oraz różnych form aktywności do abstrakcyjnych struktur matematycznych. Następny etap - to poszukiwanie form i środków opracowania tego samego przedmiotu na odpowiednim poziomie elementarności. Elementaryzuje się na przykład algebrę zbiorów w postaci enaktywnej i ikonicznej algebry schematów Venna /1/.

Różnym poziomom nauczania odpowiadają różne poziomy elementaryzacji. Elementaryzacja może dotyczyć sformułowania definicji lub twierdzenia, dowodu, globalnego lub lokalnego ujęcia materiału nauczania, metody, języka. Ta sama struktura, metoda, ten sam element języka mogą być elementaryzowane na tym samym poziomie różnymi sposobami. Elementaryzacja może być przeprowadzona poprawnie lub błędnie zarówno z punktu widzenia matematyki, jak i z punktu widzenia psychologii, zainteresowań ucznia, konsekwencji w następnych etapach nauczania itp. Reformom pierwszej fali z lat 1960-1970, w toku których usiłowano elementaryzować bardzo abstrakcyjne struktury matematyczne i metodę aksjomatyczną, zarzuca się wiele właśnie z tych wszystkich punktów widzenia.

Poprawna matematycznie i dydaktycznie elementaryzacja matematyki na danym poziomie wymaga nie tylko głębokiego wniknięcia w matematyczną treść, ale także specyficznej inwencji matematycznej i dydaktycznej. Elementaryzacja bowiem nie może wyrażać się

/1/ Por. artykuł Z.Semadeniego w tym tomie, str.163

w infantylnym traktowaniu matematyki, ani w jej zniekształcaniu, powinna natomiast być zawsze tak przeprowadzona, aby było można w dalszym ciągu, na wyższym poziomie nauczania, elementarne reprezentacje formalizować, aby od początku już w tych reprezentacjach zawarta była rzetelna matematyka, opisana tylko innym niż naukowy językiem.

Elementaryzacja jest zwykle częścią pracy dydaktyka matematyki przygotowującego projekt dydaktyczny opracowania w nauczaniu matematycznych treści. Zasięg takiego projektu może być bardzo zróżnicowany /jedna lekcja na dany temat, opracowanie pewnego pojęcia, większego fragmentu programu, całości w postaci podręcznika, tekstów sterujących pracą uczniów itp/. Dydaktyk matematyki posługuje się często w takich konstrukcjach metodami matematycznymi. Na przykład projektując jakieś oryginalne ujęcie elementarne większego fragmentu teorii, formułuje definicje, ustala kolejność twierdzeń, proponuje ich dowody, dobiera lub konstruuje nowe zadania, ustala symbolikę. Elementaryzacja języka matematyki doprowadziła na przykład do stworzenia matematycznej specyficznej "symboliki dziecięcej", szczególnie bogatej spuścizny pierwszej fali modernizacji nauczania matematyki z lat 1960-1970.

Szczególne miejsce w projekcie dydaktycznym zajmuje materiał zadaniowy.W dydaktyce matematyki poświęca się dziś wiele uwagi teoretycznym problemom związanym z konstruowaniem zadań matematycznych na użytek nauczania /np. typologia zadań matematycznych i ich analiza z różnych punktów widzenia/. Literatura dydaktyczna na ten temat jest już tak obszerna, że należałoby podjąć porównawcze studia w celu monograficznego opracowania choćby pewnej części zagadnień z tej dziedziny.

Konstruowanie zadań, ich dobór spośród zadań już znanych, dostosowanie do pewnego kontekstu interesujących matematycznie i dydaktycznie zadań klasycznych, to istotna część pracy twórczej dydaktyka matematyki opracowującego projekt dydaktyczny.

Wiele interesujących projektów dydaktycznych opartych na elementaryzacji nowoczesnej matematyki - to wynik prac zespołowych prowadzonych w ośrodkach dydaktyki matematyki, organizowanych na całym świecie. Typowym przykładem tego nurtu mogą być prace wykonywane od wielu lat we wspomnianym już poprzednio

Belgijskim Ośrodku Pedagogiki Matematyki w Brukseli, mające na celu skonstruowanie matematyki elementarnej jednolitej od przedszkola do ostatnich klas szkoły średniej, obejmującej nowocześnie ujęte elementy teorii mnogości, arytmetyki, geometrii, algebry, topologii, analizy, z zastosowaniem różnych środków elementaryzacji. Mimo że cały system był i jest ostro krytykowany, te środki zasługują na teoretyczne monograficzne opracowanie a p o s t e r o r i na podstawie opublikowanych licznych podręczników, artykułów i rozpraw tłumaczonych na wiele języków.

Metody i środki elementaryzacji matematyki dla celów szkolnych na całym świecie są już dziś zresztą tak rozwinięte i tak różnorodne, że chyba dojrzały do krytycznej globalnej analizy porównawczej. Dotyczy to też różnych form reprezentacji matematycznych treści /2/. Można rozróżniać też style elementaryzacji matematyki, na przykład tradycyjny, bourbakistowski, angielski lub styl IOWO /IOWO, 1977/. Obserwuje się też elementaryzację ukierunkowaną w stronę myślenia algorytmicznego pod wpływem wzrastającej roli informatyki i komputeryzacji działalności człowieka. Ten styl zależy w dużej mierze też od ogólnej koncepcji metodycznej matematycznego kształcenia, jest inny, gdy myśli się przede wszystkim o nauczaniu metodą sokratyczną, inny, gdy ma ono być oparte na bardziej swobodnej, twórczej aktywności ucznia.

3.3. TREŚĆ NAUCZANIA I JEJ STRUKTURA. Helge Lenné w swym porównawczym, cytowanym poprzednio studium stwierdza: "Brak jest w dydaktyce matematyki, przynajmniej w Niemczech, prac, które opisują i uzasadniają wyrażone e x p l i c i t e metody stosowane przy wyznaczaniu treści kształcenia w zależności od szkolnej tradycji, nauki, kultury, praktyki, metody, według których takie treści mogłyby być rejestrowane, kategoryzowane, kontrolowane w zakresie ich logicznej struktury, wreszcie wybierane i opatrywane pewną oceną ważności, która decydowałaby o ilości godzin lekcyjnych na nie przeznaczonych" /Lenné, 1969, str. 287/.

E.Wittmann zauważa z związku z tą wypowiedzią, że "Dydaktyka matematyki musi się zająć w najbliższym czasie tymi problema-

---

/2/ Por. artykuł Z.Semadeniego w tym tomie, str.163.

mi i nimi się zajmie. Wydaje się jednak, że w stosunku do tej problematyki byłoby utopią wierzyć, że rozwinie się jednolita, oparta na powszechnym uznaniu metodologia w sensie postulowanym przez Lennégo" /Wittmann, 1974, str. 30/. Uwaga Wittmanna jest słuszna, ale między brakiem wyraźnych kryteriów doboru treści nauczania matematyki a całkowicie już ukonstytuowaną metodologią konstruowania programów nauczania jest duża przestrzeń, którą można stopniowo wypełniać rozwiązaniami częściowymi lub lokalnymi. I to właśnie współcześni dydaktycy matematyki próbują robić.

H.G.Bigalke w cytowanym poprzednio artykule /Bigalke, 1974/ podkreśla konieczność ścisłego oparcia decyzji dotyczących wyboru i struktury materiału nauczania matematyki na sformułowanych a priori celach matematycznego kształcenia. Ten oczywisty postulat nie daje jednak w pełni operatywnego kryterium, które mogłoby w sposób rozstrzygający decydować o optymalnych ze względu na te cele wyborze i strukturze. Bigalke uważa dalej, że refleksja nad treścia nauczania dotyczyć powinna czterech dziedzin: /a/ analizy samej matematyki w jej rozwoju, współczesnym etapie i w tendencjach - o czym mówiliśmy poprzednio, /b/ rejestracji kwalifikacji matematycznych potrzebnych w różnych zawodach, /c/ analizy psychologicznych warunków uczenia się i zdobywania ogólnych kwalifikacji intelektualnych i kulturalnych na danym poziomie oraz /d/ krytycznej analizy istniejących różnych programów nauczania matematyki. W innym sformułowaniu wyraża się kryteria doboru i strukturowania treści nauczania w sposób następujący: mają to być treści równocześnie: /a/ podstawowe z punktu widzenia samej nauki, /b/ elementarne lub elementarne potencjalnie, a więc nadające się do odpowiadającej danemu etapowi nauczania elementaryzacji, /c/ użyteczne, /d/ szczególnie przydatne do kształcenia pozytywnych w procesie rozwiązywania problemów postaw i technik intelektualnych, naukowego światopoglądu i rozumienia roli matematyki w naszej cywilizacji. Program nauczania dla ogólnokształcącej szkoły określa to, co się zwykle nazywa matematyką elementarną.

Wynika stąd, że nie ma jednej raz na zawsze określonej matematyki elementarnej. Matematyka elementarna zmienia się wraz z rozwojem matematyki, z rozszerzeniem jej zastosowań, zmianami w poglądach na jej podstawy, z rozwojem innych dyscyplin /na przykład psychologii, informatyki/, z upowszechnieniem oświaty, z rozwojem technicznych środków nauczania /minikomputery w rękach uczniów/ itp. Można już mówić dziś o pasjonującej historii rozwoju matematyki elementarnej i mechanizmach, które tym rozwojem kierują.

Ale w jednym i tym samym okresie poglądy na to, czym być powinna matematyka elementarna, są zróżnicowane, między innymi dlatego, że terminy odnoszące się do treści nauczania: "podstawowe", "elementarne", "użyteczne", "kształcące" nie oznaczają tego samego dla wszystkich, nie odpowiadają jednoznacznym operatywnym kryteriom, i przeciwnie, są interpretowane w bardzo szerokiej skali.

W stosunku do dwóch pierwszych na jednym końcu tej skali znajduje się pogląd, że proces uczenia się matematyki powinien uwzględniać drogę genetyczną opartą na paralelizmie filogenezy i ontogenezy[3]. W szczególności, według niektórych poglądów, proces uczenia się matematyki powinien przebiegać w sposób skrócony w etapach analogicznych do etapów historycznego rozwoju samej matematyki. Podstawowe i elementarne treści matematyczne, to przede wszystkim - w tym ujęciu - te treści, które pojawiły się w rozwoju nauki wcześnie i zostały zorganizowane teoretycznie w takie działy, jak arytmetyka, geometria syntetyczna i analityczna, najprostsze elementy rachunku różniczkowego - to wszystko w ujęciu klasycznym, bez uwzględniania struktur pojęciowych, języka, precyzji rozwiniętych pod koniec XIX i w XX wieku.

Na przeciwnym końcu skali występuje pogląd, że uczyć należy matematyki elementarnej w ujęciu współczesnym, to jest matematyki elementarnej XX wieku. Za podstawowe uznaje się w tej koncepcji te pojęcia i metody matematyki, które są dziś wszędzie obecne, a więc występują w różnych działach matematyki i w jej zastosowaniach jako fundamentalne elementy współczesnego matematycznego języka i specyficzne typowe sposoby postępowania w ma-

---

/3/ Zob. artykuł R.Dudy w tym tomie, str.127.

tematycznej aktywności/4/. Z tych treści do nauczania szkolnego mogą być włączone tylko te, które można elementaryzować, a więc dla których można znaleźć drogę genetyczną, w innym niż w poprzednim sensie "genezy", to jest drogę prowadzącą od konkretnych doświadczeń, wyobrażeń, intuicji uczącego się poprzez stopniowe schematyzacje do ich matematyzacji i dostosowanej do jego poziomu pewnej formalizacji.

Te dwie koncepcje różnią się więc zasadniczo interpratacją terminu "droga genetyczna do matematyki". Podobna rozpiętość poglądów występuje w interpretacji kryterium użyteczności. Z jednej strony nadaje się "użyteczności" znaczenia skrajnie pragmatyczne: matematyka użyteczna dla wszystkich, to tylko "matematyka życia codziennego". Prowadzi to do nurtu szczególnie żywego dziś w Stanach Zjednoczonych, zorientowanego przez hasło "wrócić do rzeczy podstawowych", interpretowane jako skrajnie pragmatyczny minimalizm programowy.

Według poglądów przeciwstawnych każdy człowiek na przełomie XX i XXI wieku powinien rozporządzać pewnymi technikami myślenia, które rozwija uczenie się matematyki bardziej zaawansowanej /myślenie modelami/ oraz powinien mieć podstawowe przygotowanie do dalszego kształcenia się, z czego może - lub nie - korzystać, ale do czego nie powinien mieć zamkniętych drzwi. W tym sensie użyteczna jest matematyka elementarna bogata pojęciowo i heurystycznie.

Inna interpretacja terminu "użyteczność" odnosi się do roli matematyki szkolnej w zapewnieniu przyszłego "powodzenia zawodowego" absolwentom szkoły. Ogólna koncepcja - także szczególnie eksponowana w Stanach Zjednoczonych - kształcenia pod hasłem "Kształcenie nachylone do zawodu /c a r e e r e d u c a t i o n/ odbija się również na problemach konstruowania programów, w szczególności w dydaktyce matematyki na poszukiwaniu odpowiadających tej koncepcji kryteriów doboru treści. Raport NACOME stwierdza jednak, że realizacja koncepcji career education w szkole ogólnokształcącej wymagałaby radykalnej rewolucji w nauczaniu szkolnym, uzależnionym od postulatów 15-20 grup zawodo-

/4/ Zob. artykuł P.Hiltona w tym tomie, str. 139.

wych. "Doprowadziłaby do dwóch różnych kultur matematycznych: jednej - skoncentrowanej dokoła szeroko rozumianych strukturalnych pojęć i heurystycznych metod, drugiej - dokoła sprawności rachunkowych i specyficznych technik nadających się do stosowania w rozwiązywaniu problemów codziennego życia i wyspecjalizowanych zawodów. Czy to jest nieunikniona i właściwa dychotomia ? Czy można łatwo określać minimalne matematyczne kompetencje, które każdy uczeń średniej szkoły ma zdobywać ? Czy wąskie, zorientowane na powodzenie w zawodzie wyuczanie jest odpowiednią i efektywną alternatywą dla tradycyjnego programu dla mniej zdolnych uczniów ? To są pytania fundamentalne, które wymagają wnikliwego przestudiowania przez wszystkie zainteresowane tym zawodowo grupy" /NACOME, 1975, str. 34/.

Oczywiście nasuwa się pytanie, jakie jest miejsce dydaktyki matematyki w tej dyskusji, która wykracza daleko poza specyfikę matematyki jako przedmiotu nauczania i dotyczy ogólnych koncepcji kształcenia uwarunkowanych społecznie. Dydaktyk matematyki jest tu tylko jednym z wielu partnerów, ale powinien być partnerem rozporządzającym szczególnym rozeznaniem w tym, co matematyczne kształcenie może dać, a czego dać nie może. Gdy zaś ogólna koncepcja zostanie ustalona i gdy postulaty różnych grup społecznych zostaną sprecyzowane i uzgodnione - co, jak dotąd, pozostaje tu tylko fikcyjnym założeniem - to w ramach dydaktyki matematyki powinno się badać możliwości zadośćuczynienia tym żądaniom i podejmować próby konstruowania sensownego projektu dotyczącego wyboru szczegółowych treści i ich dydaktycznie właściwego ustrukturowania, uwzględniającego kolejne poziomy rozwoju umysłowego ucznia.

Kryterium użyteczności dotyczy też uwzględnienia w programie nauczania matematyki takich elementów, które są użyteczne, bo integrują strukturalnie materiał nauczania matematyki i ułatwiają uczenie się matematyki w zakresie innych treści i metod. Na przykład wprowadzenie języka mnogościowego już w klasach początkowych jest - między innymi - motywowane jego użytecznością w tym znaczeniu. Pewne pojęcia, terminy, fragmenty matematyki elementarnej pozornie nieużyteczne, gdy się je rozpatruje tylko lokalnie, okazują się użyteczne z punktu widzenia całej konstrukcji materiału szkolnego.

Tak więc postulatu, by treści nauczania zawierały elementy "podstawowe" z punktu widzenia współczesnej nauki, by były "elementarne" i "użyteczne", nie umiemy jeszcze przełożyć na operatywne kryteria doboru treści nauczania matematyki i strukturowania tej treści. To samo odnosi się do postulatu, by te treści były "kształcące". Gorące batalie dokoła programów nauczania ujawniają ogromne rozbieżności w interpretacji tych postulatów, zależnej w dużej mierze od osobistych poglądów na matematykę i od osobistych zainteresowań matematycznych uczestników tych batalii.

W wyniku takich starć powstają często programy kompromisowe, co prowadzi do przeciążenia ich materiałem nauczania oraz do braku wyraźnej koncepcji i logiki w ich konstrukcji. Ma więc rację Lenne twierdząc, że dydaktyka matematyki nie tylko nie dopracowała się jeszcze operatywnych zasad i metod doboru treści nauczania, ale że ten problem nie został jeszcze nawet wyraźnie postawiony.

To samo odnosi się do strukturowania materiału nauczania. Ze względu na niewątpliwie istnienie różnych poziomów rozumienia matematycznych treści, we współczesnej dydaktyce matematyki eksponuje się spiralną organizację jej nauczania. Konsekwencją tej koncepcji są trzy zasady:

1. Zasada nauczania wyprzedzającego. Nauczania jakiegoś fragmentu danej dyscypliny nie należy odsuwać aż do tego momentu, w którym będzie ono mogło być realizowane ostatecznie z odpowiednim formalizmem; takie ostateczne opracowanie tej treści powinno być poprzedzone jej nauczaniem na niższych poziomach w odpowiadającej tym poziomom postaci.

2. Zasada nauczania perspektywicznego. Nauczanie jakiejkolwiek treści na niższym poziomie nauczania powinno uwzględniać możliwość jej dalszego rozbudowywania, pogłębiania, porządkowania, strukturowania, formalizowania, przy tym nigdy nie wolno doprowadzać do tego, aby ujęcie na niższym poziomie nauczania musiało być prostowane na wyższym poziomie, aby tu trzeba było oduczać tego, czego nauczono na poziomie niższym.

3. Zasada poprzedzania analizy przez konstrukcje. Przejście na wyższy poziom rozumienia matematycznych struktur odbywa się między innymi przez analizę tego, co zostało przez uczącego się skonstruowane

na niższym poziomie nauczania, konstrukcja powinna poprzedzać zawsze analizę /te zasady w nieco innej redakcji formułuje E.Wittmann, 1975/.

Stosowanie tych zasad w konstruowaniu programów wymaga zarówno analiz teoretycznych, jak i empirycznych badań. Nie wystarczają do tego znane metody analizowania struktury programu w ramach jednej klasy, prowadzone - między innymi - za pomocą macierzy związków między poszczególnymi tematami. O wiele trudniejsze jest planowanie w tematyce nauczania etapów rozwoju poszczególnych pojęć, elementów teorii, metod oraz warunków i mechanizmów przechodzenia z jednego poziomu na inny wyższy. Wymaga to bardzo głębokiego wniknięcia w matematyczną treść oraz racjonalnego uwzględniania wiedzy psychologicznej.

Na przykład pojęcie ciągłości może być kształtowane stopniowo w jego rozmaitych aspektach, w rozmaitych sytuacjach, w których występuje, poczynając od pierwszych klas szkoły. Zgodnie z wynikami badań Piageta przestrzenne struktury topologiczne są już w sposób spontaniczny, nieformalny ujmowane w tym okresie /niezmienniki topologiczne konkretnych i wyobrażonych przekształceń, "kształt topologiczny" figur itp./. Ujęty spiralnie program, w którym przewiduje się na pewnym poziomie wprowadzenie definicji ciągłości funkcji, uwzględnia pojęcie ciągłości w rozplanowaniu treści od samego początku nauczania, przy czym w przechodzeniu z jednego poziomu na drugi przewiduje się co raz to bliższą formalnemu ujęciu analizę obserwacji, wyników rozumowań, różnych doświadczeń ucznia.

Program powinien to nie tylko umożliwiać, ale wyraźnie planować. W programie ustrukturowanym liniowo przewiduje się zwykle w jednym haśle wprowadzenie w jednej z najwyższych klas szkoły średniej pojęcia ciągłości funkcji. W praktyce oznacza to, że po krótkim przygotowaniu poglądowym, w którym wykorzystuje się wiele elementów zdobytej w poprzednich latach przez ucznia wiedzy i umiejętności, uczeń sterowany przez nauczyciela sam formułuje tę definicję /w nauczaniu problemowym/, albo ją otrzymuje gotową. W programie ustrukturowanym spiralnie takie przygotowanie jest rozłożone na wiele lat, hasło "ciągłość" pojawia się w różnych kontekstach, aby wreszcie wystąpić w postaci definicji ciągłości funkcji.

Program tak konstruowany ma strukturę wielowymiarową, jego analiza z punktu widzenia "zasady spiralności" wymagałaby badań w różnych jego wymiarach i przekrojach. Planowanie treści nauczania z punktu widzenia rozwoju, a nie jednorazowego "wprowadzenia" konkretnego pojęcia matematycznego, z uwzględnieniem różnych kontekstów i sposobów przechodzenia z jednego poziomu na drugi, aż do ewentualnej jego "legalizacji" w teorii przez jego definicję, jeszcze nie znalazło właściwego miejsca w pracach z dydaktyki matematyki. Projekty dydaktyczne dotyczące prematematycznego ujęcia pewnych treści ograniczają się zwykle do jednego poziomu lub do kilku początkowych etapów. Przyczynia się do tego także trudność w organizowaniu rozciągniętych na kolejne klasy całej szkoły eksperymentów weryfikujących takie propozycje dydaktyczne. W obecnej chwili problemy spiralnej struktury programu matematyki należałoby oświetlić dokładniej, przynajmniej od strony teoretycznej, i konkretyzować w alternatywnych propozycjach dydaktycznych, traktowanych choćby tylko hipotetycznie.

Innym problemem wymagającym teoretycznego opracowania i praktycznej realizacji jest zagadnienie integracji treści nauczania matematyki elementarnej. W tradycyjnych ujęciach matematyka elementarna rozpadała się na autonomiczne działy: geometrię, algebrę i trygonometrię. Bourbakistowski nurt reform z lat 1960-1970 wysunął jako jedno ze swych haseł postulat integracji materiału nauczania przez podstawowe struktury mnogościowe, algebraiczne, porządkowe i topologiczne. W toku realizacji koncepcji strukturalnej matematyki elementarnej popełniono jednak wiele błędów, między innymi integracja została tu potraktowana w praktyce szkolnej zbyt formalnie.

Problem takiego ujęcia metriału nauczania, aby uczeń rzeczywiście dostrzegał analogie i przez to także odkrywał "wszędzie obecne" struktury w swojej naiwnej matematyce i aby umiał z tego korzystać, jest ciągle jeszcze otwarty. Samo pojęcie integracji wymaga głębokiej analizy i sprecyzowania. Obserwacje ujawniają, że uczniowie ciągle jeszcze w matematyce "widzą wszystko osobno", jak "straszni mieszczanie" z wiersza Tuwima, i że programy i ich struktura takiemu widzeniu bardzo często sprzyjają. To samo obserwuje się i na wyższych poziomach kształcenia, co jest szczególnie niepokojące w studiach matematycznych przyszłych nauczycieli.

Do analizy treści i struktury matematyki elementarnej brak jest nam jeszcze operatywnych kategorii pojęciowych. Chodzi przy tym nie o kategorie ogólnodydaktyczne, jak "spiralność" czy "liniowość", ale o kategorie specyficzne /przykładem może być "integracja strukturalna" zwrot, którego znaczenie jest ściśle związane z matematycznym pojęciem struktury/. Analiza porównawcza różnych programów, opartych na różnych koncepcjach matematyki elementarnej, ułatwiłaby dostrzeganie i precyzowanie takich kategorii.

4. PROCES UCZENIA SIĘ MATEMATYKI

Dziecko uczy się matematyki nie tylko w szkole. Jest ona obecna w jego życiu codziennym, w kontakcie z dorosłymi, w grach i zabawach. Dziecko uczy się spontanicznie matematyki w wieku przedszkolnym, później także poza szkołą, bo nasz świat jest matematyką przeniknięty. Spontaniczna matematyka dziecka jest dziedziną penetrowaną głęboko przez psychologię szkoły J.Piageta.

Wielu współczesnych dydaktyków matematyki przyjmuje teorię rozwoju kognitywnego Piageta za podstawę własnych koncepcji dydaktycznych. Dydaktyka matematyki bada jednak proces uczenia się w jego związkach z procesem nauczania zorganizowanego, to jest jako proces uczenia się sterowany przez osobę lub grupę osób nauczających albo będących w bezpośrednim kontakcie z uczącym się /nauczyciel w klasie, w kole uczniowskim, w nauczaniu indywidualnym/, albo za pośrednictwem podręcznika, tekstu programowanego, lub w innej postaci /wykłady telewizyjne lub radiowe itp/. Znajomość specyficznego charakteru uczenia się matematyki jest warunkiem prawidłowego kształtowania nauczania, z drugiej jednak strony uczenie się jest w dużej mierze uwarunkowane sposobem nauczania. Dydaktyka matematyki nie izoluje tych dwóch procesów. Wydzielając tutaj sztucznie z jednego nurtu uczenia się - nauczania proces uczenia się, chcemy skoncentrować uwagę przede wszystkim na aktywności, na postawach, na trudnościach uczącego się.

Ogólne teorie uczenia się rozwijane w ramach różnych teorii psychologicznych i psychopedagogicznych odnoszą się zwykle do bardzo prostych procesów, podczas gdy w przypadku uczenia się matematyki mamy do czynienia ze zjawiskami szczególnie złożonymi i wymagającymi analizy także od strony samej matematyki. Niektóre z teorii psychologicznych oświetlają proces uczenia się matematyki w pewnych jego nurtach, żadna nie może jednak stanowić jedynej podstawy dla pełnej jego teorii.

Istotnym zwrotem w pracach w dziedzinie dydaktyki w ostatnich latach jest wyraźne ukierunkowanie wielu badań do poszukiwania odpowiedzi na pytania podstawowe w tej dziedzinie. Ograniczona jest jeszcze nasza wiedza o tym, na czym polegają specyficzne trudności w uczeniu się matematyki, co jest istotą i przyczyną błędu, co to znaczy, że uczeń opanował jakieś konkretnie określone pojęcie na danym poziomie, jaką rolę w procesie uczenia się matematyki odgrywa intuicja i wgląd, a jaką rozumowanie formalne itp. W stronę odpowiedzi na te i podobne pytania zorientowane są badania prowadzone często w interdyscyplinarnych grupach, z udziałem matematyków, dydaktyków matematyki, pedagogów, psychologów, informatyków i lingwistów, na materiałach ściśle treściowo związanych z matematyką szkolną, w rozmaitych jej specyficznych aspektach.

Aktywność uczącego się matematyki obejmuje:

1. Przejmowanie i asymilowanie informacji matematycznej przekazywanej mu w rozmaitych formach /wykład, książka, program, dyskusja, film matematyczny, diagram, graf itp./.

2. Ćwiczenie podstawowych elementarnych sprawności matematycznych /algorytmy, operacje logiczne, semialgorytmy, konstrukcje geometryczne/.

3. Rozwiązywanie typowych zadań z zastosowaniem podstawowych metod i technik matematycznych.

4. Redagowanie, zapisywanie, ilustrowanie schematami, kodowanie itp. matematycznych treści, ćwiczenie w posługiwaniu się matematycznym językiem w jego różnych formach.

5. Porządkowanie i pamięciowe utrwalanie poprzednio poznanej wiedzy.

6. Aktywność specyficznie twórcza wykraczająca poza wymienione wyżej czynności /dostrzeganie i formułowanie problemów,

konstruowanie i definiowanie nowych dla uczącego się pojęć, odkrywanie, formułowanie i dowodzenie twierdzeń, uogólnianie i specyfikacja, rozwiązywanie problemów w sytuacjach nietypowych, matematyzacja sytuacji pozamatematycznych itp./.

Wymienione rodzaje aktywności w rzeczywistym procesie uczenia się nie są oczywiście rozdzielone. Wprost przeciwnie, w każdym prawie ogniwie tego procesu występują w różnych funkcjach. W szczególności aktywności cytowane w punkcie 6 stanowią istotne elementy każdego etapu uczenia się matematyki. Na przykład korzystanie z informacji przekazanej przez matematyczny tekst wymaga od uczącego się twórczej współpracy z autorem, uzupełniania skrótów, interpretowania definicji przykładami, ilustrowania omawianych sytuacji rysunkami, tabelami, diagramami, odformalizowania tekstu, odczytania tekstu symbolicznego werbalnie, lub na odwrót, przekładu języka werbalnego na język symboliczny itp. Bez tych wszystkich zabiegów rozumne uczenie się z pomocą podręcznika szkolnego jest niemożliwe.

Tak więc przekaz informacji matematycznej może odegrać instruktywną rolę w procesie uczenia się matematyki, jeżeli jest on odbierany z aktywnością /w dużej mierze nawet twórczą/. Znajomość tego procesu jest więc bardzo ważna dla podejmowania odpowiednich zabiegów dydaktycznych ze strony nauczyciela. Dopiero w ostatnich latach zwrócono na to uwagę, podejmując /jeszcze bardzo nieliczne i fragmentaryczne / badania na ten temat; można w nich wyróżnić następujące nurty:

1. A n a l i z a j ę z y k a m a t e m a t y k i i specyficznych cech tekstu, bądź bezpośrednio przekazującego matematyczne informacje /rozprawy i monografie naukowe/, bądź dydaktycznie ukierunkowanego na sterowanie aktywnością uczącego się za pomocą tego tekstu /podręczniki, teksty programowane/; porównawcze analizy różnych tekstów prezentujących tę samą treść, co wymaga precyzowania pewnych kategorii opisu takich tekstów. Przez tekst matematyczny rozumiemy tu tekst słowny i symboliczny wraz z elementami ikonicznymi /rysunki, grafy, wykresy itp./. Bardzo instruktywna dla dydaktyka matematyki jest wiedza o historycznym rozwoju języka matematyki /np. rewolucyjna rola symboliki/.

2. B a d a n i a d i a g n o s t y c z n e mające na celu ujawnienie, jak czytają i interpretują tekst matematyczny uczący się na różnych poziomach matematycznego kształcenia. Badania te z jednej strony pozwalają dostrzec i zarejestrować indywidualne techniki, stosowane przez bardziej sprawnych i mających większe doświadczenie w samodzielnym uczeniu się czytelników, z drugiej — odsłaniają specyficzne trudności, błędy, blokady, często zupełną nieudolność w interpretowaniu matematycznego tekstu oraz tego przyczyny, które polegają na nieopanowaniu pewnych technik, koniecznych przy korzystaniu z naukowego tekstu oraz tkwią w samej matematycznej materii i w ogólnym stylu przekazywania matematycznej informacji.

Badania diagnostyczne mają również na celu ujawnienie, jaką rolę dla uczącego się pełnią różne elementy matematycznego języka /werbalne, symboliczne, ikoniczne/. W szczególności brak jest badań na temat funkcji koloru, tak bardzo eksponowanego w nowoczesnych szkolnych podręcznikach, jako istotnego elementu języka matematyki szkolnej, także w roli reprezentacji ikonicznej. Ten ostatni przykład ilustruje pewną prawidłowość w stosunku teoretycznych projektów i praktyki dydaktycznej do badań empirycznych. Wprowadzenie koloru, jako elementu języka matematyki szkolnej, jest rezultatem inwencji dydaktycznej; pomysł został entuzjastycznie przyjęty przez praktykę szkolną i szeroko upowszechniony. Ale brak jest zarówno analiz teoretycznych, jak i badań empirycznych, które ujawniłyby różne funkcje koloru w rozumieniu, interpretacji i wykorzystaniu w zastosowaniach informacji przekazanej przez tekst. Ta wiedza jest zaś konieczna dla racjonalnego dydaktycznego "gospodarowania" kolorem w matematycznym tekście przeznaczonym dla ucznia. Jak dotąd jest to oparte tylko na intuicjach pedagogicznych, potrzebna jest jednak ich weryfikacja empiryczna.

Pewne badania diagnostyczne zarysowały istnienie zależności rozumienia matematycznego tekstu słownego od jego gramatycznej formy /np. twierdzenie sformułowane w formie "czynnościowej", orzekającej, warunkowej/, etapy i poziomy rozumienia tekstu itp. Wszystko to znajduje się jednak dopiero w początkowym stadium i nie może jeszcze stanowić podstawy do istotnych uogólnień.

3. Prace o charakterze normatywnym: formułowanie zasad "dobrej roboty" i techniki korzystania z matematycznego tekstu, opracowanie metodyki nauczania tych technik na różnych poziomach kształcenia, weryfikacja empiryczna skuteczności takiej metodyki; wnioski dotyczące redagowania tekstów w matematycznych podręcznikach dla różnych poziomów kształcenia.

Przedstawiłam jako przykład tylko zarys kompleksowego zagadnienia, które może i powinno być badane przez podejmowanie konkretnych prac dotyczących dobrze określonych szczegółowych, jasno sformułowanych problemów cząstkowych. Przykład ten ilustruje specyficzną dla dydaktyki matematyki integrację metod: teoretyczna analiza "surowca" matematycznego, kliniczne obserwacje indywidualne in vivo aktywności uczących się, badania masowe tego procesu za pomocą rozwiązywania przez uczniów zadań, w których trzeba stosować informacje zdobyte dzięki lekturze lub badania rozumienia tekstu za pomocą testów /przetwarzanie informacji, formułowanie treści w innej postaci itp./. Wreszcie eksperyment systematycznego uczenia technik czytania, interpretowania i korzystania z tekstu matematycznego, zarówno konwencjonalnego, jak i wyraźnie nastawionego na sterowanie procesem uczenia się.

Uczenie się matematyki jest uczeniem się też pewnego języka. Kompleks zagadnień opisany poprzednio, odnosił się do zdobywania informacji przekazywanej przez matematyczny tekst. Ale uczący się matematyki uczą się nie tylko rozumienia jej języka, ale też "mówienia" tym językiem. Wiadomo już z praktyki nauczania, jakie negatywne konsekwencje przynosi zbyt wczesne rygorystyczne zmuszanie dziecka do precyzji w wypowiadaniu własnych matematycznych myśli. Badanie naturalnego języka matematycznego dzieci klas początkowych i także naturalnego, spontanicznego przetwarzania się tego języka w procesie komunikowania się z innymi, rejestracja i analiza uparcie powtarzających się nieścisłości pewnego typu /między innymi typu logicznego/ u uczniów starszych i prób dotarcia do ich przyczyn /językowych lub pojęciowych/, charakterystyka poziomów ścisłości dostępnych uczniom w różnym wieku itp. - ta cała dziedzina problemów ciągle jeszcze pozostaje otwarta dla badań dydaktyki matematyki, ważnych nie tylko dla teorii uczenia się i nauczania matematyki, ale bezpośrednio także dla praktyki szkolnej.

W centrum uwagi dydaktyków znajduje się uczenie się matematycznych pojęć, szczególnie skomplikowane ze względu na ich specyfikę. Elementarne pojęcia matematyczne rozwijają się w początkowym stadium przez idealizację, schematyzację i interioryzację konkretnych doświadczeń dziecka w otaczającej go rzeczywistości. Ale akt abstrakcji prowadzi do szczególnej - nieznanej w innych przedmiotach nauczania - autonomii i hierarchicznego narastania tych pojęć.

Na przykład pojęcie kwadratu, boku i przekątnej kwadratu są dla ucznia nasycone obrazami i głęboko zinterioryzowanymi operacjami, których genezą są czynności rysowania, konkretnego mierzenia, wycinania z papieru, manipulowania materiałami strukturalnymi, przedmiotami codziennego użytku i innymi pomocami naukowymi. Są więc nasycone intensywnie treściami empirycznymi i wyobrażeniami. Odkrycie niewspółmierności przekątnej kwadratu i jego boku wynosi te pojęcia na zupełnie inny poziom; niewspółmierność przekątnej i boku kwadratu jest bowiem faktem formalnym nie mającym żadnego sensu empirycznego. Pojęcie kwadratu tak bliskie codziennemu doświadczeniu dziecka zyskuje przez to odkrycie szczególną autonomię. Okazuje się, że rozumowanie zmusza do zaakceptowania jego niespodziewanych i nie bezpośrednio intuicyjnych własności. Ta akceptacja - to przejście na wyższy już poziom rozumienia pojęcia kwadratu, na którym pierwotne intuicje wzbogacają się dzięki ich bardziej już formalnemu ujęciu. To samo dotyczy twierdzeń i metod matematycznych. Różne czynniki decydują o przechodzeniu z jednego poziomu na drugi, między innymi konflikty pojęciowe, sprzeczności, refleksja nad własnymi czynnościami wykonywanymi na niższym poziomie, próby przekazania innym ujętych na niższym poziomie matematycznych treści przez opis obiektów, relacji, operacji, dostrzeżenie analogii dwóch różnych sytuacji / na przykład gier/ i reprezentacja ich wspólnego schematu itp.

Istniejące już pewne teorie kolejnych poziomów uczenia się matematycznych struktur odnoszą się do szczególnych rodzajów pojęć lub do szczególnych sytuacji dydaktycznych. Dydaktyka matematyki stawia sobie za zadanie wypracowanie metod obserwacji umożliwiających ujawnienie tych "skoków" w procesie uczenia się sterowanym przez nauczyciela w normalnych warunkach pracy z uczniami w klasie.

Jeszcze jesteśmy w dużej mierze bezradni wobec tego typu problemów, nie umiemy uchwycić istotnych mechanizmów prowadzących do takich "skoków". Obserwuje się na przykład, że w jednym przypadku ujęcie pewnego pojęcia matematycznego jest uwarunkowane analizą i syntezą na tle wielu różnych sytuacji, w innym wystarcza jeden przykład paradygmatyczny. Nasza wiedza dotycząca prawidłowości tych procesów jest jeszcze niewielka. Niewiele nam pomagają też ogólne teorie psychologiczne, ponieważ te różne sytuacje są ściśle związane z jednej strony z matematyczną materią, z typem pojęć, z kontekstem, w którym występują itp., z drugiej zaś z indywidualnymi cechami wyobraźni i myślenia uczącego się.

W cytowanym poprzednio raporcie amerykańskim zwraca się uwagę na to, że istnieją duże różnice w zdolności do "myślenia przestrzennego" i "myślenia algebraicznego" u różnych uczniów, co ujawniają pewne obserwacje oraz sugerują także znane fakty dotyczące twórczości wybitnych matematyków. Raport podkreśla potrzebę prowadzenia badań na ten temat, które mogłyby rzucić także światło na różnice w procesie uczenia się matematyki przez różnych uczniów, na przyczyny indywidualnych trudności, do których często w praktyce nauczania nie umiemy dotrzeć.

Na poznanie specyfiki procesu uczenia się matematyki wiele światła rzucają - jakby od negatywnej strony - badania błędów uczniowskich. Rejestracja, statystyczna i jakościowa analiza oraz kategoryzacja błędów, stanowią niezwykle cenne źródło unformacji w tej dziedzinie. Błąd może wprawdzie być rezultatem tylko nieporozumienia, chwilowej nieuwagi, zapomnienia itp., ale bardzo często sygnalizuje istotną trudność lub nieprawidłowość w procesie uczenia się, mogącą prowadzić do poważnej blokady w matematycznym myśleniu ucznia. Ujawnienie i identyfikacja charakteru i przyczyn takich blokad - to także cały kompleks zagadnień istotnych dla dydaktyki matematyki.

Specyfika procesu uczenia się matematyki wynika także ze szczególnego w tym przypadku stosunku ujmowania p o j ę c i o w e g o i ujmowania a l g o r y t m i c z n e g o treści matematycznych. Zarówno przedwczesna algorytmizacja, jak i brak sprawności algorytmicznych mogą prowadzić do blokady w procesie uczenia się matematyki. W pierwszym przypadku wyeliminowanie znaczenia na rzecz automatyzmów uniemożliwia dalszy rozwój pojęć, rozumienie twierdzeń i ich stosowanie ze względu na hierarchiczną strukturę matematycznych treści, w której usunięcie jednej cegiełki rozumienia może ją całkowicie zdezorganizować. W drugim przypadku brak pewnych technik również utrudnia posuwanie się naprzód. Poszukiwanie optymalnych rozwiązań dydaktycznych jest problemem teorii i praktyki nauczania, ale poznanie roli elementów jakościowo-pojęciowych z jednej strony oraz algorytmicznych z drugiej w procesie uczenia się jest nieodzowne jako podstawa tych poszukiwań.

Interesujące badania wiążą się z indywidualnymi, zróżnicowanymi postawami uczniów wobec matematycznych problemów, z wpływem kontekstu, w którym zadanie zostało sformułowane, na stopień jego subiektywnie odczuwanej przez ucznia trudności i sposób jego rozwiązywania, z niebezpiecznym eliminowaniem przez przyswojone schematy tego, co nazywamy wglądem w matematyczny sens problemu i jego rozwiązywania, ze zjawiskiem "przetrenowania", z rozwojem heurystycznej aktywności uczącego się, itp.

Ważne pytania dotyczą uczenia się formalnych elementów matematycznej metody: Jak rozwija się poprzez kolejne etapy pojęcie matematycznego dowodu i jego związku z twierdzeniem począwszy od naturalnego argumentowania i przekonywania do rozumienia sensu logicznej dedukcji ? Jak rozwija się poprzez kolejne etapy pojęcie definicji od naturalnego wyjaśniania i swobodnego opisu obiektu lub czynności do rozumienia roli definicji w matematycznej teorii ? Na jakim poziomie nauczania ten ostatni etap jest osiągalny ? Badania ujawniają w tej dziedzinie istotne nieporozumienia u większości uczniów kończących szkołę średnią. Jaką rolę w kształtowaniu tych pojęć odgrywa uczenie się matematyki w zespole, dyskusja, przekazywanie innym własnych pomysłów, wątpliwości, krytyka wypowiedzi kolegów itp. ?

Bardzo szeroka i niełatwa problematyka wiąże się z badaniem motywacji, zainteresowań, uzdolnień matematycznych, różnic w sposobie i tempie uczenia się w zależności od tych czynników. Samo pojęcie zainteresowania matematyką wymaga bliższego sprecyzowania i pewnej kategoryzacji na podstawie obserwacji tego, czym w szczególności uczący się interesują. Nieliczne jeszcze sondaże ujawniają w tej dziedzinie zasadnicze różnice u różnych "zainteresowanych" matematyką /lub tylko jej fragmentami/ w mniemaniu uczniów lub nauczycieli. Inny sens ma to pojęcie, gdy je rozważamy w stosunku do dziecka w klasach początkowych, inny u ucznia kończącego szkołę średnią, bardziej już świadomego, czym jest matematyka, choć i tu można zaobserwować jeszcze wiele nieporozumień.

W coraz szerszym zakresie prowadzi się badania na temat uczenia się przez uczniów poszczególnych pojęć, struktur, strategii, metod matematycznych itp. w toku paramatematycznych zabaw i gier. Istnieją już pewne fragmenty teorii w tej dziedzinie /Dienes, 1970 a, 1970 b/, ale badania szczegółowe oświetlają proces uczenia się matematyki w toku gry w coraz to nowych jego aspektach.

Naszkicowane tu przykładowo zagadnienia oczywiście nie wyczerpują problematyki związanej z procesem uczenia się matematyki; ta problematyka jest stale otwarta, obserwacja ujawnia bowiem reakcje uczniów często zupełnie niezrozumiałe, pozornie "alogiczne". Nasuwają się coraz to nowe, trudne pytania z takimi faktami związane. Jesteśmy świadomi, że nasza wiedza o hamulcach i stymulatorach w procesie uczenia się matematyki jest i będzie zawsze tylko przybliżona, tymczasowa, wymagająca ciągłych wielostronnych weryfikacji, nie tylko uzupełnień, ale nawet istotnych zmian w interpretacji obserwowanych faktów.

Badania wyników nauczania metodami testowymi i ich wnikliwe opracowania statystyczne sygnalizują często fakty alarmujące, ale nie wyjaśniają ich genezy. W jednym z ostatnich badań sprawności algebraicznych u amerykańskich uczniów okazało się na przykład, że zadanie "uprość ułamek $\frac{a^2}{a}$ " rozwiązało poprawnie 87% badanych, natomiast tylko 36% tych samych badanych rozwiązało poprawnie zadanie "uprość ułamek $\frac{a}{a^2}$ " /Ekenston, 1979/. Oto fakt obiektywnie stwierdzony i oczywiście nie przypadkowy. Jak go interpretować ? Jak rozumował uczeń, postępując w jednym przypadku poprawnie, w drugim niepoprawnie ? Co jest przyczyną błędu ? To, co tylko sygnalizuje wynik testu, można próbować wyjaśnić w toku bezpośredniej obserwacji pracy ucznia rozwiązującego takie zadanie, w toku rozmów z nim, wysłuchania jego wyjaśnień i przeprowadzenia wielu takich bezpośrednich wywiadów. W praktyce szkolnej pomija się to najczęściej. Test informuje nauczyciela, że wielu jego uczniów nie radzi sobie ze skracaniem ułamka $\frac{a}{a^2}$, choć skracają poprawnie ułamek $\frac{a^2}{a}$. Nauczyciel organizuje ćwiczenia korekcyjne. Uczniowie przestają

/czasem tylko przez pewien czas/ popełniać takie błędy. Ale to wcale jeszcze nie znaczy, że usunięto istotne nieporozumienie, jeżeli nie ujawniono, na czym ono polega. Może ono mieć charakter tak głęboko pojęciowy, tak ogólny, że pozostanie źródłem innych błędów pozornie nie mających nic wspólnego ze skracaniem ułamka.

Badania procesu uczenia się matematyki mają między innymi na celu docieranie do istoty takich nieporozumień, do istoty takich trudności oraz do ich przyczyn. D.Lunkenbein tak je charakteryzuje: "Badania w tej dziedzinie koncentrują się na uczącym się w toku rozwiązywania przez niego zadania lub wykonywania ćwiczenia matematycznego. Kluczem metodologicznym w tej dziedzinie jest opracowanie dynamicznego i strukturalnego protokołu. Jest to praca opisowa i normatywna. Badania te mają na celu strukturyzację i kategoryzację matematycznych zachowań i procesu matematycznego myślenia; usiłują wyjaśnić mechanizm aktywności uczącego się" /Lunkenbein, 1978/.

Każdemu dydaktykowi znane są jednak ogromne trudności związane ze sporządzeniem tego, co Lunkenbein nazywa dynamicznym i strukturalnym protokołem. Nie mniejsze trudności nasuwa interpretacja takiej dokumentacji. Ale mimo słabości naszych technik badawczych w tej dziedzinie nie możemy z tego rezygnować. Bez stałego, konsekwentnego przybliżania się do poznania procesu uczenia się matematyki, badania prowadzone w innych dziedzinach dydaktyki matematyki będą pozbawione istotnych elementów w ich podstawach.

Wiedzę o tym procesie zastępują ciągle jeszcze w tych badaniach pedagogiczne intuicje, nauczycielska praktyka, własne matematyczne doświadczenia, w pewnej mierze ogólne teorie psychologiczne i psychopedagogiczne. Ale to wszystko jest zawodne i niewystarczające. W praktyce szkolnej uznaje się, że uczeń "nie myśli", bo mówi lub pisze "byle co", podczas gdy, co ujawniają /ciągle jeszcze nieliczne lub zbyt powierzchowne/ sondaże, to "byle co" wcale nie musi być jednoznaczne z bezmyślnością, ale może mieć głębokie uzasadnienie /konflikt pojęciowy, trwałe wadliwe skojarzenia, identyfikowanie cech reprezentacji symbolicznej lub ikonicznej z własnościami reprezentowanego obiektu, fałszywa sugestia nazwy, symbolu itp./.

Znajomość tych różnych uwarunkowań myślenia, wyobraźni, intuicji uczącego się i ich możliwych skutków w matematycznej aktywności w konkretnych sytuacjach jest bardzo ważna dla praktyki szkolnej. Reakcja nauczyciela na pozornie nonsensowną postawę ucznia zależy bowiem w dużej mierze od tego, co on pod tym nonsensem potrafi dostrzec. Teoria dydaktyczna powinna szukać środków i metod docierania do istoty rzeczy w takich przypadkach.

H.Freudenthal słusznie podkreśla ogromne znaczenie takich sygnałów i konieczność prowadzenia wnikliwych badań ogólnych problemów uczenia się matematyki w tego rodzaju szczególnych, ale naturalnych sytuacjach, traktowanych paradygmatycznie.

Rośnie zainteresowanie problemami uczenia się arytmetyki przez uczniów klas początkowych, nie tylko dlatego, że to, co uczniowie z nauki w tych klasach w zakresie matematyki wyniosą, decyduje o ich dalszych "matematycznych losach", ale także dlatego, że w procesie uczenia się arytmetyki dostrzega się paradygmat dla procesu uczenia się matematyki w ogóle. Wiedza bowiem o uczeniu się tak fundamentalnych dla matematyki struktur liczbowych ma znaczenie ogólniejsze, wykraczające daleko poza granice samej arytmetyki. Wiele współczesnych prac badawczych skoncentrowanych na wąskich problemach prowadzi się właśnie w tej dziedzinie.

Obserwujemy dziś w dydaktyce matematyki na świecie zwrot w kierunku takich podstawowych badań na różnych poziomach kształcenia. Obserwujemy ten zwrot także tam, gdzie dominowały i dominują jeszcze metody rozwijane i stosowane w duchu behawioryzmu. Wielu ważnych zagadnień nie podejmowano, ponieważ nie można ich było formułować w standardowy, uznawany za jedynie naukowy sposób i badać metodami uznawanymi za jedynie obiektywne.

Amerykański dydaktyk matematyki J.Kilpatrick oceniając dorobek osiągnięty w tej dziedzinie w ostatnich latach w Stanach Zjednoczonych i porównując stosowaną tam metodologię badań z metodami stosowanymi przez dydaktyków i psychodydaktyków radzieckich, zauważa: "Radzieccy badacze traktują sceptycznie przydatność pisemnych testów jako źródła informacji o umiejętnościach uczniów. Wyżej cenią wywiad, dokładniej mówiąc, sekwencje wywiadów prowadzonych w dłuższym okresie i nie mają nic przeciw temu, aby prowadzący badania w ramach wywiadu nauczał w tym celu, by móc zaobserwować, czy i jak zmienia się rozumienie u ucznia. Powinniśmy się chyba zastanowić nad tym, czy nasze faworyzowanie obiektywnych testów nie zamyka nam ważnych dróg badań" /Kilpatrick, 1978, str. 284/.

Formułując ostateczne wnioski z analizy badań nad procesem uczenia się matematyki prowadzonych w Stanach Zjednoczonych Kilpatrick pisze: " 1. Trzeba stwierdzić, że od dłuższego czasu w tej dziedzinie rozwija się szeroka aktywność, przy czym punkt ciężkości przypada na badania dotyczące uczenia się pojęć. 2. Badacze starają się w większej mierze niż dawniej opierać swe prace na teoretycznych podstawach, przy czym teorie Brunera i Gagnego są przez nich uprzywilejowane. 3. Przeważają kontrolowane, laboratoryjne badania, ale ujawnia się już tendencja do badania uczenia się w warunkach szkolnych i prace radzieckie w tym kierunku mogą służyć jako wskazania do dalszych prac badawczych" /ibidem, str. 284/.

Charakteryzując tę dziedzinę problemów, podkreślałam kilkakrotnie, że wiedza, którą chcemy zdobyć przez ich rozwiązywanie, będzie zawsze tylko tymczasowa, fragmentaryczna, wymagająca stale uzupełnień i zmian w interpretacji faktów. Rejestracja tych faktów, ich opis i ich kategoryzacja według wyraźnie formułowanych kryteriów - to obiektywna baza tej wiedzy. W dydaktyce matematyki próbuje się na tej podstawie konstruować fragmenty teorii procesu uczenia się matematyki, teorii mającej w tym fragmencie znaczenie wprawdzie tylko hipotetycznego wyjaśnienia zarejestrowanych faktów, ale która stać się może podstawą do formułowania pewnych normatywnych hipotez dotyczących sterowania aktywnością uczącego się matematyki. Te hipotezy z kolei mogą być poddawane empirycznej weryfikacji w normalnych warunkach szkolnych. Bez stałego pogłębiania, weryfikowania, korygowania naszej wiedzy o procesie uczenia się matematyki, brak jest racjonalnych podstaw do normatywnej funkcji dydaktyki matematyki, konkretyzowanej w tak zwanych metodykach nauczania matematyki.

5. PROCES NAUCZANIA

Przez nauczanie rozumiemy organizowanie procesu uczenia się we wszystkich jego nurtach, sterowanie tym procesem w kierunku osiągania określonych celów, kontrolowanie i ocenę jego wyników. System uczenie się-nauczanie jest /zgodnie z terminologią cybernetyczną/

otwartym systemem cybernetycznym. Wydzielając sztucznie z nurtu uczenie się-nauczanie proces uczenia się matematyki, koncentrowaliśmy poprzednio naszą uwagę na uczniu, jego reakcjach, zachowaniach, trudnościach, etapach rozwoju jego matematycznej myśli itp. Wydzielając, również sztucznie z tego nurtu proces nauczania, chcemy skierować też naszą uwagę na działalność nauczyciela w jego kontaktach z uczniem, grupą uczniów, całą klasą. Badanie procesu nauczania ma na celu - między innymi - to, co niektórzy dydaktycy nazywają "racjonalizacją interwencji nauczyciela w proces uczenia się" /Lunkenbein, 1979/.

G.Polya twierdzi wprawdzie, że nauczanie jest sztuką /Polya, 1975, str. 292/, ale sztuka ma też swoją teorię i technikę. Polya w swoich przenikniętych głęboko ideami dydaktycznymi, powszechnie znanych książkach wyraźnie stawia sobie za jeden z celów analizę i kategoryzację heurystycznych postaw i zabiegów efektywnych w toku rozwiązywania problemów i tym samym, w pewnej mierze, racjonalizację takich postaw i zabiegów oraz pośrednio "racjonalizację interwencji nauczyciela", uczącego swych uczniów rozwiązywania matematycznych zadań. Zatem także G.Polya uznaje, że nauczanie jest wprawdzie sztuką, ale może być przedmiotem teorii i że uprawiania tej sztuki można i trzeba się uczyć.

Dydaktycy matematyki odwołują się często do różnych ogólnych systemów zasad nauczania oraz do różnych ogólnych modeli procesu nauczania lub konstruują sami własne takie systemy i własne takie modele. Najczęściej są to prace czysto teoretyczne, oparte na teoriach psychologicznych i psychopedagogicznych i na analizie matematycznego kontekstu /matematyka jako produkt, matematyka jako aktywność, matematyka w jej historycznym rozwoju/.

Istotną rolę w tych koncepcjach odgrywa klasyczna, choć rozmaicie formułowana zasada aktywnego i świadomego udziału ucznia w procesie nauczania. Teoretyczne i empiryczne prace poświęca się więc w dużej mierze poszukiwaniu takiego ujęcia matematycznych treści, takich metod i środków nauczania, aby tę zasadę można było skutecznie realizować. Wymaga to oczywiście dostosowania tego wszystkiego do kolejnych faz rozwoju intelektualnego ucznia oraz podstawowej wiedzy o procesie uczenia się matematyki.

W związku z tym pozostaje opracowywanie teoretycznych projektów dydaktycznych dotyczących treści, metod i środków nauczania matematyki, o czym już mówiłam w części 3.2. Te projekty mają różny charakter: tylko konstrukcja matematycznej treści lub także propozycja dotycząca treści i jej struktury, ale uzupełniona planem jej dydaktycznej realizacji /metody, środki, podręczniki, teksty sterujące pracą ucznia itp./ lub projekt oryginalnej pomocy naukowej z analizą jego matematycznej struktury i propozycję sposobu wykorzystania itp.

Badania empiryczne rozwijają się w kilku kierunkach i są prowadzone różnymi metodami. Między innymi zauważa się tendencję do organizowania badań mających na celu poznanie, analizę i możliwie obiektywny opis w pewnych teoretycznych kategoriach rzeczywistego procesu nauczania matematyki, obserwowanego *in vivo* w naturalnych warunkach w szkole z punktu widzenia wyraźnie określonych problemów /na przykład sposoby wprowadzania określonego pojęcia, sposoby kontroli rozumienia tekstu twierdzenia, formy organizowania zespołowego poszukiwania dowodu twierdzenia lub rozwiązania zadania itp./. Dydaktyka matematyki interesują przede wszystkim w takich sytuacjach reakcje na styku nauczyciel-uczeń.

Te badania wzbogacają teorię dydaktyczną w jej różnych aspektach. Przede wszystkim ujawniają istotne, sensowne problemy, którymi dydaktyka matematyki powinna się zajmować. To jest bardzo ważne dla rozwoju tej dyscypliny, która - ze względu na jej krótką jeszcze tradycję - musi się pilnie strzec przed podejmowaniem problemów, których pozorność i jałowość kryje się niejednokrotnie pod pseudonaukowym żargonem. Takie niebezpieczeństwo już się zarysowuje.

Badanie rzeczywistego procesu nauczania wzbogacają także dydaktykę matematyki pojęciowo, ponieważ zarówno przygotowanie obserwacji, jak i opracowanie uzyskanej dokumentacji wymaga pewnych ustaleń dotyczących kategorii, w których wyraża się plan badania i wyniki analizy, przy czym w rezultacie analizy pojawiają się często kategorie nowe, różne od wstępnie ustalonych. Nie można rozwijać teorii bez tworzenia specyficznych dla niej pojęć. Dydaktyka matematyki jako dyscyplina w początkowym etapie swego rozwoju nie jest jeszcze w tym zakresie bogata; jej pojęcia rodzą się i precyzują stopniowo w toku badań, między innymi także w toku obserwacji procesu nauczania i analizy uzyskanego w ten sposób materiału.

Obserwacja procesu nauczania matematyki w normalnych warunkach szkolnych ujawnia również błędy dydaktyczne będące źródłem tak szczególnie niebezpiecznych i częstych w toku uczenia się matematyki podstawowych nieporozumień pojęciowych. Z drugiej strony umożliwia wykorzystanie doświadczenia nauczycieli, którzy w praktyce we współpracy z uczniami znajdują niejednokrotnie rozwiązania trudnych problemów, zasługujące na ich rozważenie w dydaktycznej teorii.

Dla dydaktyki matematyki jest to rzeczywistość, którą trzeba poznawać w coraz to nowych jej aspektach. Szukać też trzeba efektywnych technik obserwacji, dokumentacji i metod analizy, niezbędnych dla pogłębiania i poszerzania tej wiedzy. Charakterystyczny zwrot w tym kierunku obserwuje się w Stanach Zjednoczonych. Po nieudanych i jałowych próbach konstruowania teoretycznych modeli nauczania matematyki przez specyfikację ogólnych modeli dydaktycznych, występuje wyraźna tendencja do rozpoczęcia takich prac od podstawowych badań skoncentrowanych na tym, co się dzieje rzeczywiście w praktyce nauczania matematyki /Kilpatrick, 1978, str. 274-280/.

Inny charakter mają badania prowadzone w celu empirycznej w e r y f i k a c j i projektu dydaktycznego. Pewne problemy wymagają zbadania wartości i wad takiej teoretycznej propozycji z różnych punktów widzenia: dostępność proponowanego ujęcia dla uczniów na danym poziomie nauczania, czas potrzebny na jego realizację, możliwość jego integracji w całość programu, możliwości jakie otwiera dla aktywizacji matematycznej ucznia, dla zastosowań, dla korelacji z innymi przedmiotami nauczania, trudności, jakie się z nim wiążą dla nauczyciela itp. Wstępna weryfikacja prowadzi często do korekty pierwotnego projektu i do ponownej próby w szerszej i bardziej reprezentatywnej populacji uczniów i nauczycieli.

Takie wielostopniowe badania, w dużej skali, są konieczne tam, gdzie projekt dydaktyczny ma stanowić podstawę dla całościowej lub fragmentarycznej reformy programów szkolnych i gdzie taką reformę racjonalnie się przygotowuje /przykładem może tu być ostatnia reforma nauczania matematyki w Węgierskiej Republice Ludowej/. Weryfikacja projektu dydaktycznego /niezależnie od jego zasięgu/

opiera się na zróżnicowanej dokumentacji: testy wiadomości i umiejętności, protokoły z konsekwentnej obserwacji procesu nauczania-uczenia się, protokoły z indywidualnych obserwacji uczniów w toku ich pracy, sprawdziany w postaci zadań, których rozwiązania analizuje się nie tylko ze względu na poprawność rozwiązania, ale także bardzo wnikliwie ze względu na sposób rozwiązania itp.

Inny typ badań empirycznych podejmuje się w celu p o r ó w n a n i a dydaktycznej efektywności projektów alternatywnych lub porównania dydaktycznej efektywności danego projektu z dydaktyczną efektywnością powszechnej praktyki /nauczanie tradycyjne, konwencjonalne/. Efektywność dydaktyczna projektu może być oceniana tylko ze względu na ścisłe, szczegółowo określone cele, które projekt ma realizować. Nie ma bowiem w nauczaniu rozwiązań globalnie optymalnych. Na przykład, porównuje się sprawność rachunkową uczniów klas początkowych uczonych według zmodernizowanych programów ze sprawnością rachunkową uczniów klas początkowych uczonych według programów w tradycyjnych, a nie "w ogóle" wyniki nauczania zmodernizowanego z wynikami nauczania tradycyjnego /Bauersfeld, 1973, str. 27-35/.

Są to badania bardzo trudne /jeżeli mają być rzetelne/ ze względu na mnogość parametrów, od których zależy proces nauczania-uczenia się i, co więcej, z których tylko niewielką część umiemy ujawnić i e x p l i c i t e precyzować. W uogólnianiu wniosków z takich badań trzeba więc zachować ogromną ostrożność. W wielu przypadkach wnioski te można traktować tylko jako "wzmocnione hipotezy" albo jako "dowody istnienia": w warunkach eksperymentu uzyskano takie oto wyniki, okazało się,że dany projekt dydaktyczny można było na danym poziomie zrealizować, że jedna koncepcja przyniosła w tym a tym zakresie lepsze rezultaty niż inne itp. Bardzo dokładna i głęboka krytyczna analiza tych warunków jest istotną częścią pracy badawczej, często jednak zaniedbaną. Pozorność dydaktycznej "optymalizacji", zakamuflowanej przez imponujący aparat statystyczny i pseudonaukowy często żargon, jest dziś bardzo ostro krytykowana /Freudenthal, 1973, 1978; Bauersfeld, 1980/. Parafrazując ironiczne wyrażenie Freudenthala można o tego rodzaju pracach powiedzieć, że reprezentują one "księgowość w dydaktyce matematyki".

W krajach, gdzie empiryczne badania w dziedzinie dydaktyki matematyki rozwinęły się już tak, że mówi się o "zalewie" dydaktyki matematyki takimi pracami i gdzie metody testowo-statystyczne od dłuższego czasu uznaje się za jedyne kryterium "naukowości" w tej dziedzinie, obserwujemy odwrót w kierunku poszukiwania innych metod umożliwiających lepszy wgląd w procesy uczenia się i nauczania matematyki oraz prowadzących do takich rezultatów badań, które można w bezpośredniej lub pośredniej postaci zastosować w praktyce szkolnej.

Kwestionuje się sens posługiwania się wyrafinowanymi środkami statystycznymi. Cytowany już poprzednio amerykański dydaktyk - J.Kilpatrick - stwierdza: "Fascynacja, którą wywierają na badaczy takie metody, jak analiza kowariancji, zdaje się zanikać w miarę jak uświadamiają sobie oni, że ich dane nie czynią zadość założeniom modeli" /Kilpatrick, 1978, str. 286/.

Chodzi o zachowanie sensownej relacji między zastosowaną aparaturą badawczą a wagą problemu i znaczeniem rezultatów badań dla teorii i praktyki nauczania matematyki oraz o wyeliminowanie pozorów obiektywności w przypadku, gdy warunki eksperymentu nie czynią zadość założeniom określonym przez metodę. Chodzi także o to, że przenoszenie bezkrytyczne metod stosowanych w naukach przyrodniczych do dydaktyki matematyki i stosowanie ich w badaniach procesów uczenia się i nauczania matematyki okazało się zawodne. F.Bauersfeld mówi nawet o pewnym skrzywieniu rozwoju dydaktyki matematyki, spowodowanym przez krępowanie autorów prac sztywnymi przepisami dotyczącymi tego, co jest "metodologicznie dopuszczalne" i hamowanie "metodologicznych heretyków" w poszukiwaniu innych dróg docierania do rzeczywistości tych procesów /Bauersfeld, 1980/.

W Polsce mamy jeszcze mało publikacji z badań opartych na metodach empirycznych w dydaktyce matematyki. "Zalew" typu amerykańskiego nam jeszcze nie grozi. Trzeba jednak od samego początku unikać błędów ujawnionych w doświadczeniach innych. Trzeba od początku szukać metod właściwych dla specyfiki zjawisk bez ulegania fascynacji metodami innych dyscyplin.

Problematyka związana z nauczaniem matematyki jest tak bogata i zróżnicowana, że nie próbuję jej tu nawet w zarysie omawiać: matematyczne testy, egzaminy, kontrola i ocena postępów ucznia, indywidualizacja nauczania w grupach heterogenicznych, nowe zagadnienia związane z udostępnieniem uczniom nowoczesnych minikalkulatorów, problem zastosowań matematyki w nauczaniu na różnych poziomach, nauczanie programowane lub oparte na innych tekstach sterujących pracą ucznia, problem integracji metod nauczania, modele i rola podręcznika matematyki na różnych poziomach kształcenia, środki techniczne, materiały strukturalne itp. - to wszystko jest jeszcze szeroko otwarte dla badań w dydaktyce matematyki.

Inną dziedzinę stanowią pierwsze próby teoretycznego modelowania procesu nauczania-uczenia się matematyki z uwzględnieniem teorii informacji, cybernetyki, lingwistyki i informatyki.

Na różnych poziomach wiekowych kształcenia matematycznego pojawiają się podobne problemy, jednak ich rozwiązania są różne. Stąd mówi się o dydaktyce matematyki w kształceniu dorosłych, o dydaktyce matematyki szkoły wyższej, o dydaktyce matematyki w szkołach specjalnych /niedawno rozpoczęto badania na ten temat/ itp. Szczególnie ważne i trudne problemy wiążą się z podstawowym i permanentnym kształceniem nauczycieli matematyki. Ponieważ dydaktyka matematyki jest jednym z przedmiotów takich studiów, można mówić o "dydaktyce dydaktyki matematyki".

Liczba publikacji związanych z problemami nauczania i uczenia się matematyki wzrosła w ostatnim dziesięcioleciu i wzrasta nadal na świecie w takim tempie i są one tak zróżnicowane ze względu na ich cele, na czytelników, do których są adresowane, na ich poziom, charakter naukowy lub popularny itp., że systematyczne śledzenie tej literatury i wydzielenie z niej tego, co może mieć wartość dla rozwoju dydaktyki matematyki jako dyscypliny naukowej, wymaga pracy zespołowej i nie jest już dziś możliwe dla indywidualnie pracującego dydaktyka matematyki.

Odczuwa się pilną potrzebę częściowych choćby syntez w postaci monograficznych opracowań rezultatów zakończonych już badań. Nie jest to łatwe, bo jak zauważa J.Kilpatrick, odwołując się przede wszystkim do doświadczeń amerykańskich: "Nie mamy jeszcze użytecznego systemu kategoryzacji badań, nie mówiąc już o możliwości wbudowania ich w jakąkolwiek strukturę. Jeżeli uporządkowanie jest podstawą zapamiętywania, to możemy słusznie twierdzić, że w dziedzinie badań z dydaktyki matematyki brak nam kolektywnej pamięci" /Kilpatrick, 1978, str. 271/. Bez "kolektywnej pamięci" zaś nie można rozwijać teorii, której celem jest - między innymi - poszukiwanie sensownych interpretacji dla poznawanych indywidualnych zjawisk.

Krytyczna dyskusja nad stanem dydaktyki matematyki jest świadectwem przechodzenia tej dyscypliny na wyższy poziom jej rozwoju. Istnieje już bogaty materiał do analiz, diagnoz i prognoz w tej dziedzinie.

LITERATURA CYTOWANA

BAUERSFELD, H., und WEIS, V.: Neue Mathematik und Rechenfertigkeit, Westermanns Pädagogische Beiträge 25 /1973/, str. 127-135.

BAUERSFELD, H.: Hidden dimensions in the so-called reality of mathematics classrooms, Educational Studies in Mathematics 11,1, /1980/, str. 23-41

BIGALKE, H. G.: Sinn und Bedeutung der Mathematikdidaktik, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik /1974/, str. 1-5.

BLOOM, B. S. i inni: Taxonomy of educational objectives, David Mc Kay Company, New York 1956.

DIENES, Z. P.: Logique et jeux logiques, OCDL, Paris 1970 a. Les six étapes du processus d'apprentisage en mathématique, OCDL, Paris 1970 b.

DRENCKHAHN, F.: Zur Didaktik der Mathematik und ihrer Wissenschaftsmethodik, Didaktik der Mathematik, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt /1978/, str. 3-18.

EKENSTAM, A. F. and NILSSON, M.: A new approach to the assesment of childrens mathematical competence, Educational Studies in Mathematics 10.1 /1979/, str. 41-48.

FREUDENTHAL, H. Mathematik als pädagogische Aufgabe, Klett, Stuttgart 1973.

- : Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht, Oldenburg-München-Wien 1978.

GRIESEL, H.: Die neue Mathematik fur Lehrer und Studenten, Hannower 1971.

- : Die mathematische Analyse als Forschungsmittel in der Didaktik der Mathematik, Beiträge zum Mathematikunterricht, Hannower 1972 str. 72-81.

IOWO: Five Years IOWO, Educational Studies in Mathematics 7.3 -/1976/, str. 189-367.

KILPATRICK, J.: Forschung auf dem Gebiet des mathematischen Lehrens und Lernens, Didaktik der Mathematik, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt /1978/, str. 268-294.

KLEIN, F.: Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus, Berlin 1908, 1909

KRYGOWSKA, A. Z.: Dydaktyka matematyki jako przedmiot studiów wyższych, Prace z Dydaktyki Szkoły Wyższej, Wyższa Szkoła Pedagogiczna w Krakowie, Kraków 1965.

- : Methodologie de l'enseignement des mathématiques, sujet d'étude au niveau supérieur, New Trends in Mathematics Teaching, UNESCO, Paris 1966, str. 202-218, oraz: Colloque Mathématique dans les Pays Europeens, Bucarest 1968, str. 435-448.

- : Métodologia invătămintului matematic-disciplina in universităte, Caiĕte de Pedagogia Moderna 3 /1971/, str. 68-86.

- : Methodologie des Mathematiksunterrichts als Studienobiekt an der Hochschule, Didaktik der Mathematik, Wissenschaftliche Buchgesellschaft /1978/, str. 117-125.

- : Mathematikididaktische Forschung an der padagogischen Hochschule Krakau, Beiträge zum Mathematikunterricht, Hannower /1972/, str. 117-125.

LENNE, H.: Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland, Stuttgart 1969.

LUNKENBEIN, D.: Qu'est-ce que la didactique de la mathématique ?, Faculté des Sciences, Université de Scherbrooke /1979/.

NACOMÉ /National Advisory Commitee on Mathematical Education/: Overview and analysis of school mathematics, grades K-12, Conference Board of Mathematical Sciences, 1975.

NEAPOLITAŃSKI, S.: Zarys dydaktyki matematyki, PZWS, Warszawa 1958,

POLYA, G.: Odkrycie matematyczne, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1975,

TOURNER, Y., NOEL, Y. et HONCLAIRE, B.: Liste d'objectifs épreuvres d'évaluation et outils de rattrapage en mathématique, Ministère de l'Education Nationale et de la Culture Française, Brukselles 1974.

URBAŃCZYK, F.: Zasady nauczania matematyki, PZWS, Warszawa 1960.
WINTER, H.: Über den Nutzen der Mengenlehre fur den Arithmetikunterricht, Die Schulwarte 25 /1972/, str. 10-40.
WITTMANN, E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts, Vieweg, Braunschweig 1975.

MAIN PROBLEMS AND TRENDS OF RESEARCH IN CONTEMPORARY DIDACTICS OF MATHEMATICS

Summary

After having discussed various opinions on the didactics of mathematics, the authoress defines this discipline as an autonomous though interdisciplinary field of research the problems which comprise both learning and teaching mathematics. Next, the authoress presents four main trends of this research, namely: /i/ the overall goals and the objectives for mathematical education /the taxonomies, the operalization/, /ii/ the research on the border of mathematics and its didactics /the analysis of mathematical material and mathematical methods, the elementarization and the didactic project, the contents of teaching and their structure/, /iii/ the process of learning mathematics /the activity of a learner, examples of problems: learning the language of mathematics, the role of a mathematical text in learning, learning notions, a particular gift for spatial or algebraic thinking, error analysis, conceptual and algorithmic treatment of mathematical contents,development of formal elements, context and the difficulty of a problem solving, types of interests, the role of games, paradigmatic cases, learning arithmetic as a paradigm of learning mathematics in general, the necessity of developing an observation methods/, /iv/ the process teaching /rationalization of teacher's interference, means of checking an actual didactic process in normal classroom conditions, empiric verification of didactic projects, examples of problems/.

Since the results of research work in the field of didactics of mathematics are scattered in many different sources, the authoress finally stresses the necessity of their, partial at least, theoretical synthesis.