ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 19(1997)

Grzegorz Bryll, Robert Sochacki
Uniwersytet Opolski

O dwóch różnych pojęciach zbioru

Często spotyka się pogląd, że wiele błędów popełnianych przez uczniów i studentów związanych jest z trudnościami dotyczącymi tzw. specyfikacji. W pracy Z. Dybiec (1988) czytamy: „Bardzo charakterystycznym zjawiskiem zaobserwowanym wśród uczniów klas uniwersyteckich, innych także, również wśród studentów, jest wyraźny próg przy specyfikacji pojęć, twierdzeń, problemów, zadań — dla zbiorów, których elementami są zbiory". Z. Serafin (1988) rozróżnia dwa poziomy procesu specyfikacji: pierwszy — gdy pojęcia i twierdzenia badane są w ramach danej dziedziny matematycznej, drugi — gdy pojęcia i twierdzenia jednej dziedziny matematycznej specyfikujemy w innej dziedzinie lub w kilku innych dziedzinach. W pracy tego autora czytamy: „... doświadczenia (np. przedstawione przez Z. Dybiec) ukazują wiele trudności, zwłaszcza gdy chodzi o drugi z wyróżnionych przeze mnie poziomów specyfikacji. Świadome ujawnianie tych trudności, a nie ich unikanie w procesie dydaktycznym, oraz zabiegi zmierzające do ich twórczego przez uczniów (studentów) przezwyciężania, stanowią istotny element spiralnego podejścia do zdobywania przez uczniów wiedzy z danej dziedziny na coraz to wyższym poziomie jej rozumienia".

Sądzimy, że w nauce o zbiorach oprócz trudności specyfikacyjnych (m.in. nieodróżnianie typów logicznych poznawanych pojęć) pojawiają się równie duże, a może nawet większe, trudności związane z wieloznacznością terminu zbiór i wieloznacznością terminów pokrewnych.

Z. Krygowska w swoim podręczniku do geometrii (1968) pisze: „Przyjmuje się jako znane elementarne pojęcia i wiadomości o zbiorach i przekształceniu zbioru na zbiór oraz wiadomości arytmetyczne o liczbach rzeczywistych". Zauważmy, że wiadomości o zbiorach zaczerpnięte z języka potocznego raczej przeszkadzają w poprawnym kształtowaniu pojęć geometrycznych, zaś wiadomości teoriomnogościowe uczniów są na ogół bardzo ubogie.

W myśleniu wielu ludzi zakorzenione jest dwojakie rozumienie terminu zbiór:

— w sensie dystrybutywnym (teoriomnogościowym)

— i w sensie kolektywnym (mereologicznym).

Matematyka przyczynia się do kształtowania pojęcia zbioru w pierwszym sensie, zaś dziedziny empiryczne — w sensie drugim. Uczniowie, a nawet studenci, na ogół nie zdają sobie sprawy z różnicy między tymi pojęciami. Stąd też tak wiele błędów i niejasności pojawia się przy rozwiązywaniu zagadnień dotyczących zbiorów.

A. Mostowski w swojej monografii (1948, s. 85) pisze:

> Ostatecznie sens, jaki nadajemy słowu zbiór — jak i każdej nazwie — jest w znacznym stopniu kwestią umowy. Idzie o to, aby sens ten ustalić, gdyż w przeciwnym razie wyniknąć mogą nieporozumienia, nieuniknione wówczas, gdy tego samego słowa używamy w różnych znaczeniach. Istnieją systemy, w których twierdzi się, że zbiór pusty nie istnieje, a zbiór jednostkowy jest identyczny z jedynym swoim elementem. System taki stworzył m.in. polski logik S. Leśniewski (1886–1939).

Dodajmy, że oprócz mereologii Leśniewskiego (opisanej m. in. u Leśniewskiego (1927–1931; 1992) i Słupeckiego (1958)) istnieją różne i nierównoważne teorie zajmujące się zbiorami w sensie dystrybutywnym (zob. Kuratowski, Mostowski, 1966). Już w samej teorii mnogości w różnych jej ujęciach aksjomatycznych przez dodanie niektórych zdań niezależnych (np. dodanie hipotezy continuum) lub ich pomijanie (np. pominięcie pewnika wyboru) można zmieniać sens terminu *zbiór* (zob. np. Mostowski, 1968).

Przypomnijmy pokrótce różnice między dystrybutywnym i kolektywnym rozumieniem zbioru. A. Mostowski pojęcie **zbioru w sensie dystrybutywnym** wiąże z pojęciem własności przedmiotów, pisząc (Mostowski, 1948):

> Każda własność przedmiotów wyodrębnia ze zbioru pełnego pewien na ogół inny zespół przedmiotów, mianowicie zespół tych przedmiotów należących do zbioru pełnego, które tę własność posiadają. Takie zespoły przedmiotów nazywamy zbiorami. Pojęcie zbioru utożsamiamy zatem z pojęciem własności w tym sensie, że wyrażenie:
>
> *przedmiot x ma własność X*
>
> uważamy za równoznaczne z wyrażeniem:
>
> *przedmiot x należy do zbioru X.*

A. Mostowski pisze dalej:

> Utożsamianie pojęć zbioru i własności jest celowe wówczas, gdy ograniczamy się tylko do rozpatrywania przedmiotów należących do ustalonego raz na zawsze zbioru pełnego 1.

O zbiorze pustym mówi Mostowski następująco:

> Zbiór pusty odpowiada własności, nie przysługującej żadnemu przedmiotowi spośród elementów zbioru pełnego. [...] Jeśli np. zbiór pełny 1 składa się z liczb rzeczywistych, to własność wyrażona nierównością $x^2 < 0$ jest pusta.

L. Borkowski mówiąc o dystrybutywnym rozumieniu zbioru używa operatora abstrakcji i wiąże go z symbolem należenia $\in$ następująco (Borkowski, 1970):

$$y \in \{x : W(x)\} \Leftrightarrow W(y). \tag{1}$$

Przedmiot y jest więc elementem zbioru tych x, które mają własność W wtedy i tylko wtedy, gdy przedmiot y ma własność W. Podobne wyjaśnienia podaje R. Suszko pisząc:

> Rozpatrywany w teorii mnogości stosunek należenia elementu do zbioru odpowiada związkowi jaki zachodzi pomiędzy przedmiotami a gatunkami, do których przedmioty te należą, względnie przedmiotami a cechami, przysługującymi tym przedmiotom. A zatem zbiory w sensie dystrybutywnym to tyle mniej więcej, co gatunki, rodzaje czy typy przedmiotów, względnie cechy czy własności traktowane w oderwaniu, jako samodzielne przedmioty abstrakcyjne. (Suszko, 1965)

Dla zbiorów w sensie dystrybutywnym sprawdza sie naczelna zasada teorii mnogości, która głosi: Elementami zbioru N-ów są N-y i tylko N-y.

Tak więc terminami równoznacznymi lub bliskoznacznymi dla terminu *zbiór* w sensie dystrybutywnym są: *mnogość, zbiorowość, zespół, cecha, rodzaj, typ, gatunek, własność*. W teorii mnogości spełnione są m.in. warunki (Majcher, 1974):

— zbiór jest przedmiotem abstrakcyjnym,
— istnieje zbiór pusty,
— zbiór jednostkowy jest różny od wyznaczającego go elementu,
— relacja należenia elementu do zbioru nie jest przechodnia,
— na ogół podzbiór zbioru nie jest jego elementem,
— zbiór i jego zbiór potęgowy na ogół różnią się.

Zbiór w sensie kolektywnym (mereologicznym) jest całością złożoną z pewnych przedmiotów traktowanych jako jej części (greckie *meros* znaczy część). R. Suszko w pracy z 1965 r. pisze: „W przypadku zbiorów w sensie kolektywnym elementy to tyle mniej więcej, co części, fragmenty, składniki, kawałki, itp.". Twórca mereologii S. Leśniewski przyjmuje, że relacja „bycia częścią" jest porządkiem, tzn. jest zwrotna, antysymetryczna i przechodnia (podobnie jak relacja inkluzji w teorii mnogości). Własności tych nie ma relacja należenia elementu do zbioru. Terminami równoznacznymi lub bliskoznacznymi dla terminu *zbiór* w sensie mereologicznym są: *całość, agregat, kompleks, konglomerat, zlepek* itp. W sensie mereologicznym używamy słów tłum, las, ul, klasa społeczna.

W mereologii spełnione są m. in. warunki (Majcher, 1974):

— nie istnieje zbiór pusty,

— zbiór jednostkowy jest identyczny ze swoim elementem,

— relacja bycia częścią (elementem) jest przechodnia,

— zbiór przedmiotów materialnych jest zbiorem materialnym,

— podzbiór zbioru jest także elementem tego zbioru,

— zbiór przedmiotów jest równy rodzinie zbiorów tych przedmiotów.

Bardzo trafny jest następujący przykład zbioru w sensie kolektywnym, podany przez R. Suszkę (Suszko, 1965): terytorium Polski traktować można zarówno jako zbiór wszystkich województw polskich, jak i zbiór wszystkich gmin polskich. Spełnione są przy tym warunki:

a) każde województwo polskie jest częścią (elementem) terytorium Polski,

b) każda gmina polska jest częścią (elementem) pewnego województwa polskiego,

c) każda gmina polska jest częścią (elementem) terytorium Polski.

W sensie dystrybutywnym dwa zbiory są równe wtedy i tylko wtedy, gdy należą do nich te same elementy. W tym sensie zbiór wszystkich województw polskich jest innym zbiorem niż zbiór wszystkich gmin polskich. L. Borkowski zauważa, że gdyby w równoważnosci (1)

> interpretować symbol $\{x : W(x)\}$ jako zbiór w sensie kolektywnym, zaś symbol $\in$ jako „jest częścią" (w sensie potocznym), otrzymalibyśmy wyrażenie fałszywe. Nie jest bowiem prawdą, że każda część zbioru (w sensie kolektywnym) przedmiotów o własności W posiada własność W. Np. nie jest prawdą, że noga stołu będąca częścią stołu jest stołem. (Borkowski, 1970)

Zaproponowana przez K. Kuratowskiego teoriomnogościowa definicja pary uporządkowanej (Kuratowski, 1921; Kuratowski, Mostowski, 1966):

$$< a,b >= \{\{a\},\{a,b\}\} \tag{2}$$

nie jest przydatna w mereologii, bowiem wobec obowiązującej tam równości $\{a\} = a$ otrzymujemy całkowicie nieoczekiwany rezultat:

$$< a,a >= \{\{a\}\} = a.$$

Majcher na podstawie badań empirycznych dochodzi do następującego wniosku (Majcher, 1974):

> Intuicja dyktuje uczniom często mereologiczne rozumienie terminu *zbiór*. W celu ugruntowania dystrybutywnego pojęcia zbioru trzeba zapoznać uczniów z przykładami zbiorów w obu znaczeniach. Konieczne jest przede wszystkim rozpatrywanie przykładów, w których wyraźnie widoczne są konsekwencje dwuznaczności terminów *zbiór* i *element zbioru* (różne pojęcia równości zbiorów, podzbioru, iloczynu zbiorów i zbioru jednoelementowego [...]).

Dla uczniów nieostre są różnice między pojęciami *należenia* ($a \in A$ – element a należy do zbioru A), *zawierania* czyli *inkluzji* ($A \subseteq B$ – zbiór A jest zawarty w zbiorze B) i *bycia częścią* ($a \leq b$ – a jest częścią b). Do zacierania różnic między wymienionymi pojęciami przyczynia się zastępowanie terminów teoriomnogościowych (iloczyn mnogościowy zbiorów, suma mnogościowa zbiorów, inkluzja czyli zawieranie się zbiorów) terminami z języka potocznego, sugerującymi mereologiczne rozumienie zbioru (*wspólna część zbiorów, przekrój, jest częścią zbioru, połączenie (złączenie) dwóch zbiorów, wchodzi w skład zbioru* itp.). Zauważmy, że jedna z metod kształtowania pojęcia ułamka posługuje sie ułamkiem jako *częścią całości*, co dodatkowo przyczynia się do rozwinięcia u uczniów intuicji mereologicznych.

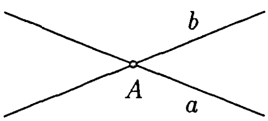
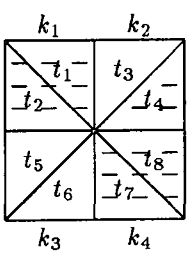
Wskazywanie błędów popełnianych przez uczniów przy rozwiązywaniu zagadnień na gruncie teoriomnogościowym może się okazać skuteczne dla ugruntowania pojęcia zbioru w sensie dystrybutywnym. W celu uzmysłowienia uczniom różnicy pomiędzy relacją należenia $\in$ i relacją inkluzji $\subseteq$ (w sensie dystrybutywnym) wskazane jest zaproponowanie następującego zadania:

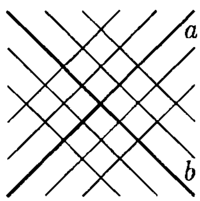
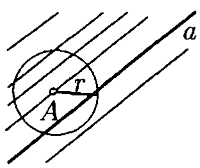
W danym wyrażeniu

Jeśli $A * B$ i $B * C$, to $A * C$

zastąpić każdą gwiazdkę przez dowolny z symboli: $\in$, $\subseteq$. Ile otrzymamy różnych wyrażeń? (Odpowiedź: 8). Które z nich są prawdziwe? Podać dowód lub kontrprzykład.

Na zakończenie naszych uwag związanych z pojęciem zbioru podajemy przykłady sformułowań uczniowskich, które są wadliwe w sensie teoriomnogościowym, poprawne zaś w sensie mereologicznym (przykłady pochodzą m.in. z prac Dybiec (1988) i Majcher (1974)).

Sformułowanie	Ocena sformułowania i uzasadnienie	
	w sensie teoriomnogościowym	w sensie mereologicznym
a	b	c
Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych, których kwadrat jest mniejszy od zera nie istnieje.	wadliwe: $\{x \in \mathbf{R} : x^2 < 0\} = \emptyset$ Zbiór liczb rzeczywistych o własności $x^2 < 0$ jest zbiorem pustym.	poprawne: W mereologii nie istnieje zbiór pusty.
Jeśli A jest zbiorem wszystkich liczb parzystych, zaś B – zbiorem wszystkich liczb nieparzystych, to liczba 2 należy do zbioru K, gdzie $K = \{A, B\}$.	wadliwe: Liczba 2 jest elementem zbioru A, nie jest zaś elementem zbioru dwuelementowego K (o elementach A i B).	poprawne: Liczba 2 jest częścią A (należy do A), zaś A jest częścią K (należy do K), zatem 2 jest częścią K (należy do K).
Dwie proste nierównoległe a i b przecinają się w jednym punkcie. 	wadliwe: $a \cap b = \{A\}$ Iloczyn mnogościowy jest zbiorem, nie zaś punktem.	poprawne: Punkt A jest częścią prostej a i częścią prostej b $(\{A\} = A)$.
Zbiór trójkątów zakreskowanych i zbiór kwadratów zakreskowanych nie są rozłączne. 	wadliwe: Niech $K = \{k_1, k_4\}$, $T = \{t_1, t_2, t_4, t_7, t_8\}$. Wtedy $K \cap T = \emptyset$. Zbiór K (kwadratów zakreskowanych) i zbiór T (trójkątów zakreskowanych) nie mają elementów wspólnych.	poprawne: Trójkąty zakreskowane t_1, t_2 są częściami kwadratu k_1, zaś trójkąty t_7, t_8 są częściami kwadratu k_4. Zbiór kwadratów zakreskowanych i zbiór trójkątów zakreskowanych mają część wspólną, a więc nie są rozłączne.

a	b	c
Różnica pomiędzy zbiorem punktów odcinka $\overline{AB}$ i zbiorem jego punktów wewnętrznych jest równa dwu punktom A i B.	wadliwe: $\overline{AB} \setminus \{P : P$ *jest punktem wewnętrznym odcinka* $\} = \{A, B\}$. Różnica jest zbiorem dwuelementowym $\{A, B\}$.	poprawne: Po odjęciu od odcinka $\overline{AB}$ jego części wewnętrznej otrzymujemy dwa punkty krańcowe A i B będące częściami odcinka $\overline{AB}$.
Iloczynem dwóch kierunków (a) i (b) jest cała płaszczyzna. 	wadliwe: $(a) = \{c : c \parallel a\}$, $(b) = \{c : c \parallel b\}$, $(a) \cap (b) = \emptyset$, gdy $\sim (a \parallel b)$, $(a) \cap (b) = (a)$, gdy $a \parallel b$. Kierunki (a) i (b) jako zbiory prostych równoległych są rozłączne, gdy $\sim (a \parallel b)$, zaś równe (a), gdy $a \parallel b$.	poprawne: Dowolny punkt płaszczyzny jest częścią pewnej prostej kierunku (a) i równocześnie częścią pewnej prostej kierunku (b), jest więc częścią wspólną tych kierunków (niezależnie od wzajemnego położenia prostych a i b).
Część wspólna okręgu $O(A, r)$ i kierunku (a) jest okręgiem $O(A, r)$. 	wadliwe: $O(A, r) = \{B : \|AB\| = r\}$, $(a) = \{b : b \parallel a\}$, $O(A, r) \cap (a) = \emptyset$. Iloczyn zbioru punktów (należących do okręgu) i zbioru prostych (należących do pęku) jest zbiorem pustym.	poprawne: Okrąg $O(A, r)$ i kierunek (a) są częściami płaszczyzny i mają część wspólną $O(A, r)$.

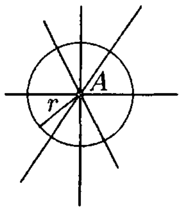
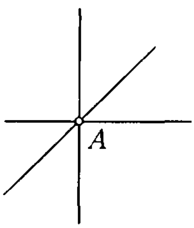
a	b	c
Część wspólna okręgu $O(A,r)$ i pęku (A) jest okręgiem $O(A,r)$. 	wadliwe: $(A) = \{a : A \in a\}$, $O(A,r) \cap (A) = \emptyset$. Iloczyn zbioru punktów (należących do okręgu) i zbioru prostych (należących do pęku) jest zbiorem pustym.	poprawne: Okrąg $O(A,r)$ i pęk (A) są częściami płaszczyzny i mają część wspólną $O(A,r)$.
Część wspólna płaszczyzny bez punktu A, tj. zbioru $\Pi \setminus \{A\}$ oraz pęku (A) jest zbiorem półprostych bez punktu A. 	wadliwe: $\Pi \setminus \{A\} = \{B \in \Pi : B \neq A\}$, $(A) = \{a \subseteq \Pi : A \in a\}$, $(\Pi \setminus \{A\}) \cap (A) = \emptyset$. Zbiór punktów $\Pi \setminus \{A\}$ i zbiór prostych pęku (A) są rozłączne.	poprawne: Płaszczyzna bez punktu A i pęk (A) mają część wspólną $\Pi \setminus \{A\}$, którą traktować można jako zbiór półprostych o początku w punkcie A, bez tego punktu.

Tabela 1

Literatura

B o r k o w s k i L.: 1970, *Logika formalna*, PWN, Warszawa.

D y b i e c Z.: 1988, O pewnej trudności związanej ze specyfikacją w nauczaniu matematyki, *Dydaktyka Matematyki* 8, 213–220.

K r y g o w s k a Z.: 1968, *Geometria, kl. II liceum ogólnokształcącego*, PZWS, Warszawa.

K u r a t o w s k i K.: 1921, Sur la notion de l'ordre dans la théorie des ensembles, *Fund. Math.* 2, 161–171.

K u r a t o w s k i K., M o s t o w s k i A.: 1966, *Teoria mnogości*, wyd. 2, Monografie Matematyczne, t. 27, PWN, Warszawa.

L e ś n i e w s k i S.: 1927–1931, O podstawach matematyki, *Przegląd Filozoficzny*, t. 30–34.
L e ś n i e w s k i S.: 1992, *Collected works*, vol. 1–2, PWN — Polish Scientific Publishers & Kluwer Academic Publishers, Warszawa.
M a j c h e r Z.: 1974, O rozumieniu przez młodzież podstawowych pojęć teoriomnogościowych, *Zeszyty Naukowe WSP w Opolu, Matematyka* 15, s. 87–107.
M o s t o w s k i A.: 1948, Logika Matematyczna, *Monografie Matematyczne*, t. 18, Warszawa – Wrocław.
M o s t o w s k i A.: 1968, Niesprzeczność i niezależność hipotezy continuum, *Wiadomości Matematyczne* 10, 67–179.
S e r a f i n Z.: 1988, Kilka uwag na marginesie artykułu Z. Dybiec „O pewnej trudności związanej ze specyfikacją w nauczaniu matematyki", *Dydaktyka Matematyki* 8, 221–223.
S ł u p e c k i J.: 1958, Towards a generalized mereology of Leśniewski, *Studia Logica* 8, 131–158.
S u s z k o R.: 1965, *Wykłady z logiki formalnej*, cz. I, PWN, Warszawa.

On two different concepts of set

S u m m a r y

In this paper we consider two different meanings of the notion of set. We justify, that the reasons of pupils' (students') mistakes related to solving problems of the theory of sets are not only problems connected with specification , but also those resulting from double understanding of the notion of set — in the distributive sense and in the mereological sense. There are some examples in pupils' formulations which are wrong in the distributive sense of set but are correct in the mereological sense of set.