ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 17(1995)

Henryk Kąkol
WSP Kraków

O rozumieniu zadań z rachunku prawdopodobieństwa

Wstęp

W latach 1986-90 w Wyższej Szkole Pedagogicznej w Krakowie realizowany był resortowy program badań podstawowych RP III 30. Rezultaty zostały opracowane i opublikowane w raporcie (Brydak, 1990). W ramach tej pracy przeprowadzne zostały, między innymi, badania wyników nauczania rachunku prawdopodobieństwa wśród studentów matematyki wyższych szkół pedagogicznych w Kielcach, Krakowie i Rzeszowie. Dotyczyły one problemu przygotowania studentów do nauczania w szkole elementów rachunku prawdopodobieństwa, a w szczególności miały na celu dać odpowiedź na pytanie:

> W jakim stopniu przyszli nauczyciele matematyki opanowali podstawowe wiadomości i umiejętności z zakresu szkolnego kursu rachunku prawdopodobieństwa?

W tym celu przeprowadzony został sprawdzian w oparciu o zestaw ośmiu zadań obejmujących program szkoły średniej. Poniżej lista zadań.

Sprawdzian z rachunku prawdopodobieństwa
(czas — 90 min)

1. Ktoś zaproponował mi taką grę: *Rzucę dwa razy kostką. Jeżeli wypadnie 7 lub 11 oczek w obu rzutach, to wygrasz 100 zł, jeżeli 5 lub 8 oczek, to przegrasz 100 zł. Każdy inny wynik uważa się za remisowy.* Czy zaproponowano mi korzystną grę?

2. Dana jest urna z trzema kulami o numerach 1, 2, 3. Eksperymentator losuje pojedynczo kule bez zwracania, licząc jednocześnie raz, dwa, trzy. Obliczyć prawdopodobieństwo, że numer wypowiedziany przez losującego nie pokryje się z numerem kuli wylosowanej przez niego.

3. Jakie jest prawdopodobieństwo, że Janek rzucając dwiema monetami uzyska więcej orłów niż Józek, który rzuca jedną monetą? Obydwaj chłopcy wykonują po jednym rzucie.

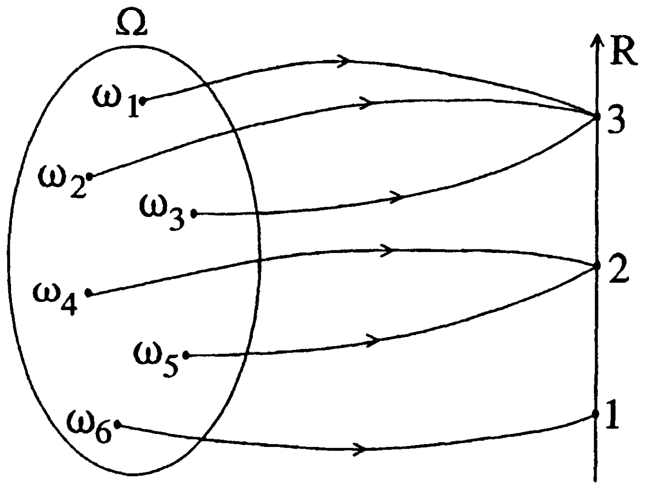
4. Gra polega na losowaniu kuli z jednej z dwóch urn, przy czym prawdopodobieństwo wyboru urny jest takie samo i wynosi 0,5. W pierwszej urnie jest jedna kula biała, w drugiej jedna biała i dwie czarne. Wylosowanie kuli czarnej oznacza wygraną. Czy jest to gra sprawiedliwa?

5. Dwóch meteorologów, niezależnie od siebie, przepowiada pogodę. Pierwszy meteorolog daje prawidłowe prognozy z prawdopodobieństwem 0,8, drugi z prawdopodobieństwem 0,7. Na dzień 8 listopada obaj opublikowali swoje prognozy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że co najmniej jeden meteorolog się pomyli?

6. W pudełku są ołówki: 10 czerwono-niebieskich, 3 niebieskie, 7 zielonych i 20 czerwonych. Jakie jest prawdopodobieństwo kreślenia na czerwono, jeżeli wiadomo, że wylosowany z pudełka ołówek rysuje na niebiesko?

7. Co jest bardziej prawdopodobne: uzyskanie 2 orłów w czterech rzutach monetą, czy 3 orłów w sześciu rzutach?

8. Zmienna losowa X zadana jest poniższym rysunkiem.



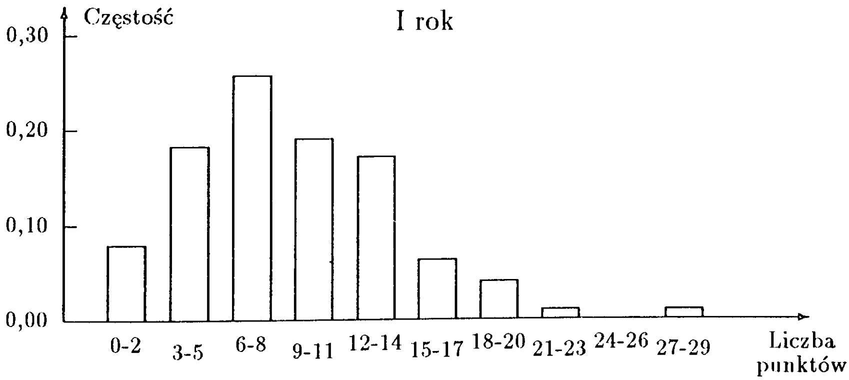
Prawdopodobieństwo w przestrzeni Ω określone jest wzorem:

$$p_i = P(\{\omega_i\}) = \frac{i}{21} \quad i = (1, \ldots, 6)$$

Obliczyć: a) $P(X = 1)$, b) $P(X > 2)$, c) EX, D^2X.

Sprawdzian pisali studenci I, III i V roku studiów. Wyniki studentów I roku miały z jednej strony pokazać, jaki jest aktualny poziom nauczania rachunku prawdopodobieństwa w szkole średniej, z drugiej, miały być płaszczyzną odniesienia dla wyników uzyskanych przez studentów III roku, którzy omawiany sprawdzian pisali w trakcie uczestniczenia w zajęciach z rachunku prawdopodobieństwa w swoich macierzystych uczelniach. Sprawdzian przeprowadzony na V roku miał na celu pokazać, z jednej strony, na ile są trwałe wiadomości zdobyte przez studentów w trakcie studiowania rachunku prawdopodobieństwa, z drugiej, uzmysłowić, jak duży jest zasób wiadomości i umiejętności, z którymi przyszli absolwenci pójdą do szkoły. Wszystkie sprawdziany zostały poprawione przez jedną osobę według specjalnie przyjętej punktacji.

W sprawdzianie przeprowadzonym na I roku uczestniczyło 122 studentów. Uzyskane przez nich wyniki przedstawia poniższy diagram (rys. 1) i tabela (tab. 1).



rys. 1

Na osi poziomej umieszczone są przedziały, w które zostały pogrupowane liczby punktów uzyskane w tym sprawdzianie przez studentów, przy czym maksymalna, możliwa do uzyskania liczba punktów wynosiła 37. Średnia uzyskanych punktów wyniosła 8,68.

Uzyskane wyniki można uznać za bardzo słabe. Niewątpliwie wpływ na taki stan rzeczy miały zadania 3, 5, 6 i 8, w których studenci I roku uzyskali najmniejszą liczbę punktów (zob. tab. 1).

Zadanie	1	2	3	4	5	6	7	8
Maksimum	4	5	6	6	5	4	3	4
Średnia	2	1,2	0,55	1,65	0,66	0,55	1,5	0,39
Brak rozwiązań	15	30	20	32	9	50	11	91

Tab. 1

Zilustrowane na grafie i przedstawione w tabeli wyniki pozwalają, wydaje się, na sformułowanie następujących wniosków:

— niezadowalające wyniki uzyskane przez studentów I roku, którzy na ogół należeli w szkole do uczniów najlepszych z matematyki, nasuwa uzasadnione podejrzenie, że ogólny poziom nauczania rachunku prawdopodobieństwa w szkołach średnich jest jeszcze niższy od uzyskanego w trakcie sprawdzianu;

— biorąc pod uwagę fakt, że 91 osób (74,6%) studentów I roku w ogóle nie zaczęło rozwiązywać zadania 8, można przyjąć za prawdopodobne, że ogólne przygotowanie matematyczne absolwentów szkół średnich pozostawia wiele do życzenia;

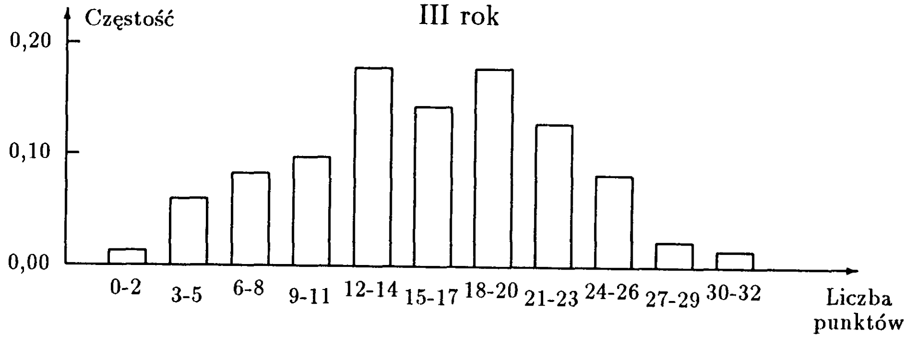
— wyniki zadania 6 i fakt, że aż 50 osób (40,1%) nie zaczęło go rozwiązywać, potwierdza powszechne odczucie, że prawdopodobieństwo warunkowe jest jednym z najtrudniejszych pojęć probabilistycznych;

— zadziwiająco najsłabsze spośród wszystkich zadań są wyniki zadania 3, najbardziej popularnego typu zadań z rachunku prawdopodobieństwa w szkole średniej (i nie tylko), co świadczyłoby o trudnościach, z jakimi borykają się uczniowie w trakcie uczenia się w szkole elementów rachunku prawdopodobieństwa;

— stosunkowo dobre wyniki zadania 1 świadczą, że w szkole preferowany jest model klasyczny prawdopodobieństwa i z tego zakresu rozwiązuje się najwięcej zadań.

W sprawdzianach przeprowadzonych na III i V roku brało udział odpowiednio 84 i 28 studentów. Uzyskane przez nich wyniki przedstawiają kolejne diagramy (rys. 2 i rys. 3) oraz umieszczone pod nimi odpowiednie tabele (tab. 2 i tab. 3).

III rok



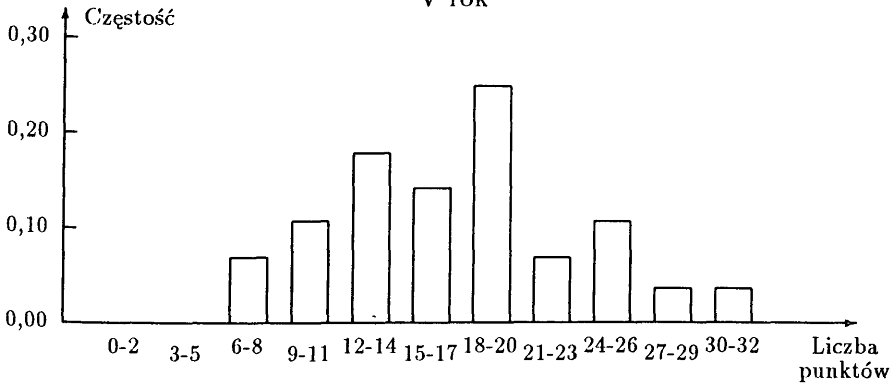
rys. 2

Średnia: 15.72

Zadanie	1	2	3	4	5	6	7	8
Maksimum	4	5	6	6	5	4	3	4
Średnia	2,33	2,56	1,26	2,89	1,25	0,85	2,01	1,39
Brak rozwiązań	2	7	9	10	19	18	6	16

Tab. 2

V rok



rys. 3

Średnia: 17.7

Zadanie	1	2	3	4	5	6	7	8
Maksimum	4	5	6	6	5	4	3	4
Średnia	2,21	2,42	1,86	12,93	1,78	1,71	1,79	2,10
Brak rozwiązań	0	3	1	2	4	1	0	5

Tab. 3

Analiza przedstawionych powyżej diagramów i tabel pozwoliła sformułować pewne uwagi i wnioski (zob. Brydak, 1990), z których jeden zasługuje na szczególne uwypuklenie.

> Chociaż wyniki uzyskane przez studentów III i V roku, którzy aktualnie przechodzili kurs rachunku prawdopodobieństwa lub go już ukończyli, są wyraźnie wyższe od wyników uzyskanych przez studentów I roku, to są także w dużym stopniu niezadowalające, znacznie odbiegające od spodziewanych na tym etapie matematycznego kształcenia.

Co znaczy zrozumieć treść zadania probabilistycznego?

Już w trakcie przygotowania raportu zrodziły się pytania, które stały się impulsem do dalszych badań:

— dlaczego uzyskiwane wyniki z rachunku prawdopodobieństwa na studiach nauczycielskich (być może innych też) są tak złe;

— jakie są tego przyczyny?

Aby znaleźć choćby przybliżoną odpowiedź na postawione pytania, przede wszystkim przeprowadzono dokładną jakościową analizę wszystkich rozwiązań zadania 3 znajdujących się w pracach studentów I roku. Dlaczego zostało wybrane zadanie 3 i na I roku? Wyniki uzyskane przez studentów okazały się tu bowiem nie tylko zaskakująco niskie, ale też porównywalne z wynikami uzyskanymi przez studentów III i V roku. Zdumiewa fakt, że studenci V roku, legitymujący się już wykształceniem prawie magisterskim, tak samo jak studenci I roku, najsłabiej radzili sobie z tym zadaniem. Także zupełnie zaskakujące wydaje się to, że niektórzy studenci III roku, którzy w momencie pisania sprawdzianu zajmowali się rachunkiem prawdopodobieństwa, rozwiązywali różne, czasami bardzo skomplikowane zadania, mieli kłopoty z rozwiązaniem tak prostego — wydawałoby się — zadania.

Przeprowadzona analiza wszystkich rozwiązań pokazała bardzo interesujące fakty.

- Tylko 7,37% studentów rozwiązało to zadanie poprawnie, a zaledwie 3,27% rozwiązało to zadanie przyjmując za doświadczenie losowe rzut trzema monetami i wypisując wszystkie (osiem) wyniki tego doświadczenia.

$$\Omega = \{ooo, oor, orr, oro, ror, roo, rro, rrr\}$$

$$n(\Omega) = 8$$

$$A = \{ooo, oor, orr, ror\}$$

$$n(A) = 4$$

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

- Niektórzy studenci (4,92%) popełnili w trakcie rozwiązywania tego zadania błąd, a mimo wszystko wynik uzyskali poprawny.

$$\{\Omega = ooo, oor, orr, oro, rro, rrr\}$$

$$n(\Omega) = 6$$

$$A = \{ooo, oor, orr\}$$

$$n(A) = 3$$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- Ponad połowa studentów (63,11%) rozwiązywała to zadanie w następujący sposób:

$$\Omega_1 = \{oo, or, ro, rr\} \qquad \Omega_2 = \{o, r\}$$
$$A = \{oo, or, ro\} \qquad B = \{o\}$$
$$P(A) = \tfrac{3}{4} \qquad P(B) = \tfrac{1}{2}$$

W tym momencie większość studentów porównywała otrzymane prawdopodobieństwa (P(A) > P(B)) i dawała odpowiedź, że Janek ma większą szansę uzyskania orła niż Józek. Zdarzały się także przypadki odejmowania, czy też dzielenia wyliczonych powyżej prawdopodobieństw.

- Aż 16,4% studentów w ogóle nie próbowało rozwiązywać tego zadania, pisząc jakże znamienne odpowiedzi:

Nie rozumiem treści zadania;

Nie wiem o co tu chodzi.

Przyjrzyjmy się bliżej przedstawionym wynikom zadania 3. Pozwoli to, być może, głębiej wniknąć w proces myślowy towarzyszący rozwiązywaniu tego zadania, poznać powody, dla których studenci popełniali określone błędy, wreszcie odpowiedzieć na pytanie, dlaczego nie próbowali rozwiązywać tego zadania, tłumacząc się jego niezrozumieniem.

Na wstępie spróbujmy zastanowić się nad następującymi pytaniami:

Co znaczy rozumieć treść zadania probabilistycznego?

Na czym polega akt zrozumienia takiego zadania?

W oparciu o to, co wiemy o rozwiązywaniu zadań tekstowych (zob. Krygowska, 1977), które w pewnym sensie są zbliżone do zadań z rachunku prawdopodobieństwa (oba typy zadań opisują pewien fragment rzeczywistości, w obu mamy odpowiedzieć na sformułowane tam pytania), oraz korzystając z wyników badań w zakresie dydaktyki rachunku prawdopodobieństwa (Major, Płocki, 1993; Płocki, 1991; Płocki, 1992) można dostrzec dwa różne aspekty tego zagadnienia:

- rozumienie opisanej w zadaniu konkretnej sytuacji i warunków, w jakich przebiega dane doświadczenie losowe:
- umiejętność dobrania do opisanego w zadaniu doświadczenia losowego odpowiedniego modelu probabilistycznego.

Analizując pod tym kątem fakt, iż prawie co piąty student (16,4%) zamiast rozwiązywać zadanie pisał, że nie rozumie jego treści, że nie wie, o co tu chodzi, można przypuszczać, że studenci ci nie potrafili zrozumieć opisanej w zadaniu sytuacji rzeczywistej, mieli kłopoty ze zrozumieniem warunków, w których przebiegało opisane doświadczenie losowe. Dlaczego? Może dlatego, że nigdy nie rzucali trzema monetami, nie obserwowali wyników tego, czy też podobnego doświadczenia losowego, a w związku z tym nie posiadali w swoim umyśle odpowiednio ukształtowanego modelu opisanej w zadaniu rzeczywistości, do którego to modelu mogliby odnieść uzyskane z zadania informacje. Może ten ostatni fakt nie pozwolił im przystąpić nawet do prób konstruowania rozwiązania, gdyż — jak pisze Bruner (1978, s. 18) —

> Konstruowanie rozwiązania jest zwykle procesem powtarzającym się; jego pierwszym etapem jest inferencyjne przejście od danych zmysłowych do hipotezy roboczej, utworzonej przez odniesienie otrzymanych informacji do posiadanego przez jednostkę wewnętrznego modelu świata, ukształtowanego na podstawie jej uprzednich doświadczeń. Drugi etap polega na sprawdzaniu, czy owa próbna hipoteza znajduje potwierdzenie w innych danych zmysłowych. W przypadku zgodności hipotezy i dalszych danych — hipotezę podtrzymuje się, w razie braku zgodności hipoteza zostaje zmieniona odpowiednio do stwierdzonej rozbieżności.

Wątpliwości jest więcej. Na przykład, jak należy rozumieć model wewnętrzny w rozważanym przypadku? Jaką ten model ma postać? Czy jest on doświadczeniem losowym polegającym na rzucie trzema monetami, czy może jednym z wyników tego doświadczenia, np. trójką (oor), a może zbiorem wszystkich możliwych wyników?

Drugim interesującym faktem jest to, że tak wiele osób (ponad połowa) rozpatrywało w tym zadaniu dwa odrębne doświadczenia losowe: jedno — rzut dwiema monetami, drugie — rzut jedną monetą. Dlaczego nie potrafiły te osoby połączyć ich w jedno doświadczenie: rzut trzema monetami? Jakie były tego przyczyny? Wydaje się, że wytłumaczenia tego faktu należy szukać w obydwu opisanych powyżej aspektach dotyczących rozumienia zadania z rachunku prawdopodobieństwa. Z jednej bowiem strony rozpatrywanie dwóch doświadczeń losowych zamiast jednego świadczy o braku umiejętności konstruowania modelu probabilistycznego adekwatnego do rozważanej w zadaniu sytuacji rzeczywistej. W każdym bowiem zadaniu probabilistycznym występuje tylko jedno, konkretne doświadczenie losowe, niestety często podawane w bardzo różnorodnej i skomplikowanej formie. Wobec tego, pierwszą i najważniejszą czynnością osoby rozwiązującej takie zadanie, pierwszym etapem algorytmu stosowanego przy rozwiązywaniu tego typu zadań (Kąkol, 1982), jest wyobrażenie sobie opisanego w zadaniu fragmentu rzeczywistości, zdanie sobie sprawy, jakie czynności i w jakiej kolejności powinny być wykonywane w tym doświadczeniu, a następnie jakie mogą być rezultaty rozpatrywanego doświadczenia losowego. Kolejne etapy to wypisanie wszystkich możliwych wyników doświadczenia losowego (zbioru zdarzeń elementarnych) oraz określenie szans pojawienia się odpowiednich wyników (przyjęcie pewnej funkcji, która każdemu zdarzeniu elementarnemu przypisuje jego prawdopodobieństwo). Z drugiej strony można odnieść wrażenie, że studenci rozwiązujący w ten sposób to zadanie nie do końca rozumieli opisaną w zadaniu rzeczywistość i umieli ją sobie wyobrazić, byli więc, być może, w podobnej sytuacji jak studenci, którzy w ogóle nie przystępowali do rozwiązywania tego zadania.

Warto jeszcze zwrócić uwagę na błędne rozwiązanie, w którym studenci przyjmowali za przestrzeń probabilistyczną zbiór składający się z sześciu jednakowo prawdopodobnych zdarzeń elementarnych. Widać tu wyraźnie, że u podstaw takiego rozumowania było przyjęcie następującego modelu probabilistycznego dla rzutu dwiema monetami:

$$\begin{array}{ccc} oo, & or, & rr \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$$

Tak więc studenci popełnili błąd odnoszący się do drugiego aspektu rozumienia zadania probabilistycznego, tzn. umiejętności konstruowania teoretycznie poprawnego, a zarazem adekwatnego do rozważanego doświadczenia losowego, modelu probabilistycznego opisującego rzut dwiema monetami.

Analiza rozwiązań zadania 3 pozwala, wydaje się, na sformułowanie następującej hipotezy:

> Warunkami koniecznymi do rozwiązania zadania z rachunku prawdopodobieństwa na poziomie szkolnym jest, z jednej strony, zrozumienie jego treści (opisanego w zadaniu doświadczenia losowego), z drugiej, posiadanie umiejętności tworzenia odpowiedniego modelu probabilistycznego doświadcznia losowego. Nie spełnienie choć jednego z tych warunków powoduje na ogół błędne rozwiązanie zadania.

Wykonywanie doświadczeń losowych a rozumienie zadań z rachunku prawdopodobieństwa

Przedmiotem dalszej części pracy będą wynikające z przeprowadzonej analizy pytania natury praktycznej.

> Po pierwsze, czy wykonanie określonych doświadczeń, na przykład przez rozgrywanie odpowiednio skonstruowanej gry, przed rozwiązywaniem danego zadania z rachunku prawdopodobieństwa, pomoże rozwiązać to zadanie?
> Po drugie, czy można zastąpić uciążliwe w klasie wykonywanie konkretnych doświadczeń losowych przez zastosowanie wideoscenek lub wykorzystanie komputera z odpowiednio napisanym programem?

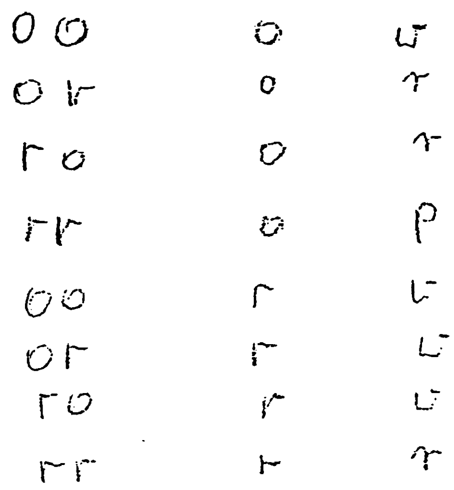
W celu znalezienia odpowiedzi na postawione wyżej pytania przeprowadzone zostały badania kliniczne i eksperymenty dydaktyczne. Były one organizowane w różnych przedziałach wiekowych, począwszy od uczniów w wieku 11 lat, a skończywszy na osobach w wieku dojrzałym. Brali w nich udział uczniowie szkoły podstawowej, studenci studiów matematycznych (stacjonarnych i zaocznych) — przed i w trakcie przechodzenia kursu rachunku prawdopodobieństwa, wreszcie osoby, które dość dawno ukończyły swoją szkolną edukację. Na potrzeby badań stworzona została gra probabilistyczna, nakręcona została specjalna wideoscenka oraz napisany został program komputerowy. Zarówno gra jak i wideoscenka oraz program komputerowy tematycznie związane były z zadaniem 3, ilustrowały jego treść.

W pierwszym badaniu brało udział dwóch uczniów szkoły podstawowej w wieku 11 i 14 lat.Gra została zorganizowana według następujących zasad. Uczeń dostawał dwie monety, badający jedną. Jako pierwszy rzucał monetami uczeń, potem osoba badająca. Wspólnie oglądali otrzymane rezultaty i uzgadniali wynik gry. Jeżeli uczeń uzyskiwał więcej orłów niż badający, wówczas wygrywał, w przypadku, gdy otrzymywali takie same liczby orłów (po jednym lub żadnego), był remis, natomiast w pozostałym przypadku wygrywał badający. Gra została powtórzona 10 razy, a wyniki zapisane w specjalnej tabelce (tab. 4).

Uczeń	Eksperymentator	Remis
IIII	III	III

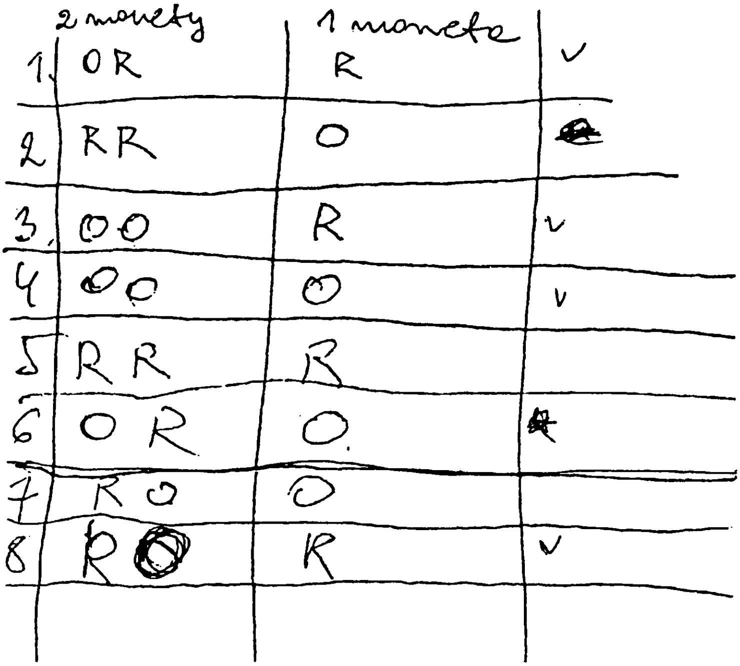
Tab. 4

Po przeprowadzeniu gry badający postawił uczniowi pytanie: *Czy potrafiłbyś ocenić szansę twojej wygranej w pojedynczej grze?* Uczeń bez trudności najpierw wypisał wszystkie możliwe wyniki (rys. 4), zaznaczył swoje wygrane, remisy i porażkę, a następnie odpowiedział: *W tej grze mam szansę wygrania pół na pół.* Badany uczeń (wiek 11 lat) nie spotkał się do tej pory w szkole z pojęciem prawdopodobieństwa.



rys. 4

Z drugim z uczniów (wiek 14 lat), który uczył się w szkole elementów rachunku prawdopodobieństwa przeprowadzona została taka sama gra. Następnie uczeń otrzymał to samo pytanie. Obok jego rozwiązanie (rys. 5). Przedstawione rozumowanie nasunęło podejrzenie, że uczeń w swoim rozwiązaniu przyjął takie samo założenie, jakie można znaleźć w znanym rozwiązaniu d'Alemberta. Rzeczywiście, w trakcie dalszej rozmowy wyjaśnił, że przy rzucie dwiema monetami mamy trzy możliwe wyniki — oo, or, rr i każdy z nich ma taką samą szansę pojawienia się, wobec tego przy rzucie trzema monetami możliwych wyników będzie — sześć, a szanse będą także takie same.

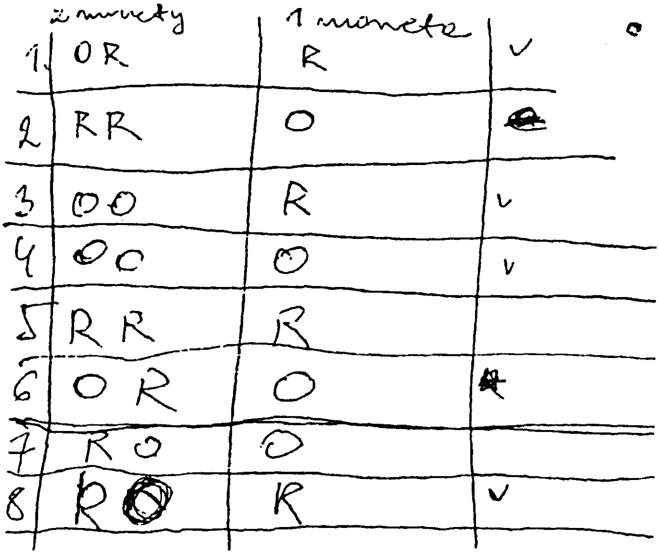


rys. 5

I jeszcze jedno spostrzeżenie. Pytani uczniowie stwierdzili, że nigdy do tej pory nie brali udziału, ani nie widzieli żadnej gry, w której używane byłyby dwie lub większa liczba monet.

Kolejne badania zostały przeprowadzone wśród 5 dorosłych osób legitymujących się wyższym wykształceniem, które w trakcie swojej edukacji nigdy nie przechodziły żadnego kursu rachunku prawdopodobieństwa. Osoby te poproszone zostały o rozwiązanie rozpatrywanego zadania, przy czym nie przeprowadzono z nimi wcześniej żadnych eksperymentów z monetami, nie dyskutowano też treści zadania. Pytane osoby absolutnie nie potrafiły na temat omawianego zadania powiedzieć niczego rozsądnego oprócz stwierdzenia, że Janek ma większą szansę wygrania niż Józek, ponieważ posiada dwie monety, a Józek tylko jedną. Wyjątkiem była tylko jedna osoba, która rok wcześniej uczestniczyła w grze w dwie monety opisanej w książce „Podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa i statystyki — propozycja dydaktyczna" (Kąkol, 1990). Osoba ta wręcz stwierdziła, że zadanie wydaje się jej proste i przedstawiła następujące rozwiązanie (rys. 6).

W rozwiązaniu widać pewne momenty wahania przy ustalaniu zbioru wszystkich możliwych wyników (6 czy 8 wyników — gruba kreska po 6 wyniku). Po krótkiej dyskusji na ten temat zadanie zostało poprawnie rozwiązane.



rys. 6

W eksperymentach dydaktycznych uczestniczyli studenci III roku matematycznych studiów zaocznych w Wyższej Szkole Pedagogicznej w Krakowie. W grupie 18 studentów została zorganizowana gra w trzy monety według tych samych co poprzednio zasad. Gra prowadzona była parami, otrzymane wyniki zapisywane w tabelkach, których kształt ustalili sami studenci. Po przeprowadzeniu gry dostali oni do rozwiązania cytowane powyżej zadanie. Otrzymane wyniki przedstawia tabela 5.

Typ rozwiązania	a	b	d
Liczba studentów	13	2	3

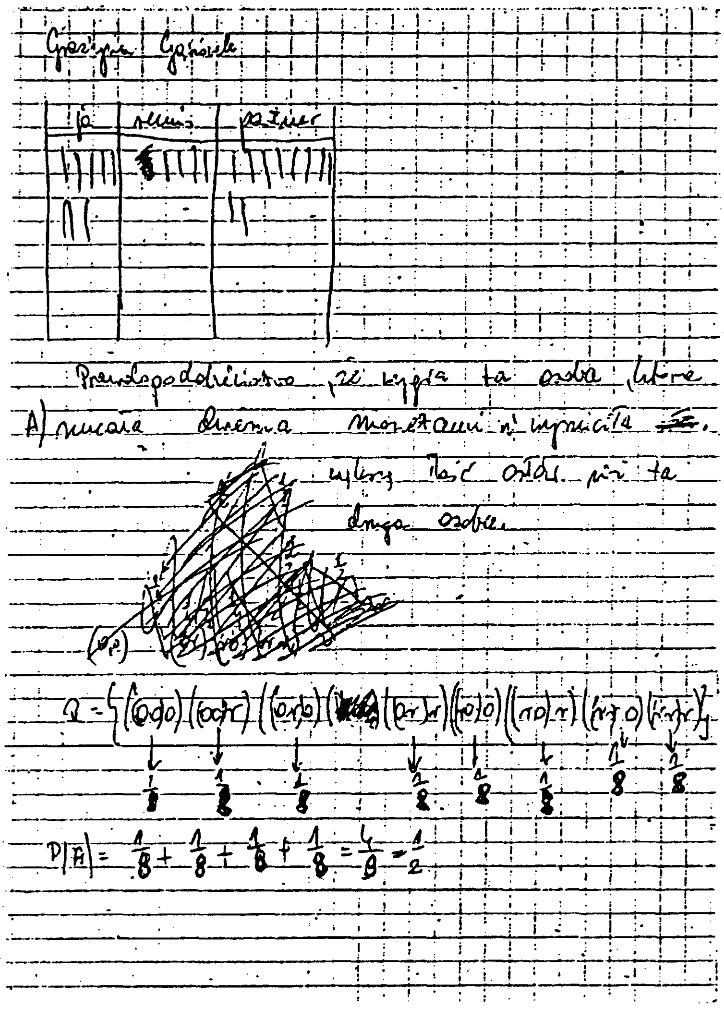
a – poprawne, 8 wyników

b – podano 6 wyników

d – różne błędy, w konsekwencji brak rozwiązania

Tab. 5

Analiza otrzymanych rozwiązań pokazała kilka ciekawych faktów. Po pierwsze, 13 poprawnych rozwiązań zawierało przestrzeń zdarzeń elementarnych składających się z 8 wyników. Po drugie, tylko w dwóch rozwiązaniach zbiór wszystkich wyników składał się z 6 elementów, przy czym w jednym z nich wypisany został poprawnie rozkład prawdopodobieństwa na tym zbiorze, co pozwoliło piszącemu rozwiązać prawidłowo to zadanie. Po trzecie, nie było żadnej osoby, która rozwiązywałaby to zadanie przyjmując dwie przestrzenie zdarzeń elementarnych i porównując prawdopodobieństwa uzyskania orła w każdej z nich. Po czwarte, każde z poprawnych rozwiązań zostało zapisane w zupełnie inny sposób, znacznie różniący się od tradycyjnego zapisu rozwiązań podobnych zadań. Obok jedno z takich rozwiązań (rys. 7).



rys. 7

Analiza rozwiązań uczniów, a także jednej z dorosłych osób wskazuje, że rozgrywanie gry, której uczestnicy mogli wykonać określone czynności, analizować je, zobaczyć wynik pojedynczego doświadczenia, obserwować różnorodne wyniki przy powtarzaniu gry pozwoliła im zrozumieć sens występującego w tej grze doświadczenia losowego. Świadczą o tym zapisane przez nich wyniki gry w postaci trójek, na przykład „rr o". Natomiast gra nie przyczyniła się do poprawnego skonstruowania przestrzeni probabilistycznej. Dwóch uczestników popełniło ten sam błąd co studenci w sprawdzianach (6 jednakowo prawdopodobnych wyników przy rzucie trzema monetami).

Osiągnięcie przez studentów studiów zaocznych wyników dużo wyższych od uzyskanych przez studentów studiów stacjonarnych potwierdza sformułowaną powyżej hipotezę o warunkach, które powinny być spełnione, aby z większą szansą można było rozwiązać zadanie z rachunku prawdopodbieństwa. Ci pierwsi rozwiązywali różnorodne zadania z tego zakresu, wiedzieli, że w tego typu zadaniach należy najpierw skonstruować przestrzeń probabilistyczną dla rozpatrywanego w zadaniu doświadczenia losowego, by potem móc odpowiedzieć na sformułowane w nim pytanie. Zrozumienie przez nich, na podstawie przeprowadzonej gry, sytuacji, w której przebiegało rozpatrywane doświadczenie losowe, było jak gdyby spełnieniem pierwszego z warunków powyższej hipotezy. A ponieważ ci studenci posiadali już umiejętność konstruowania przestrzeni probabilistycznej, więc wyniki, które uzyskali, były tak dobre.

Potwierdzeniem powyższych uwag mogą być także wyniki uzyskane przez osoby dorosłe, które wcześniej nie miały nigdy do czynienia z rachunkiem prawdopodobieństwa. Osoby te, nie mając żadnych doświadczeń z tego zakresu, prawdopodobnie nie mając w swoim umyśle żadnego modelu adekwatnego do rozpatrywanego w zadaniu doświadczenia losowego, nie wiedząc o tym, że do rozwiązania zadania probabilistycznego trzeba najpierw skonstruować przestrzeń probabilistyczną, nie potrafiły powiedzieć niczego rozsądnego na temat omawianego zadania.

Rola wideoscenek w procesie rozumienia zadań z rachunku prawdopodobieństwa

W trakcie nauczania rachunku prawdopodobieństwa nie zawsze istnieje możliwość przeprowadzenia pewnych doświadczeń losowych, a wykonywanie ich, w świetle opisanych badań, byłoby co najmniej bardzo wskazane. Okazuje się, że z dużym powodzeniem można zastąpić, uciążliwe w warunkach klasowych, wykonywanie doświadczeń losowych przez wideoscenki. Takie właśnie badania przeprowadzone zostały wśród studentów III roku matematyki studiów dziennych w Wyższej Szkole Pedagogicznej w Krakowie, Filia w Bielsku-Białej. W pierwszym etapie pokazana została studentom zarejestrowana na taśmie wideoscenka dwóch chłopców biorących udział w opisanej już grze w trzy monety. Chłopcy najpierw analizowali reguły gry, dyskutowali o szansach wygrania i przegrania, i aby dowieść swoich racji, powtórzyli grę 10 razy, zapisując otrzymane wyniki w tabelce.

W drugim etapie badań studenci rozwiązywali omawiane już zadanie. Tabela 6 podaje wyniki tego sprawdzianu.

	Liczba osób	a	b	c	d	e
I rok	20	8	3	6	3	—
II rok	20	3	15	2	—	—
Razem	40	11	18	8	3	—

a – wypisano wszystkie 8 wyników

b – wypisano 6 wyników

c – prawdopodobieństwo osobno dla Janka i Józka

d – różne błędy, w konsekwencji brak rozwiązania

e – brak prób rozwiązania zadania

Tab. 6

Uzyskane wyniki wskazują na kilka interesujących faktów. Zdecydowana większość studentów (70,25% — rubryki a+b) przyjęła za wynik trójkę, której elementami były „orzeł" i „reszka", czego nie robili studenci biorący udział w opisanym na wstępie sprawdzianie (Brydak, 1990), a nie było nikogo, kto nie próbował rozwiązywać tego zadania. Świadczy to o tym, że to właśnie pokazana na wideo scenka pozwoliła studentom pełniej zrozumieć opisane w zadaniu doświadczenie losowe, co w rezultacie pozwoliło im uzyskać znacznie lepsze wyniki od studentów studiów stacjonarnych biorących udział w opisanych na wstępie pracy badaniach (tabela nr 8).

Fakt, że prawie połowa piszących (45%) nie potrafiła poprawnie zapisać przestrzeni probabilistycznej, uważając, że składa się ona z sześciu jednakowo prawdopodobnych zdarzeń elementarnych, świadczy o braku umiejętności konstruowania przestrzeni probabilistycznej opisującej w sposób poprawny rozważane doświadczenie losowe.

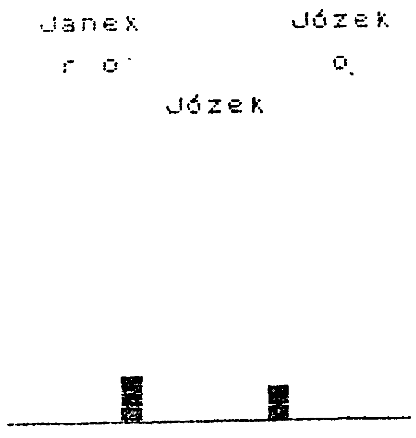
Zdumiewające, że aż 11 osób (29,75% — rubryki c+d) nie potrafło właściwie zinterpretować wyniku przeprowadzonego przez chłopców doświadczenia losowego, mimo że obserwowali jego przebieg, i to powtórzony kilka razy w obserwowanej grze.

Warto jeszcze zwrócić uwagę na różnice między wynikami uzyskanymi przez studentów I i II roku. Chociaż wszyscy studenci rozwiązywali to zadanie w tym samym czasie, a wcześniej jednocześnie także oglądali na wideo tę samą scenkę, osiągnięte przez nich wyniki są jakościowo różne, co szczególnie widoczne jest w kolumnach a i b. Studenci I roku prawdopodobnie w większym stopniu korzystali z wiadomości wyniesionych ze szkoły średniej (rachunek prawdopodobieństwa znajduje się w ostatniej klasie szkoły średniej, a badania były przeprowadzone na początku roku akademickiego). Natomiast studenci II roku, nie pamiętając już tych zagadnień ze szkoły średniej, w większym stopniu korzystali z oglądanej wideoscenki, a ponieważ gry i obserwowane wyniki nie sugerowały konieczności rozróżnienia między wynikami „or" i „ro" (wręcz przeciwnie, wyniki te uważali za równoważne, liczyła się bowiem w tej grze tylko liczba wyrzuconych orłów), prawie wszyscy przyjęli, że liczba wszystkich możliwych wyników w tym doświadczeniu będzie równa 6.

Czy komputer pomaga w zrozumieniu zadań z rachunku prawdopodobieństwa?

Wydaje się, a potwierdza to praktyka szkolna, że również komputer może pomagać uczącym się w zrozumieniu treści zadań z rachunku prawdopodobieństwa. W tym eksperymencie użyto specjalnego programu komputerowego, który nie tylko wyjaśnia przebieg gry, ale także może ją wielokrotnie symulować. Został on wykorzystany na lekcjach matematyki w dwóch klasach VI szkoły podstawowej, jak również na zajęciach ze studentami I i II roku matematyki. Lekcje w klasach VI przebiegały według tego samego scenariusza, co poprzednie badania. Po zapoznaniu się przez uczniów z regułami gry wyiązywała się ciekawa dyskusja nad sformułowanym w programie pytaniem. Niektórzy z uczniów twierdzili, że większą szansę ma Janek, bo ma dwie monety, a Józek tylko jedną; inni uważali, że Józek (który może wygrywać w trzech przypadkach); jeszcze inni twierdzili, że obydwaj chłopcy mają równe szanse.

Używane w dyskusji argumenty nie przekonywały oponentów. Wszyscy chętnie zgodzili się obserwować tę grę powtarzaną przy pomocy komputera. Z dużą uwagą oglądali kolejne rzuty monetami oraz wyniki, które komputer przedstawił w postaci diagramu słupkowego. Rysunek obok (rys. 8) przedstawia sytuację, w której wygrał Janek. Osoby, które spodziewały się innego wyniku, nie dały za wygraną, chciały powtórzyć grę jeszcze raz twierdząc, że rezultat tej gry był przypadkowy.



rys. 8

Dopiero pytanie prowadzącego lekcję, czy zaistniałej sprzeczności nie mogliby wytłumaczyć w inny sposób, zmobilizowało uczniów do poszukiwania rozwiązania na drodze teoretycznej. Wspólnie na tablicy, wzorując się na obserwowanych na ekranie monitora obrazach, przystąpili do wypisywania wszystkich możliwych wyników rozważanej gry.

Janek	Józek
oo	o
oo	r
or	o
or	r
ro	o
ro	r
rr	o
rr	r

Warto zwrócić uwagę, że w trakcie wypisywania tych wyników tylko niektórzy uczniowie odróżniali wynik „or" od wyniku „ro", choć takie rozróżnienie, w przeciwieństwie do opisanego eksperymentu z wideoscenką, sugerował komputer. Po dyskusji bez trudności odpowiedzieli, że występujący w opisanej grze Janek wygra z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, natomiast Józek może wygrać tylko z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$ (remis w grze wystąpi także z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$).

Badania z wykorzystaniem programu komputerowego zostały także przeprowadzone wśród studentów I i II roku matematyki w Wyższej Szkole Pedagogicznej w Kielcach. Po krótkiej dyskusji (związanej z występującym w programie pytaniem) a następnie obserwacji wyników powtarzanej 20 razy przez komputer gry, studenci rozwiązywali omawiane zadanie. Tabela 7 zawiera wyniki tego sprawdzianu (kolumny a, b, c, d, e mają takie samo znaczenie jak w tabeli 6).

	Liczba osób	a	b	c	d	e
I rok	19	2	8	4	5	—
II rok	28	7	8	9	4	—
Razem	47	9	16	13	9	—

Tab. 7

Analiza uzyskanych w tym sprawdzianie wyników potwierdza fakt, że odpowiedni program komputerowy może także przyczynić się do zrozumienia przez studentów treści rozważanego zadania. Ponad połowa studentów (53,19%, rubryki a+b) poprawnie zinterpretowała opisane w zadaniu doświadczenie losowe, traktując je jako rzut trzema monetami. Interesujące jest także to, że ponad jedna trzecia studentów (34%, kolumna b) przyjęła, iż wszystkich możliwych wyników w tym doświadczeniu będzie 6, chociaż komputer w dużym stopniu poprzez sposób zapisywania:

Janek	Józek
or	r
ro	r
...	...

sugerował rozróżnianie tych wyników. Zwraca także uwagę fakt, że prawie jedna trzecia studentów (30,23%, kolumna c) rozwiązywała zadanie przyjmując dwa różne doświadczenia losowe. Być może powodem był obraz na ekranie monitora, na którym były wypisywane osobno wyniki dla Janka i Józka. I jeszcze jedna uwaga. Nie było nikogo wśród piszących sprawdzian, kto nie próbowałby rozwiązywać zadania.

Uwagi końcowe

Poniższa tabela (tab. 8) podaje wyniki osiągnięte przez studentów matematyki we wszystkich opisanych w tej pracy badaniach. Wszystkie wyniki podane zostały w procentach. I tak w pierwszym wierszu „Diagnoza" zamieszczone są wyniki uzyskane przez studentów I roku w czasie pierwszych, opisanych we wstępie badań. W wierszu „Monety" umieszczono wyniki uzyskane przez studentów III roku studiów zaocznych w sprawdzianie, przed którym rzucano monetami, w wierszu „Wideo" — wyniki uzyskane przez studentów I i II roku w sprawdzianie, przed którym oglądano wideoscenkę, natomiast w wierszu „Komputer" — wyniki uzyskane przez studentów I i II roku w sprawdzianie, przed którym wykorzystano komputer.

	a	b	c	d	e	f
Diagnoza	3,27	4,92	63,11	8,2	16,4	4,1
Monety	72.22	11,11	—	16,67	—	—
Wideo	27,5	45	20	7,5	—	—
Komputer	19,15	34,05	27,65	19,15	—	—

a – poprawne rozwiązania, 8 wyników

b – wypisano 6 wyników

c – prawdopodobieństwo osobno dla Janka i Józka

d – inne błędy

e – brak próby rozwiązania

f – inne niż a i b rozwiązanie poprawne

Tab. 8

Mimo że badania prowadzone były w różnych grupach wiekowych, różnymi metodami badawczymi (badania kliniczne, rozmowy z zespołem, prace pisemne, eksperymenty dydaktyczne), w różnch okresach czasu, nieraz dość odległych od siebie (nawet 3 lata), biorące udział w opisanych eksperymentach grupy studenckie nie były statystycznie równoważne (w każdym razie nie były weryfikowane pod tym względem) — przedstawione w tabeli wyniki, a także inne rezultaty opisane w tej pracy pozwalają na postawienie pewnych hipotez i sformułowanie problemów do dalszych badań.

Wprowadzanie do procesu nauczania rachunku prawdopodobieństwa różnorodnych środków dydaktycznych, takich jak odpowiednio zaprojektowane gry, specjalnie nakręcane wideoscenki, programy komputerowe ilustrujące opisaną w zadaniu probabilistycznym sytuację rzeczywistą, wskazuje na radykalną poprawę zrozumienia występującego w tym zadaniu doświadczenia losowego. Z drugiej strony, z tabeli nr 8 można odczytać, że wyniki, które otrzymuje się przy stosowaniu poszczególnych środków dydaktycznych, różnią się między sobą. Powstają naturalne pytania:

- który z wymienionych środków dydaktycznych: gra, wideoscenka, komputer z odpowiednim programem — gwarantuje najlepsze zrozumienie treści zadania probabilistycznego?
- w którym miejscu i w jaki sposób należy stosować te środki dydaktyczne?

Natomiast wymienione powyżej środki dydaktyczne nie mają już tak decydującego wpływu na umiejętność konstruowania odpowiedniej przestrzeni probabilistycznej opisującej rozważane doświadczenie losowe — umiejętności tej trzeba się nauczyć oddzielnie.

Ani wideo, ani komputer nie potrafiły wyeliminować takich rozwiązań, w których studenci rozważali osobno dwa doświadczenia losowe, co w konsekwencji nie pozwoliło im rozwiązać zadania (kolumna c). Natomiast warto podkreślić, że ich odsetek znacznie zmalał — około 3 razy — w stosunku do wyników zamieszczonych w wierszu „Diagnoza". Zjawisko to nie wystąpiło wśród studentów studiów zaocznych „rzucających monetami", być może dlatego, że w tym czasie studiowali rachunek prawdopodobieństwa i umieli konstruować przestrzeń probabilistyczną, a być może dlatego, że brali oni czynny udział w grze w przeciwieństwie do studentów, którzy byli tylko biernymi obserwatorami gry podczas oglądania scenki albo wyników gry uzyskiwanych przez komputer.

Jedno jest pewne: wszystkie osoby biorące udział w eksperymentach próbowały rozwiązywać podane im zadanie. Nikt z nich nie napisał *Nie rozumiem treści tego zadania.* Dotyczy to także tych studentów (kolumna d), którzy chociaż nie rozwiązali zadania, popełniając różne błędy, to jednak niejednokrotnie poprawnie potrafili zinterpretować doświadczenie losowe i wypisać jego wyniki.

Wydaje się, że przeprowadzone badania i zebrane wyniki z jednej strony rzuciły dodatkowe światło na sam problem rozumienia zadań z rachunku prawdopodobieństwa, z drugiej uświadomiły, że problem ten jest niezwykle złożony i trudny, wymaga dalszych badań. Pokazały także, że wykonywanie konkretnych czynności związanych z opisywanym w zadaniu doświadczeniem losowym, a nawet oglądanie ich na wideo czy na ekranie monitora komputerowego, w znacznym stopniu przyczynia się do głębszego zrozumienia treści zadania z rachunku prawdopodobieństwa — zrozumienia sytuacji i warunków w jakich przebiega odpowiednie doświadczenie losowe. Widać też konieczność poszukiwania coraz to innych, nowych środków dydaktycznych, które przyczyniłyby się do zwiększenia zainteresowania uczniów problematyką stochastyczną, ważnym elementem wykształcenia nie tylko matematycznego.

Literatura

B r u n e r J. S.: 1978, *Poza dostarczone informacje*, PWN Warszawa, s. 18.

B r y d a k D. (red.): 1990, *Diagnoza skuteczności kształcenia nauczycieli, Synteza badań za lata 1986-1990 oraz przykładowe opracowania*, WSP Kraków.

K ą k o l H.: 1982, O rozwiązywaniu zadań z rachunku prawdopodobieństwa, *Matematyka* 5.

K ą k o l H.: 1990, *Podstawowe pojęcia statystyki i rachunku prawdopodobieństwa — propozycja dydaktyczna*, Wydawnictwo Naukowe WSP Kraków.

K r y g o w s k a Z.: 1977, *Zarys dydaktyki matematyki, część 1*, s. 26-27, część 3, s. 70-71, WSiP, Warszawa.

M a j o r M., P ł o c k i A.: 1993, Kontrola i ocena stochastycznej wiedzy ucznia jako nowy problem dydaktyki matematyki, *Dydaktyka Matematyki* 15.

P ł o c k i A.: 1991, *Rachunek prawdopodobieństwa w szkole podstawowej — Zarys dydaktyki*, WSiP Warszawa.

P ł o c k i A.: 1992, *Propedeutyka rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej dla nauczycieli*, PWN Warszawa.

On the understanding of probability problems

Summary

The author's main thesis is that a successful solution of a probabilistic problem is conditioned by two components:

- understanding of the concrete situation and the random event in the problem,
- the ability to match the random event with an adequate probabilistic model.

The article reports on didactic experiments investigating the influence of some means on the understanding of the following problem:

> What is the probability of Janek getting more heads when tossing two coins than Józek who tosses one coin only? Both boys toss only once.

The means used in the experiments were: real tossing of coins, a computer simulation of tossing of coins, and a video cassette showing two boys playing the game. And the subjects were students 11 and 14 years old, university students studying mathematics, and inservice students.

Results showed a considerable improvement of the understanding of the problem, but the means did not seem to influence the ability to find an appropriate probabilistic model.