

Ewa Swoboda
Rzeszów

Rozumienie podobieństwa figur przez uczniów młodszych klas szkoły podstawowej

Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyszczego

1 Wstęp

Inspiracją do podjęcia badań przedstawionych w tym artykule były wyniki H. Siwek opisane w Siwek 1990. Wynikało z nich, że odczucie wielkości proporcjonalnych znajduje się w strefie najbliższego rozwoju uczniów klas pierwszych, zarówno w prostych sytuacjach geometrycznych jak i w pewnych sytuacjach praktycznych, dotyczących wielkości liczbowych. Znaczy to, że już w klasie pierwszej szkoły podstawowej dziecko ma pewne wstępne intuicje wielkości proporcjonalnych, które można u niego rozwijać, oraz jest w stanie zrozumieć pewne fakty związane z rysowaniem figur podobnych (Siwek 1990, s. 199).

Według obowiązującego programu nauczania, uczniowie klas IV mają zapoznać się z kreśleniem odcinka, prostokąta i okręgu w danej skali. Na tym etapie kształcenia uczniowie powinni już mieć pewne wiadomości i nawyki; oczekujemy także, że potrafią się posługiwać niektórymi pojęciami. Z pewnością rozróżniają figury geometryczne, wielokrotnie je wymierzali, rysowali. Czy ta wiedza wystarczy do nauczenia się rysowania figury w skali? Jakie są źródła trudności uczniów? Jakie są typowe błędy?

Rysowanie figur w skali i wykonywanie planów ma duże znaczenie praktyczne. Daje szansę zastosowania matematyki w życiu codziennym, co jest szczególnie istotne, choćby z powodu motywacji do nauki. Z drugiej strony tematy te są bardzo ważne w nauczaniu szkolnym. Doświadczenia, które uczeń zdobywa w klasach początkowych, powinny być więc ukierunkowane na przyszłą naukę i być podbudową wiedzy o podobieństwie figur.

W języku potocznym funkcjonuje pojęcie podobieństwa. Dziecko jest podobne do matki, człowiek jest podobny do swego zdjęcia. Geometryczna, ścisła definicja podobieństwa jest dość odległa od potocznych intuicji związanych z nazwą, co może utrudniać nauczanie.

Opis przeprowadzonych badań poprzedzam krótkim przeglądem koncepcji nauczania pojęć związanych z proporcjami geometrycznymi. Również pewne badania fizjologów, dotyczące rozpoznawania kształtów, były mi pomocne w

opisie uzyskanych wyników i dlatego krótko je zreferuję. W wyniku obserwacji oraz ich analizy wyodrębniłam pewne aspekty dziecięcych intuicji związanych z określeniem „figury podobne”. Dotyczą one następujących pytań:

- a) na jakie własności zwracają uwagę dzieci, gdy uznają, że figury są „takie same, tylko większe”, co rozumieją pod tym stwierdzeniem?
- b) jakie strategie stosują w rysowaniu figur w powiększeniu?

Badania dotyczą dwóch sytuacji:

- 1) dziecko rozpoznaje narysowane przez kogoś powiększone figury,
- 2) dziecko samo ma narysować figurę w powiększeniu.

Pokażę przykłady prac dzieci, które świadczą o innym rozumieniu „figury powiększonej”, niż wynikałoby to z definicji figur podobnych.

Ponieważ w mojej pracy podstawową rolę odgrywa rozróżnienie terminów: „pojęcie potoczne” oraz „pojęcie naukowe”, konieczne jest wyjaśnienie, w jakim sensie ich używam. Terminy te zaczerpnęłam od L. Wygotskiego (1971, s. 295), który stwierdza, że rozgraniczenie w badaniach typów pojęć na potoczne i naukowe jest

empirycznie uzasadnione, teoretycznie słuszne i heurystycznie owocne.

Jego zdaniem, pojęcia naukowe rozwijają się na gruncie pojęć potocznych. Pojęcia potoczne, niezbędne w kształtowaniu pojęć naukowych, powstają w sytuacjach związanych z konkretnym działaniem, a w ich rozwoju decydującą rolę odgrywa wysiłek umysłowy dziecka. Pojęcia te, często przez Wygotskiego nazywane „spontanicznymi”, oparte są na bogatym osobistym doświadczeniu dziecka. Inaczej jest z pojęciami naukowymi, niespontanicznymi, które również są kształtowane z dużym intelektualnym wysiłkiem, ale na ich powstanie decydujący wpływ ma dorosły. Pomiedzy sposobami przyswajania obydwu tych typów pojęć Wygotski widzi taką różnicę, jak pomiedzy spontanicznym przyswajaniem werbalnym języka ojczystego i niespontanycznym uczeniem się werbalnym języka obcego (Wygotski 1971, s. 297 - 308).

Badania opisane w tym artykule rzucają pewne światło na strefę możliwości i strefę najbliższych możliwości dzieci w zakresie rozumienia figur podobnych oraz – z drugiej strony – na proces tworzenia się naukowego, abstrakcyjnego pojęcia „podobieństwa geometrycznego”, opartego na potocznym, naturalnym rozumieniu podobieństwa.

Poniżej, analizując wytwory prac dzieci, przyjąłam następującą terminologię. Mianowicie w sformułowaniach typu: „powiększona figura zachowuje ogólny kształt, ale nie zachowuje proporcji” słowo „kształt” rozumiem w sensie potocznym jako określenie wyglądu figury ze względu na ograniczające ją linie, kontury.

Znaczy to, że przy powiększeniu np. trójkąta dziecko rysuje również trójkąt, ale nie musi to być trójkąt podobny w sensie geometrycznym. Kształt figury określa więc cechę figur związaną z jej nazwą, jak: „trójkątność”, „trapezowość” itp.

2 Wielkości proporcjonalne w literaturze metodycznej

Nie sposób omówić całej literatury związanej z rozumieniem proporcjonalności; jest to zagadnienie wykraczające poza ramy tego artykułu. Taki przegląd zawarty jest w Treffers. Tutaj ograniczę się jedynie do tych prac, które z różnych względów mają związek z opisywanymi badaniami.

Z.Krygowska (Krygowska et al. 1957, s. 8) cytuje Proklosa, komentatora Euklidesa:

Każda powstająca wiedza przekształca się z niedoskonalej w doskonałą. Wytworzona w wyniku spostrzeżenia zmysłowego, staje się stopniowo przedmiotem naszego rozważania i wreszcie dorobkiem naszego umysłu.

Swe własne przemyślenia ujmuje ona następująco:

Dziecko już w wieku przedszkolnym uczy się geometrii „naturalnej”, w obcowaniu z otaczającymi go przedmiotami. Duży i wszechstronny materiał doświadczeń przestrzennych umożliwia zmiany jakościowe w jego myśleniu. W umyśle dziecka powstają pojęcia geometryczne i niektóre z nich stają się dorobkiem jego świadomości (Krygowska et al. 1957, s. 18).

A.Szemińska (1992, s. 214) pisze:

Pojęcia geometryczne dotyczą stosunków przestrzennych, a więc są bardzo silnie związane z cechami spostrzeganyimi. Jednakże ani samo spostrzeganie, ujmujące tylko pojedyncze, aktualne „stany rzeczywistości”, ani obrazy umysłowe, stanowiące ślad uprzednich spostrzeżeń, nie wystarczają do ukształtowania abstrakcyjnych pojęć geometrycznych. [...] Ponadto, dla geometrii ważne jest rozumienie wzajemnych związków pomiędzy figurami, między ich wymiarami i ich częściami. Istotne są przekształcenia, w wyniku których cechy figur zmieniają się, ale pewne stosunki pozostają niezmiennie.

Wypowiedzi te są wciąż aktualne, zwłaszcza w świetle coraz mocniej lansowanej koncepcji „realistycznego nauczania matematyki”. Koncepcja ta, oparta na praktyce nauczania i na badaniach psychologicznych, jest od lat 70. lansowana w Holandii, najpierw przez zespół IOWO, później OW&OC. W odniesieniu do nauczania o proporcjach i stosunkach proponuje się takie podejście:

Najbardziej charakterystycznym rysem realistycznego przybliżania pojęcia stosunku jest to, że nie jest on ukierunkowany wprost na regułę, czy na znajdowanie czwartej wielkości w tzw. „regule trzech” (przechodzenia od

$$a : b = c : ?$$

do

$$? = \frac{b \cdot c}{a}.$$

Przed wszystkim stosunek jest przybliżany wizualnie i jest związany ze światem postrzeganym. Dla zapoznania z problemem używane są rysunki w skali, modele, w różny sposób reprezentujące stosunek. W pierwszej kolejności kładzie się nacisk na wizualne porównywanie, bez użycia liczb (Treffers, s. 49).

Specjalną cechą stosunku jest to, że jest on zrozumiały niezależnie od trudności związanych z liczbami. Łatwym aspektem tego pojęcia jest to, że jest on mocno zakorzeniony w percepcji wizualnej. Dzieci mogą zobaczyć stosunek na długo przed tym, zanim przybliżą się do jego ujęcia liczbowego, do formalnego zapisu. Samochód-zabawka wygląda tak samo jak prawdziwy samochód. Jest tylko zrobiony w mniejszej skali. Pomniejszenia można wykonywać w różnych skalach i stąd są zabawki samochodów w różnych rozmiarach (Van den Heuvel-Panhuizen, s. 163).

Podobnie piszą autorzy książki „Primary mathematics today” Williams et al. 1970 w rozdziale „Skala, stosunek, proporcja”:

Możemy prześledzić początki idei stosunku we wczesnych doświadczeniach z dzieciństwa. Obiekty są rozpoznawane jako mające te same kształty, chociaż ich rozmiary są różne. Przedmiot, jak np. zabawka, bywa widziany jako ten sam, chociaż, jeżeli jest daleko od dziecka, wydaje się być mniejszy. Widziana z dużych odległości zabawka będzie wydawać się jakby pomniejszona, lecz jeżeli wszystkie długości wyglądają podobnie pomniejszone, dana rzecz jest swobodnie rozpoznawana przez dziecko.[...] Powiększanie, jak projekcja slajdów na ekran, czy pomniejszanie rozmiarów, jak w obrazku, wzmacnia w dziecku świadomość podobieństwa kształtu (Williams et al. 1970, s. 376).

Prezentowane stanowiska kierują się wspólną ideą: kształtowanie pojęcia (w tym przypadku figur podobnych) rozpoczyna się od spostrzeżenia zmysłowego. Jest ono dla dziecka dostępne w sposób intuicyjny. Figura jest rozpoznawana jako taka sama, jeżeli zachowany jest jej kształt.

O trudnościach dzieci związanych z rozumieniem niezmienności stosunku wielokrotnie pisała A. Szemińska (1992, s. 213). Opisuje ona badania, w których dzieci budowały mury z kolorowych klocków różnej długości:

Gra polegała na tym, że uczeń brał ze stosu małe czerwone klocki, [jednakowej długości] a za każdym pobraniem dziecka eksperymentator brał klocek zielony, dwa razy dłuższy od czerwonych. W efekcie każdy z graczy miał tyle samo klocków, zatem – niezależnie od liczebności tych dwóch zbiorów – można było przewidzieć, że długość muru zbudowanego z klocków czerwonych będzie stanowić połowę długości muru z klocków zielonych.

Liczba klocków była taka sama w murach o różnych kolorach. Stosunek długości murów był taki sam jak stosunek długości pojedynczych elementów. Jednak większość uczniów klas pierwszych myliła tutaj porównywanie ilorazowe (ile razy) z porównywaniem różnicowym (o ile).

W literaturze metodycznej znajdują się również opisy badań prowadzonych nad strategiami stosowanymi przez dzieci w rysowaniu figur w powiększeniu. Takie spostrzeżenia zawarte są w książce Hart 1981. W rozdziale „Ratio and proportion” K. Hart relacjonuje wyniki testu CSMS (s. 93), w którym jedno z zadań polegało na powiększaniu figur. Rozwiązując je, duża grupa dzieci nie używała liczb ani żadnych miar. Powiększając prostokąt dziecko często rysowało zupełnie dowolny prostokąt, bez zachowania proporcji, mając jedynie świadomość, że figura jest jakoś powiększona. Często była też sytuacja, gdy dziecko powiększało długość, ale zapominało o wysokości. W komentarzu do tych badań autorka pisze, że „taki sam kształt” okazał się dla dzieci pojęciem trudnym, jeżeli dotyczy wielokątów, ponieważ np. wszystkie trójkąty mają „ten sam kształt” przez to, że są trójkątami. Dzieci ignorowały fakt, iż rezultat powiększenia powinien mieć ten sam kształt co oryginał (s. 101). Powiększając figurę stosowały dodawanie, a nie mnożenie, w rezultacie tworzyły figury zupełnie niepodobne do oryginału, nie porównując swego rysunku z figurą wzorcową (s. 97).

3 Mechanizmy rozpoznawania figur opisywane przez fizjologów

Podstawą do zakwalifikowania pojedynczego, aktualnie oglądanego rysunku, jako „najbardziej podobnego” do wzorca, są cechy spostrzegane. Warto więc bliżej zapoznać się z mechanizmem rozpoznawania figur. Badania na ten temat prowadzili fizjologowie radzieccy i amerykańscy. W. Demidow (1989) relacjonuje ich badania. Wynika z nich, że oko jest tylko narzędziem, które odbiera sygnały wzrokowe (choć wcale nie w sposób bierny). Informacja o świecie fizycznym zostaje przekazana do mózgu, gdzie następuje jej analizowanie, daleko wybiegające poza dostarczoną informację. W umyśle powstaje np. wzorzec wyćwiczony figury, będący jednym z mechanizmów rozpoznawania kształtów. Tworzy się on w procesie uczenia się – świadomego, czy nieświadomego. W związku z tym oko niemal natychmiast może spośród różnych figur wybrać znaną sobie figurę. Ponadto odbieramy jednakowe przedmioty tak, jakby miały jed-

nakowe rozmiary niezależnie od odległości, chociaż projekcje tych przedmiotów na siatkówce oka okazują się różne. Istnieją bowiem pewne niezmiennicze (inwariantne) przekształcenia, których dokonuje wzrok. Inwariantności są wrodzone i wyróżnia się:

- 1) inwariantność wielkości – rysunki tego samego przedmiotu, występujące w różnej wielkości, są dla organu wzroku nośnikami tej samej informacji,
- 2) inwariantność kształtu – figury tego samego kształtu są rozpoznawane jako te same, niezależnie od zmiany wielkości figury i zmiany tła,
- 3) wrodzony mechanizm określania odległości (nie w metrach, ale na podstawie wzajemnych relacji przedmiotów i zmian w ich „obliczu”).

4 Organizacja badań

Badania przeprowadziłam w roku szkolnym 1989/90. Uczestniczyły w nich dzieci z klas I - III szkoły podstawowej, w dwóch różnych grupach badawczych. Jedną grupę stanowili uczniowie całych oddziałów klasowych z jednej ze szkół w Rzeszowie, drugą – wybrani losowo uczniowie z 43 szkół miejskich i wiejskich Polski południowo-wschodniej. W sumie w badaniach uczestniczyło 246 uczniów, a liczbę uczniów poszczególnych klas podaje tabela 1.

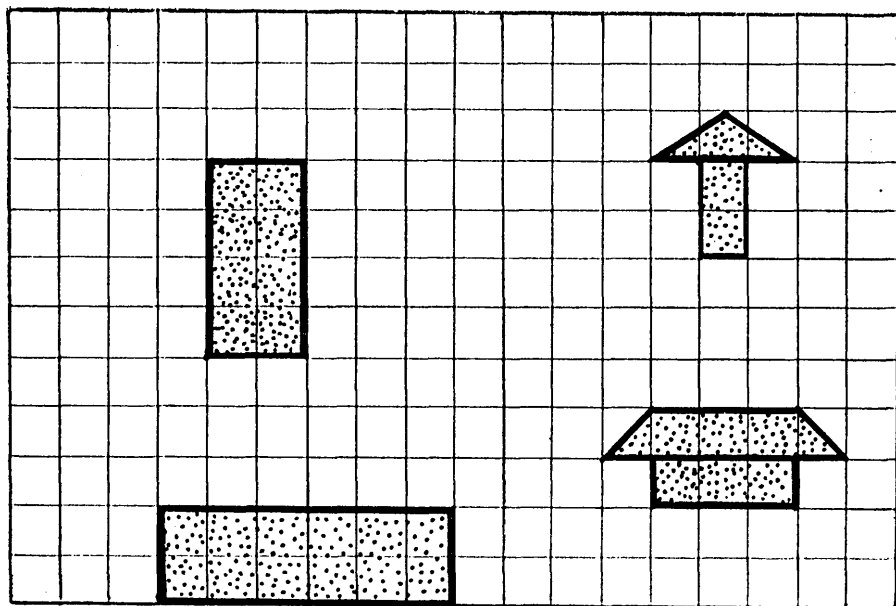
TABELA 1

Liczba uczniów uczestniczących w badaniach		
	I grupa (całe klasy)	II grupa (pojedynczy uczniowie)
kl. I	46	49
kl. II	24	48
kl. III	30	49
razem	100	146

Metodą badania była indywidualna rozmowa z uczniami. Materiałem do niej były wytwory innych dzieci, mianowicie rozwiązania zadania „Domki”, opisanego w pracy H.Siwiek (Siwiek 1990, s. 193-194). Temat owego zadania był następujący: „Dokończ rysunki domków tak aby były one jak najbardziej podobne do małych domków, tylko większe.” (rys.1).

Badanie składało się z dwóch etapów. W pierwszym etapie przedstawiałam uczniowi kilka prac wykonanych przez dzieci w trakcie badań H. Siwiek. Mówiłam: „popatrz, dzieci miały dorysować dach tak, aby domek duży był taki sam jak mały, tylko większy. Wybierz tę pracę, która jest twoim zdaniem najlepsza”. Zadanie było celowo sformułowane w sposób nieostry, miało bowiem dostarczyć informacji o odczuciach dzieci związanych z powiększaniem figur. Uczeń wybierał pracę jego zdaniem najlepszą, najlepiej rozwiązaną, a następnie

uzasadniał swój wybór. Miał on krytycznie ustosunkować się do przedstawionych prac innych dzieci: zanalizować zauważone błędy, wyjaśnić, dlaczego jego zdaniem rysunek jest poprawny lub błędny. Jeżeli badany uczeń wybrał pracę z rozwiązaniem nie zachowującym proporcji, zwracałam mu na to uwagę: „Popatrz, ten mały domek jest długi na trzy kratki, a domek duży na sześć kratek. Dach na małym domku wystaje na 1 kratkę, na ile kratek będzie wystawał w dużym domku?”



Rys. 1

W drugim etapie uczeń dostawał polecenie, aby samodzielnie i poprawnie narysował powiększony domek.

5 Wyniki pierwszego etapu badań

Wyniki te okazały się bardzo optymistyczne. W większości uczniowie wybierali taką pracę, w której dorysowane daszki zachowywały kształt i proporcje. Tę grupę oznaczę (+). Jest ona bardzo liczna i obejmuje od 50% do 80% badanych uczniów w klasach I-III. Drugą, również liczną grupę (średnio trzecia część badanych) stanowili uczniowie, którzy analizując prace innych dzieci zwracali uwagę tylko na zachowanie ogólnego kształtu. Grupę tę oznaczę (ZK). Uczniowie ci zauważali, że figura „jakoś” się powiększa pozostając nadal trójkątem lub czworokątem, lecz nie zwracali uwagi na proporcje odcinków. Uczniowie

obu tych grup stanowili ok. 90% badanych. Rozkład uczniów tych grup w poszczególnych klasach przedstawia tabela 2

TABELA 2

	I grupa		II grupa	
	(+)	(ZK)	(+)	(ZK)
kl. I-III łącznie	61%	36%	66%	23%
kl. I osobno	57%	35%	49%	29%
kl. II osobno	54%	42%	69%	29%
kl. III osobno	73%	27%	80%	10%
razem (+) i (ZK)	97%		88%	

6 Wyniki drugiego etapu badania w zestawieniu z etapem pierwszym

Drugi etap polegał na samodzielnym rozwiązywaniu przez uczniów zadania „Domki”. Wyniki tego etapu przeanalizuję w dalszej części artykułu. Tutaj zwrócę uwagę na wpływ pierwszego etapu (ogląd rysunku innego dziecka) na samodzielny rysunek badanego ucznia.

Interesujące jest porównanie przebiegu pracy dziecka w tych dwóch etapach. Tabela 3, która ujmuje zależności pomiędzy dostrzeżeniem faktów związanych z zachowaniem proporcji, a wykorzystaniem ich we własnym rysunku, pokazuje dużą rozbieżność pomiędzy tymi etapami. W grupie I na 61% dzieci, które wykazały się poprzednio prawidłowymi intuicjami, tylko część, stanowiąca 48% wszystkich badanych, potrafiła je wykorzystać w pracy samodzielnej. W grupie II, na 66% dzieci wykazujących oczekiwane intuicje, tylko 23% dobrze i samodzielnie potrafi zastosować zauważone prawidłowości.

TABELA 3

	I grupa		II grupa	
kl. I	57%	37%	49%	6%
kl. LL	54%	42%	69%	19%
kl. III	73%	64%	80%	45%
razem	61%	48%	66%	23%

Związek między wyborem poprawnej pracy a poprawnie wykonanym samodzielnie rysunkiem

7 Interpretacja wyników pierwszego i drugiego etapu

Sądzę, że postępowanie uczniów, ujawnione w obydwu etapach tego badania, należy ujmować w dwóch różnych kategoriach. W pierwszym etapie, pierwot-

nym i decydującym motywem podjęcia decyzji przez dziecko był ogląd figury w aspekcie zachowania kształtu. Uczeń pracował w jasno określonej konkretnej sytuacji, mógł wzrokowo porównywać różne gotowe rysunki. W drugim etapie badań dziecko samo miało rysować powiększone figury. Miało przy tym zastanowić się, co i jak powiększyć.

Przytoczone stanowisko psychologów oraz wyniki badań fizjologów wzmacniają hipotezę, że dzieci uczestniczące w przedstawionych badaniach oceniały figury jako podobne, kierując się cechami spostrzeganymi. Obserwacja, której dokonywało dziecko, była dla niego świadoma, ale uczeń posługiwał się nieuświadomionymi mechanizmami rozpoznawania kształtu - fizjologicznymi lub wyuczonymi. Zdaniem Wygotskiego, cechą charakterystyczną dla pojęć spontanicznych jest to, że dziecko przyswaja sobie pewne nawyki wcześniej niż umiejętność świadomego i zamierzonego ich stosowania. Rozwój zaś pojęć naukowych dopiero wtedy się zaczyna, gdy mamy do czynienia ze świadomym i celowym używaniem pojęcia, to znaczy wtedy, gdy dziecko w sposób świadomy i celowy musi wykonać to, co codziennie wiele razy robi spontanicznie i mimowolnie (Wygotski 1971, s. 367).

Zestawię różnice pomiędzy obydwooma etapami badania.

I etap	II etap
1) sensowne spostreżanie związane z rozpoznawaniem kształtów	1) sensowne działanie związane z wytworzeniem kształtów
2) aktywność spontaniczna , nieuświadomiona, automatyczna lub wrodzona	2) aktywność uświadomiona
3) stwierdzanie wyników przekształceń już dokonanych	3) przewidywanie wyników przekształceń
4) porównywanie gotowych obiektów ujmowanych całościowo	4) abstrahowanie, wnioskowanie logiczne (liczenie kratek)
6) świadomość , czym się różnią pokazywane przedmioty	6) świadomość , na czym polega podobieństwo rysowanych przedmiotów

Dzieci uczestniczące w moich badaniach wybierały właściwy rysunek posługując się najprawdopodobniej zarówno umiejętnościami rozpoznawania figur związanymi z funkcjonowaniem oka, jak i intuicjami ukształtowanymi w trakcie doświadczeń życiowych. Posługiwały się więc pojęciem potocznym (w sensie Wygotskiego). Badani uczniowie nie mieli wówczas w programie szkolnym ani w obowiązujących podręcznikach tematów i zadań o figurach powiększonych, rozwiązywanych przez liczenie kratek itp. W tej fazie dzieci wykorzystywały pojęcia potoczne, powstałe w wyniku kontaktu z fotografiami, szkłem powiększającym, filmem (powiększenie i pomniejszenie).

Zaobserwowałam, że część dzieci próbowała jednak (głównie w drugiej części badania) liczyć kratki w celu rozwiązania zadania. Fakt ten może być spowodowany wieloma czynnikami. Oto dwa, które wydają się najważniejsze:

- 1) W szkolnym kształceniu matematycznym porównywanie dwóch wielkości odbywa się z reguły poprzez znalezienie liczby, będącej ich stosunkiem lub ich różnicą.
- 2) W zadaniu o domkach dzieci rozpoznają znane sobie figury geometryczne: trójkąt, prostokąt, czworokąt. Mają już pewne doświadczenia w rysowaniu tych figur, wymierzaniu długości boków. Pojęcia te mieszczą się w systemie pojęć szkolnych i dziecko, będąc w nowej sytuacji, dąży do wykorzystania dotychczasowej swej wiedzy.

L.S.Wygotski uważa, że

Pojęcia naukowe powstają i kształtują się inaczej w toku nauki szkolnej niż w osobistym doświadczeniu dziecka. Inne zadania zajmują myśl dziecka, gdy sobie przyswaja pojęcia w szkole, inne zaś, gdy jego myśl jest pozostawiona samej sobie.

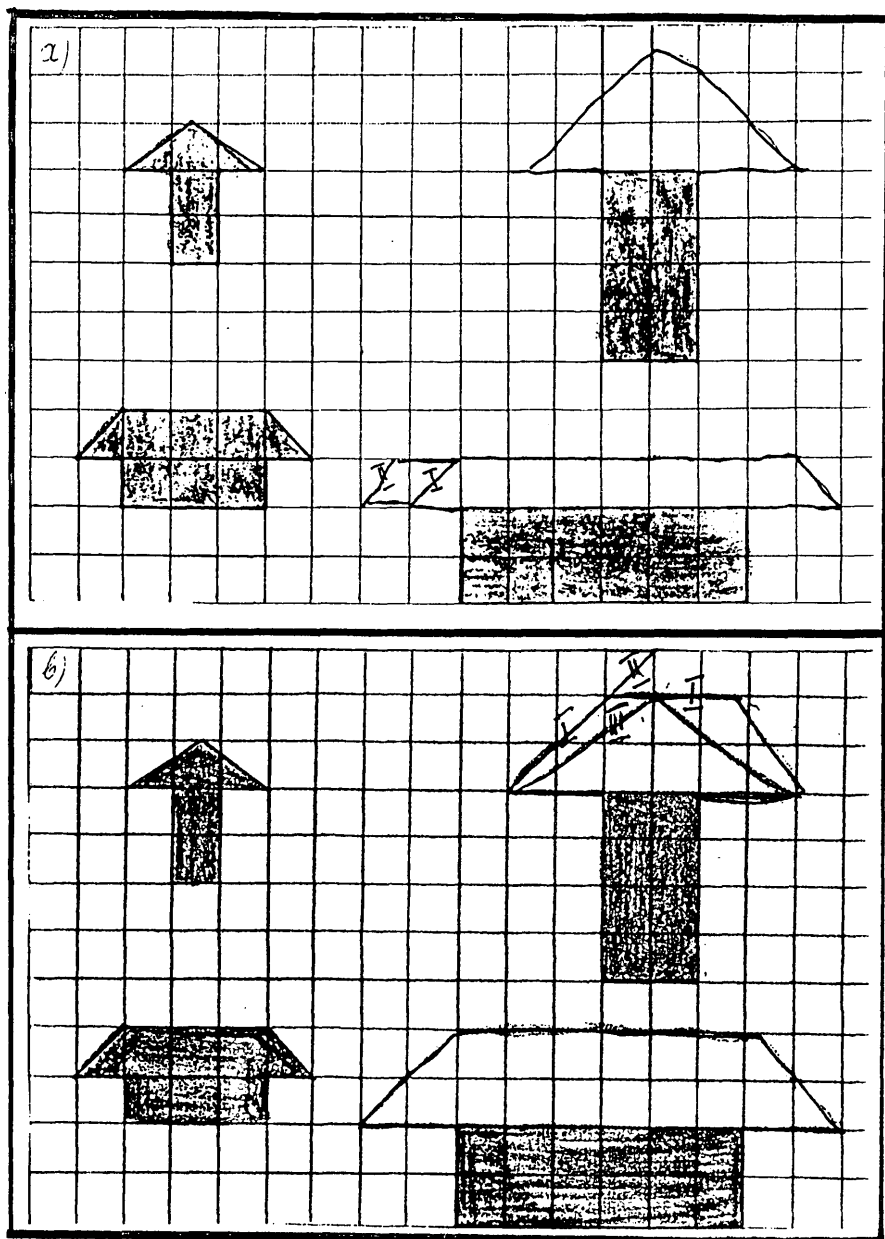
(Wygotski 1971, s. 304). Uwaga ta dotyczy również podejścia do rysowania znanych figur. Przy rysowaniu prostokąta (w zeszyte kratkowanym) dziecko interesuje się jedynie długością boków; przy rysowaniu trójkąta - długością podstawy i umiejscowieniem przeciwległego wierzchołka.

8 Przykłady typowych błędów, które się pojawiły w trakcie rysowania figur powiększonych

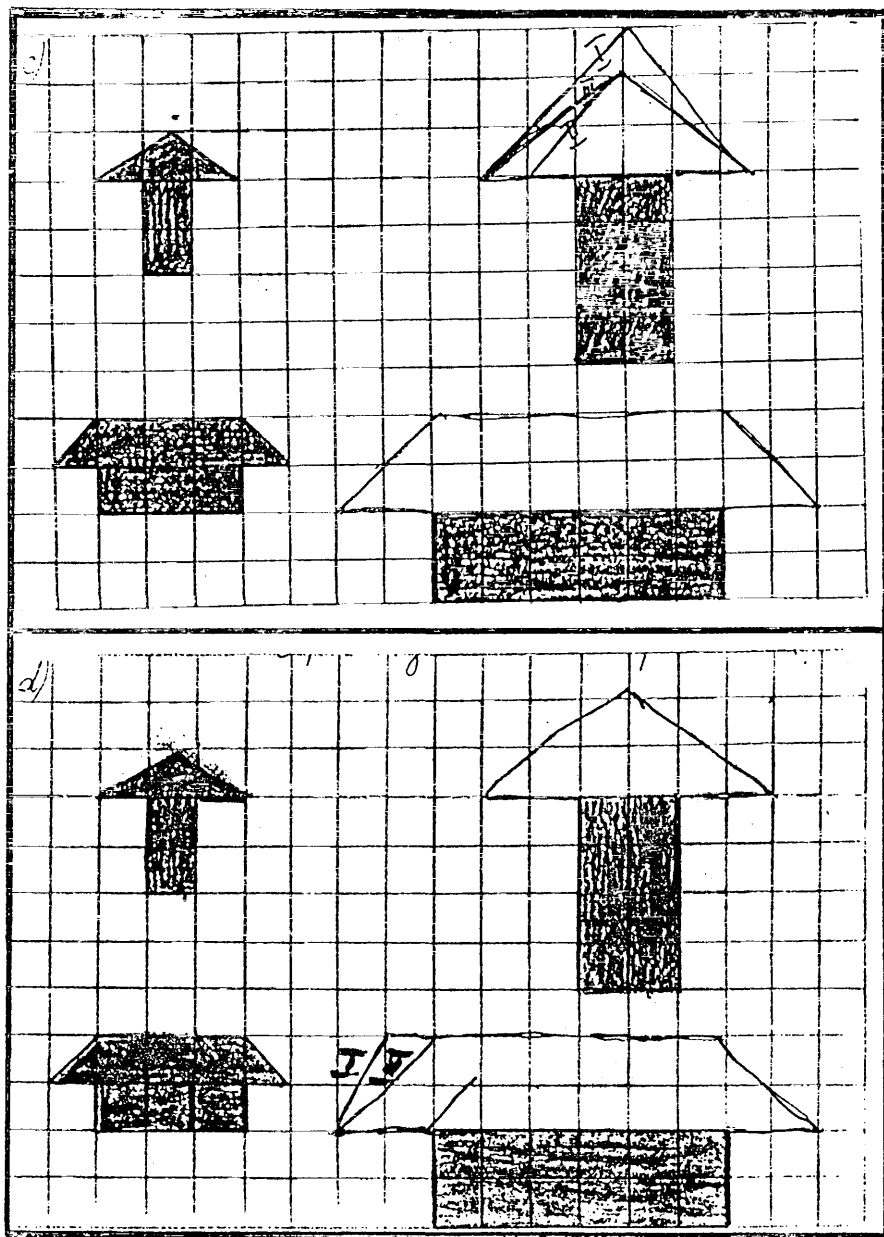
Podczas obserwacji pracy dzieci w trakcie samodzielnego rysowania figur „takich samych, tylko większych”, oraz analizując ich wytwory, ustaliłam najczęściej powtarzające się typy odchyłeń figur od prawidłowo narysowanej figury w skali:

- 1) dziecko powiększa tylko jeden wymiar w figurze dwuwymiarowej,
- 2) dziecko zmienia kształt figury dążąc zapewne do zachowania zaplanowanej „wysokości” i „szerokości” (trójkąt zostaje „obcięty”, gdyż nie zmieścił się w zaplanowanej ilości kretek),
- 3) dziecko zachowuje kształt figury (w tym przypadku trójkąta) kosztem rezygnacji z zaplanowanej „wysokości” i „szerokości”,
- 4) dziecko rysuje po skosach kratownicy (w trójkącie, czworokącie) nie zachowując kątów przy powiększaniu figur.

Dla ilustracji tych czterech typów przedstawiam przykłady prac dzieci (rys. 2).
Nasuwa się przy tym uwagi:



Rys. 2a i 2b



Rys. 2c i 2d

Typ 1 (rys.2a) Dla tego dziecka powiększanie trapezu odbywa się „jednowymiarowo”. Nowa figura jest „taka sama, tylko większa” w tym sensie, że zachowała „trapezowość” i kąty wewnętrzne. Jest większa, bo jest dłuższa. Uczeń ten nie jest świadomy, że oczekuje się od niego zmiany długości wszystkich odcinków tej figury.

Typ 2 (rys.2b) Tutaj dziecko prawdopodobnie przystępowało do rysowania figury z gotowym planem, „widząc” w wyobraźni, że daszek ma wystawać zza podstawy domku na dwie kratki i ma mieć wysokość na dwie kratki. Intencja rysowania trójkąta (inwariantność kształtu), na co wskazuje skośna linia I, uległa zachwianiu, gdy ręka dziecka znalazła się na wysokości dwóch kratek nad domkiem. Spowodowało to „ścięcie” daszka. Tego typu zmiana kształtu figury nie była na ogół akceptowana przez dzieci w pierwszym etapie badania. Podczas analizy gotowych prac innych dzieci tylko niecałe 2% dzieci uznało prace zmieniające kształt jako dobre. Podczas własnej pracy dziecka taka zmiana kształtu figury była jednak bardzo częsta.

Typ 3 (rys.2c) W tym przypadku dziecko było konsekwentne w zachowaniu „trójkątności”. Obie próby powiększenia figury nie były dobre. Pomimo porównań z figurą wzorcową dziecko nie poprawiło pierwszego rysunku. Nie dostrzegało niewłaściwej stromości dachu i w drugiej próbie powtórzyło pierwsze błędne nachylenie, starając się jedynie uwzględnić wyliczoną wysokość. Dopiero trzecia próba jest poprawnym rozwiązaniem.

Typ 4 (rys.2d) Dorysowany daszek „wystaje” na dwie kratki, ma wysokość na dwie kratki i jest trapezem. Ale dopiero interwencja prowadzącego badania wpłynęła na zmianę stromości dachu. Wydaje się, że w intuicyjnym konstruowaniu figur podobnych świadomość zachowania kątów jest niewielka i nie jest czymś pierwotnym, co by dzieci w sposób naturalny uwzględniały stosując naiwne powiększanie, a przynajmniej stoi na dalszym miejscu przed zmianą długości odcinków.

Bardzo często zdarzało się, że dziecko zachowywało ogólny kształt figury (typ 1), ale powiększało tylko niektóre odcinki. Tabela 4 pokazuje, ile dzieci uczestniczących w badaniach wykonywało w ten sposób swoje prace.

TABELA 4

	I grupa	II grupa
kl. I	26%	33%
kl. II	21%	35%
kl. III	3%	31%
łącznie	18%	33%

Czym spowodowane jest to zjawisko? Jedno z możliwych tłumaczeń szuka źródła w psychologiczno-fizjologicznej teorii działania wzroku. Wspomniałam już, że

oko odbiera bodźce ze świata fizycznego, a mózg je przetwarza. Mózg nie jest biernym odbiorcą bodźców zewnętrznych. Widzenie wiąże się zawsze z jakimś interpretowaniem zjawisk świata zewnętrznego.

Omawiane kształty nie musiały bynajmniej być dla dziecka trójkątami lub czworokątami. To były po prostu ściany, dachy, które mają swoje znaczenie dla domu, swoją funkcję praktyczną. Gdy dach ma pokrywać domek większy, to musi być na tyle duży, by tę funkcję spełniał. I wtedy rzeczywiście wystarczy go „wydłużyć”.

Ta interpretacja nie wyczerpuje całego zagadnienia, choć z pewnością należy ją brać pod uwagę.

Ponadto powiększanie figury stawiało wielokrotnie dziecko przed pytaniem: „o ile więcej?”, czy „ile razy więcej?” (porównywanie różnicowe czy ilorazowe). Trudność tę obserwowałam zarówno podczas analizy rozwiązanych już zadań (pierwszy etap), jak i podczas samodzielnego rozwiązywania zadań przez badane dzieci (drugi etap).

H. Siwek zauważyła (Siwek 1990, s. 199), że w jej badaniach wyniki zadania „Domki” są o wiele gorsze od wyników arytmetycznego zadania o proporcjach przy sporządzaniu serka z cukrem. Pisze ona:

Przyczynę tego stanu rzeczy można upatrywać zapewne w tym, że zadanie o serkach było „bliższe życia”, zaś zadanie „domki” było bardziej abstrakcyjne, wymagało pojęcia prostokąta i trójkąta, zdyscyplinowanego odliczania kratek, porównywania kształtów otrzymanych figur.

Na podstawie własnych badań sędzę, że równie istotne były tutaj trudności tkwiące w samym pojęciu figur podobnych, które wymaga uświadomienia zmiany wszystkich odcinków figury równocześnie i zachowania w każdym przypadku tego samego stosunku. Ponadto narysowanie figury podobnej wymaga umiejętności skorelowania powiększania odcinków figury z równoczesnym zachowaniem kształtu.

Zadanie to zawierało jeszcze jedną trudność. Skalę powiększenia dzieci miały odkryć same, porównując prostokąty (podstawy domków), a narysować w powiększeniu miały figury zupełnie inne („dachy” – trójkąty i trapezy). Przeniesienie proporcjonalnej zmiany odcinków w jednej figurze na figurę o innym kształcie jest dla dzieci dużym utrudnieniem, wymagającym wnioskowania stojącego na stosunkowo wysokim stopniu abstrakcji.

9 Wnioski i uwagi końcowe

Od lat na świecie toczy się dyskusja na temat nauczania geometrii w szkole. Wśród rozmaitych publikacji szczególnie interesujący jest artykuł Jana de Lange (1986, s. 52-53), w którym autor podaje receptę na „geometrię dla wszystkich”:

Na temat sposobu jej uczenia się można udzielić bardzo prostej odpowiedzi. Rozumiemy przez to: postępowanie, w którym może ona być odkrywana przez uczącego się. Oznacza to, że powinniśmy rozpocząć nauczanie geometrii jako aktywność w doświadczeniach. Przyjmuje się pogląd, że intuicyjne aktywności doświadczalne nie powinny być ograniczane do nauczania początkowego, ale winny mieć miejsce również na poziomie szkoły średniej (ponadpodstawowej). Hasło Freudenthala „Matematyka jako ludzka aktywność” winno stanowić punkt wyjścia, gdy myślimy o geometrii dla wszystkich. Można by startować od: codziennych problemów, orientacji przestrzennej, jak widzimy przedmioty, świat wokół nas.

Prezentowane w mojej pracy badanie związane było z takimi „intuicyjnymi aktywnościami doświadczalnymi”. Punktem wyjścia było hasło „Jak dziecko widzi przedmioty?”. Moje badania wskazują jednak na konieczność zachowania ostrożności w realizacji pozornie prostej recepty proponowanej w cytowanym tekście. Wnioski te formułuję następująco:

- 1) Intuicje uczniów klas I-III związane z odczuciem figur podobnych ujawniają się w stopniu dość wysokim podczas analizy gotowych wytworów, np. podczas oceny rozwiązań innych dzieci, w sytuacjach wizualnych. Intuicje te rozwijają się wraz z wiekiem. Im starsi uczniowie, tym częściej zwracają uwagę nie tylko na kształt figury, ale i na proporcje wymiarów. Niestety, uczniowie ci o wiele słabiej radzą sobie z samodzielnym rozwiązaniem zadania.
- 2) Duża część dzieci pojmuje powiększanie figury w sposób potoczny, bez aspektu miarowego, zwracając uwagę jedynie na ogólne zachowanie kształtu. Wprawdzie takie rozumienie nie jest zgodne z określeniem geometrycznym figur podobnych, ale jest dobrym punktem wyjścia do kształtowania tego pojęcia.
- 3) Numeryczne podejście uczniów do podobieństwa figur napotyka na szereg trudności. Są one związane z
 - a) samym problemem zmiany wymiarów, stwierdzeniem, co i jak ulega powiększeniu?
 - b) korelacją zmian wymiarów z zachowaniem kształtu.

Warto byloby ustalić, jakiego typu problemy związane z kształtowaniem pojęcia figur podobnych znajdują się w strefie najbliższego rozwoju dzieci poszczególnych klas.

Opisane tu badania pokazują, że wykorzystanie w dydaktyce matematyki dorobku innych dyscyplin naukowych nie jest w tym przypadku możliwe przez proste przeniesienie i interpretację teorii. Specyfika pojęć matematycznych wymaga bardzo istotnej modyfikacji, rozszerzenia, rozbudowania danej teorii. W

przypadku tworzenia pojęcia figur podobnych, nauczyciel nie może ukierunkować ucznia na pojęcie matematyczne tylko przez uogólnienie i abstrahowanie doświadczeń składających się na pojęcie potoczne. Okazuje się, że pojęcie potoczne „ma taki sam kształt” jest odległe od pojęcia geometrycznego figury podobnej.

Zbadanie treści pojęcia potocznego, intuicyjnego, może stanowić wskazówkę, co należy zrobić, aby w sposób możliwie operatywny kształtować pojęcie figur podobnych na lekcjach matematyki. Które fakty należy opracować w sposób dokładniejszy i bogaty w ćwiczenia, a które starać się matematyzować od razu? Wszelkie propozycje dydaktyczne kształtowania u uczniów naukowego pojęcia figur podobnych powinny opierać się na pogłębionej wiedzy o intuicjach dzieci związanych z potocznym pojęciem podobieństwa oraz na szczegółowej analizie aspektów matematycznych definicji relacji podobieństwa, niezmienników, cech podobieństwa niektórych klas figur, i operacji umysłowych z nimi związanych.

Literatura cytowana

D e m i d o w, W., 1989, *Patrzeć i widzieć*, Wydawnictwo Czasopism i Książek Technicznych, NOT – Sigma, Warszawa.

H a r t, K., 1981, Ratio and proportion, w: *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*, John Murray Ltd., London.

van den H e u v e l - P a n h u i z e n M., 1991, Ratio in special education, w: *Realistic mathematics education in primary school*, Freudenthal Institute, Utrecht.

K r y g o w s k a, Z., K u l c z y c k i, S., S t r a s z e w i c z, S., 1957, *Nauczanie geometrii w klasach licealnych szkoły ogólnokształcącej*, PZWS, Warszawa.

d e L a n g e, J., 1986, Geometria dla wszystkich czy w ogóle nie geometria?, *Dydaktyka Matematyki* 6, 43 - 82.

S i w e k, H., 1990, Pojęcie wielkości proporcjonalnych a pojęcie liczby u dzieci ze szkoły specjalnej w porównaniu z dziećmi ze szkoły masowej, *Dydaktyka Matematyki* 12, 193-202

S z e m i ń s k a, A., 1992, Rozwój pojęć geometrycznych, w: *Nauczanie początkowe matematyki, podręcznik dla nauczyciela*, tom 1, praca zbiorowa pod red. Z. Semadeniego, WSiP, Warszawa, wyd.II

T o u r n i a i r e, F., P u l o s, S., 1985, Proportional reasoning, A review of the literature, *Educational Studies in Mathematics* 16, 181 - 204.

T r e f f e r s, A., 1991, Didactical background of a mathematics program for primary education, w: *Realistic mathematics education in primary school*, Freudenthal Institute, Utrecht.

W i l l i a m s, E., S h u a r d, H., 1970, *Primary Mathematics Today*, Longman.

W y g o t s k i, L. S., 1971, *Wybrane prace psychologiczne*, PWN, Warszawa.

On the understanding of figure similarity by lower class primary school pupils

S u m m a r y

The article presents research into children's intuition in reference to the term "similar figures". The aim of the research was to find answers to the following questions:

- a) what properties do children pay attention to when they conclude that the figures are "the same only bigger", how do they understand the statement?
- b) what strategies do they employ in drawing figures in enlargement?

Having the two questions in mind, research was conducted in two stages where in turn:

- 1) the child recognised already prepared enlarged figures,
- 2) the child was to draw a figure in enlargement.

Research on the recognition of shapes carried out by physiologists and L.S. Wygotski's psychological theory of formulating concepts were taken into account when describing and analyzing obtained results.

The present research showed that the majority of pupils of classes I-III (about 60%) were able to select from among different drawings one in which the enlarged figure retained its shape and proportion. Another group of pupils, of a similar size, when analyzing drawings made by other children paid attention only to the retention of the figure's general shape. Together, the two groups accounted for about 90% of the examined pupils.

It became evident, however, that when it was necessary to enlarge a figure independently, the percentage of correct responses decreased greatly; the pupils made different mistakes in their drawings. The following four types of deviations from the correctly drawn figure were singled out:

- 1) the child enlarged only one dimension in a two dimensional figure,
- 2) the child changed the shape of the figure supposedly aiming at retaining the planned "height" and "width" (the triangle was cut off when it did not fit in the planned number of squares),
- 3) the child retained the shape of the figure (in this case the triangle) giving up the planned "height" and "width",
- 4) the child did not retain the angles when enlarging figures.

The obtained results show that the intuition of children of classes I-III in reference to similar figures is exemplified to a great degree during the analysis of ready results, i.e. evaluating solutions of other children in visual situations.

Such intuition matures as pupils grow. The older the pupil, the more often attention is paid not only to the shape of the figure but also to the proportion of the dimensions. Unfortunately, these pupils are less competent in solving a problem independently. A great number of children understand the enlargement of a figure typically without a measure aspect, paying attention only to the general retention of the shape. Although such understanding does not comply with the geometric meaning of similar figures, it is a good starting point for building up this concept.

The numerical approach of pupils to the similarity of figures meets a number of difficulties which are connected with:

- a) the problem itself of changing the dimensions, deciding what and how is to be enlarged,
- b) the correlation of changes of dimensions of a figure and its retaining the shape.