

JAN KONIOR

Katowice

Ministerstwo Nauki
i Szkolnictwa Wyższego



O POJĘCIU LOKALNIE DEDUKCYJNEJ ORGANIZACJI
NAUCZANIA MATEMATYKI

1. Wstęp

W dorobku dydaktyki matematyki okresu reform ostatnich dziesięcioleci znalazło się pojęcie lokalnie dedukcyjnej organizacji nauczania. Pojawiło się ono z jednej strony jako rezultat oceny tradycyjnych form przekazywania gotowych treści matematycznych, a z drugiej jako wyraz alternatywnych propozycji wobec niektórych żywiołowo powstających projektów dydaktycznych. Wyrosło bowiem na gruncie krytyki skierowanej przeciw istniejącym ujęciom geometrii aksjomatycznej, zbyt wcześnie wprowadzanym na teren szkolny i proponującym dość sztywne globalne podejście bez należytego przygotowania do zrozumienia metody, ale stanowiło też reakcję na żywiołowy proces powstawania coraz to nowych kierunków reformy szkolnej, które od początku pozostawały w swym skrajnym nurcie pod wpływem tendencji formalistycznych w samej matematyce.

Podstawowe idee i główne założenia lokalnie dedukcyjnej organizacji nauczania matematyki zostały sformułowane w wielu pracach Z. Krygowskiej i H. Freudenthala. Niektóre założenia są sprecyzowane explicite, w związku z charakterystyką samego pojęcia, niektóre zaś tkwią w opracowaniach dotyczących wielu innych zagadnień dydaktycznych i można je stamtąd odczytać. Inne wreszcie wypływają z podstaw i ogólnych założeń proponowanych koncepcji nauczania matematyki i zostały ujęte w powiązaniu z celami kształcenia oraz głęboką analizą zarówno całego złożonego procesu dydaktycznego, jak i samej matematyki, jej metody, współczesnych tendencji rozwoju i dróg historycznej ewolucji.

2. Niektóre wyjściowe założenia lokalnie dedukcyjnej organizacji nauczania matematyki

Analizując charakter myślenia matematycznego oraz problemy jego rozwijania w nauczaniu szkolnym, Z. Krygowska tak pisze: „Zasadniczy wpływ na rozwój matematycznego myślenia ucznia w etapie początkowym ma właściwa lokalnie dedukcyjna organizacja materiału nauczania oraz również właściwa dydaktyczna realizacja tej koncepcji. Przemyślane z góry następstwo sytuacji dydaktycznych powinno gwarantować stopniowe pogłębianie rozumienia dedukcji i rozszerzanie jej zasięgu; z początku tylko bezpośrednie wnioski, dalej sytuacje, gdy uczeń, nie mogąc sobie zapewnić wystarczających do rozwiązania jakiegoś konkretnego zadania informacji, musi je wysnuć z innych mu znanych, sytuacje, gdy już w warunkach zadania [...] ogranicza się zespół wiadomości, z których mu wolno w toku rozwiązywania problemu korzystać, sytuacje, gdy uczeń sam nakłada sobie takie warunki [...], gdy dwóch uczniów podaje różne definicje w intencji określenia tego samego przedmiotu i nasuwa się pytanie, czy są to definicje rzeczywiście równoważne, gdy występuje potrzeba zbadania »prawdziwości« twierdzenia nieoczywistego itp.” (Krygowska, 1977, str. 156-157).

Szczególną rolę przypisuje się sytuacjom, które - celowo organizowane - stawiają ucznia wobec konieczności dyskusji, mającej przekonać (początkowo kolegów, nauczyciela, wreszcie samego siebie) o prawdziwości wygłoszonej tezy, poprawności obmyślanej konstrukcji itp. W takich sytuacjach pojawia się naturalna potrzeba ustalenia zawsze pewnego zespołu przesłanek, tj. podstawy argumentacji. „Lokalnie dedukcyjna organizacja materiału nauczania polega właśnie na tym, że ta podstawa nie jest raz na zawsze dla całego kursu ustalona, ale że dedukcyjnie organizuje się tylko pewne jego fragmenty.” (Krygowska, 1977, str. 157).

W opisie jednego z eksperymentalnych kursów geometrii, zrealizowanego w szkołach holenderskich, znajdujemy następującą charakterystykę H. Freudenthala: „Nauka geometrii zaczyna się od badania intuicyjnego figur i przekształceń, przy czym uwzględnia się tu w bardzo małym stopniu dedukcję. Krok za krokiem rozwija się jednak strukturę, której poznanie jest ostatecznym celem badania, ale nigdy w takim stopniu, aby dojść do globalnej organizacji materiału. Po-przestaje się na lokalnej organizacji, co znaczy, że w drodze rozumowania sprowadza się twierdzenia nieoczywiste do twierdzeń uważanych za oczywiste bez ustalania a priori twierdzeń oczywistych w postaci aksjomatów.” (Freudenthal, 1970, str. 309).

Synteza podstawowych założeń daje wstępną charakterystykę, zgodnie z którą lokalnie dedukcyjna organizacja nauczania matematyki polega - w ogólnych zarysach - na tym, że:

(a) podstawa dedukcji w takim nauczaniu nie jest raz na zawsze z góry dla całego kursu ustalona; nie dokonuje się wyraźnego podziału wszystkich twierdzeń na wyjściowe (aksjomaty) i pochodne (twierdzenia udowodnione na gruncie aksjomatów);

(b) do opracowania dedukcyjnego przeznacza się tylko pewne, stosownie wybrane fragmenty materiału, w szczególności niewielkie odcinki o zwartej i przejrzystej budowie logicznej, oddzielne konstrukcje, procedury, a nawet pojedyncze twierdzenia; punktem wyjścia takiego fragmentu są zdania uzyskane na drodze niededukcyjnej lub też zdania kiedyś wcześniej udowodnione;

(c) nie definiuje się systematycznie pojęć, dopuszczając kontekstową charakterystykę, luźne określenia, częściowy opis itp.; definiowanie pojęć matematycznych odbywa się natomiast krótszymi bądź dłuższymi „seriami”, w ramach których podkreśla się istotę definiowania;

(d) uświadamia się uczniom w stosownych momentach kursu podstawę dedukcji, hierarchię i wzajemną logiczną zależność twierdzeń, stopniowo wskazując na konieczność przyjmowania wyraźnych założeń.

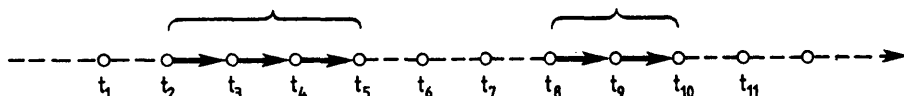
3. Dalsza charakterystyka pojęcia i uszczegółowienie niektórych wyjściowych założeń

Ktoś, kto próbuje udowodnić jakiś fakt z geometrii, której uczył się dawniej, lecz dotąd nie miał okazji powtarzać, może podać całkiem poprawny dowód, z tym jednak, że wykorzysta - być może - twierdzenia zbyt mocne i wyprowadzone w studiowanym kiedyś systemie później niż twierdzenie, którego dowodzi. Jest bowiem rzeczą zwykłą, że nie pamięta już dobrze ani aksjomatów systemu, ani tym bardziej kolejności wyprowadzonych twierdzeń. W praktyce matematycznej postępuje się nieco podobnie. Jeśli dowodzimy jakiegoś twierdzenia, to na ogół nie interesuje nas układ aksjomatów wyjściowych teorii. Spontaniczne rozumowanie nie odbywa się w ramach takiego systemu. Sprowadzamy twierdzenie do znanych nam przesłanek, bądź dowiedzionych wcześniej, bądź takich, z którymi wiążemy przekonanie o możliwości ich wyprowadzenia z układu aksjomatów. Tak stosowaną dedukcję zwykło się nazywać dedukcją lokalną. Wyszkolony matematyk jest świadom, które fragmenty dowodu potraktował intuicyjnie i jak należałoby rozumowanie

uzupełnić. Wie również, jakie kroki należy poczynić, aby ostatecznie sprowadzić tezę do aksjomatów. Na ogół nie ma tej świadomości uczeń; działa on zresztą w innej sytuacji. Tym niemniej w szkole postępujemy podobnie. Dedukcja lokalna jest tu stosowana często na przemian z wnioskowaniami innych typów (analogia, indukcja niezupełna itp.).

Dedukcja lokalna jest więc spontanicznym (niesformalizowanym) rozumowaniem z pominięciem szerszego systemu. Uprawiając dedukcję lokalną w praktyce dążymy przede wszystkim do znalezienia poprawnego wywodu (argumentacji logicznej). O tworzenie lub rekonstrukcję całej teorii specjalnie nie martwimy się, odkładając ewentualnie rzecz na później. Najczęściej - w skali globalnej - nie będziemy jej rozbudowywać wcale. Nie staramy się zatem o to, aby dla dowodzonej tezy znaleźć określone miejsce w ramach systemu; wykorzystujemy natomiast te środki, które - według obrazowego określenia - mamy bezpośrednio „pod ręką”.

Bywa jednak, że posługując się taką dedukcją, wyprowadzamy kolejno kilka twierdzeń z sobą powiązanych i wynikających z pewnego układu założeń, jako wspólnej podstawy. Takie grupy twierdzeń, przedzielone w szkolnej realizacji odcinkami materiału opracowanego z przewagą niededukcyjnych sposobów uzasadniania, nazywa się nieraz wysepkami dedukcyjnymi. Rysunek 1 przedstawia - w porządku podyktowanym bieżącą realizacją materiału - ciąg kolejnych twierdzeń t_i , w którym schematycznie wyróżniono dwie takie wysepki.



Rys. 1. Wysepki dedukcyjne

Kolejne twierdzenia w obu grupach - z wyjątkiem t_2 i t_8 grających rolę podobną do roli aksjomatów - wynikają z poprzednich. Natomiast na przykład twierdzenia t_6 i t_7 uzyskano w przedstawionym tu ciągu na drodze niededukcyjnej (brak strzałki).

Rysunek 1 możemy interpretować bez skojarzeń z konkretnymi sposobami realizacji w klasie i bez szczegółowego obmyślenia takich sposobów, biorąc pod uwagę jedynie stronę rzeczową, a więc treści merytoryczne, czyli pewien zbiór twierdzeń (definicji) i związków między nimi. Tak właśnie postępuje nauczyciel, przygotowując wstępnie materiał dla danej klasy na cały rok szkolny lub semestr. Uwzględniając konstruowanie wysepek dedukcyjnych, można dokonywać wyboru twierdzeń, definicji, przykładów itp., a następnie porządkować ten materiał,

na ogół na różne sposoby. To postępowanie, ograniczone do układu treści merytorycznych i przebiegające jeszcze bez kontaktu z uczniami w klasie, nazywamy lokalnie dedukcyjną organizacją materiału nauczania. O takiej organizacji możemy mówić, mając w szczególności na uwadze gotowe treści zawarte w jakimś podręczniku, nawet niekoniecznie adresowanym do ucznia szkoły podstawowej czy średniej.

Gdy natomiast mówimy o lokalnie dedukcyjnej organizacji nauczania matematyki, mamy na uwadze również pewne działania nauczyciela, a pośrednio także i uczniów oraz ich aktywności w toku procesu lekcyjnego. Działania te są zespołami czynności racjonalnych, a więc skierowanych na określone cele dydaktyczne. Można by zaproponować następujący zestaw takich celów.

1^o Ukazywanie (wyodrębnianie w gotowym materiale - np. podręcznikowym) lub konstruowanie (tworzenie na bieżąco) wysepek dedukcyjnych oraz uświadamianie uczniom związanej z tym metody.

2^o WYROBIENIE u uczniów ogólnej orientacji w metodach uzasadniania i typach rozumowań; w szczególności zdobycie praktycznej umiejętności odróżniania - w toku własnych działań - elementów metody dedukcyjnej od innych stosowanych metod.

3^o Przyswojenie uczniom - w praktycznym i dostępnym im zakresie - podstawowych pojęć i operacji metodologicznych (twierdzenie, założenie, dowód, kontrprzykład, hipoteza, definicja, udowodnić twierdzenie, skorzystać z twierdzenia, obalić hipotezę, uogólnić, zdefiniować itp.).

4^o Doprowadzenie do zrozumienia, że każdy dowód wymaga określonej podstawy, tj. zespołu przesłanek, na gruncie których może być przeprowadzony.

5^o Praktyczne zrozumienie (w oparciu o konkretne przykłady), że mogą istnieć różne układy zdań wyjściowych potrzebnych do udowodnienia danego twierdzenia lub grupy twierdzeń.

6^o Zdobycie przez uczniów podstawowych umiejętności w zakresie budowania prostych definicji i operowania nimi.

7^o Doprowadzenie do zrozumienia, że poprawna definicja wykorzystuje pojęcia już znane; ukazanie procesu definiowania (a nie tylko pojedynczych definicji) w obrębie jakiegoś fragmentu wiedzy.

8^o WYROBIENIE umiejętności schematyzacji, dostrzegania i wyabstrahowywania struktur z bogatych kontekstów oraz „nakładania” tych struktur na inne, odległe treściowo układy przedmiotów i sytuacji.

9^o Opanowanie umiejętności porządkowania i systematyzacji rozważanych obiektów oraz uzyskanych wyników.

10⁰ Rozwijanie innych technik intelektualnych i postaw ogólnych związanych wprost lub pośrednio z metodą matematyczną, ale prowadzących do kwalifikacji wykraczających poza matematykę.

Cele 1⁰-10⁰ zostały sformułowane jedynie przykładowo; nie należy sądzić, że ich lista jest tutaj kompletna (por. w związku z tym: Konior, 1975, str. 39-68 i 160). Tym niemniej może ona stanowić składnik syntetycznej charakterystyki lokalnie dedukcyjnej organizacji nauczania. Uwzględniając przede wszystkim podstawowe idee (o których była mowa w rozdziałach 1 i 2) i traktując podane cele paradygmatycznie, przez lokalnie dedukcyjną organizację nauczania matematyki rozumiemy całokształt działań (czynności) nauczyciela (pośrednio również i uczniów) w procesie dydaktycznym, ukierunkowanych na realizację tych idei oraz celów 1⁰-10⁰.

Charakterystyka ta nawiązuje do przyjętego w dydaktyce ogólnej określenia procesu dydaktycznego jako systemu celowych czynności, realizowanych w odpowiednio przygotowanych warunkach. Zakresowo obejmuje ona również lokalnie dedukcyjną organizację materiału nauczania.

4. Komentarz uzupełniający i przykłady

Lokalnie dedukcyjna organizacja nauczania matematyki⁽¹⁾ nie polega jedynie na budowaniu wysepek dedukcyjnych. W ogóle nie należy sądzić, że organizacja lokalna - forma nauczania odnosząca się do różnych poziomów szkolnych, od starszych klas szkoły podstawowej do matury, obejmuje wyłącznie porządkowanie oparte na dowodzeniu i kryterium wynikania logicznego.

Wśród założeń lokalnie dedukcyjnej organizacji nauczania znajdujemy postulaty, aby tam, gdzie to możliwe, nie rozpoczynać od materiału już gotowego. W uczeniu się matematyki ważne są postawy poszukiwawcze i wykrywanie faktów. Porządkowanie następuje w drugiej kolejności. Aby dokonać systematyzacji, trzeba mieć co porządkować. W lokalnie dedukcyjnej organizacji nauczania porządkowanie jest zresztą ogólniej rozumiane. Obok porządku nawiązującego do formalnych związków logicznych i dowodzenia, które w pełniejszym wymiarze pojawi się później, mamy tu klasyfikację, dostrzeganie wspólnego schematu, włączanie doń szczególnych przypadków itp. Kształcącym momentem jest na przykład

(1) Nazwy tej będziemy dalej używali w różnych wariantach stylistyczno-grammatycznych, jak to jest zresztą praktykowane w literaturze dydaktycznej; w szczególności dopuszczamy skróty zastępujące w odpowiednich kontekstach jej pełne brzmienie.

stworzenie uczniom szansy, choćby tylko w części samodzielnego zauważenia, że mierząc odcinki, pola figur płaskich, objętości brył, kąty itp. w gruncie rzeczy postępują podobnie. Można ten moment w organizacji nauczania zaplanować, zbliżając się doń przez odpowiednie zabiegi przeprowadzane w ciągu dłuższego czasu. Tak przygotowany moment może stać się okazją do podsumowania obszerniejszego wątku tematycznego w kursie szkolnym, zaś nadrzędny schemat pojawi się w sposób naturalny, nawet gdy uczniowie nie będą precyzowali w sensie formalnym ogólnych warunków zachodzących w każdej z wymienionych sytuacji szczególnych, ani tym bardziej budowali ogólnej teorii miary.

Walory uporządkowanego systemu wiedzy lub jego fragmentu i zalety stosowanej przy tym metody może w pełniejszy sposób dostrzec ten uczeń, który przedtem sam wykrywał fakty i doświadczył błędzenia. W tym szczególnym przypadku nawet pierwotny chaos (celowo przez nauczyciela wkalkulowany w całe przedsięwzięcie dydaktyczne) oraz sytuacja otwarta mogą stanowić impuls do nowych pomysłów, racjonalizacji działań, porządkowania itp.

Nauczanie matematyki oparte na lokalnych dedukcjach obejmuje w szczególności okres, w którym uczeń znajduje się dopiero na początku drogi prowadzącej do abstrakcyjnego i formalnego myślenia. Umiejętność dedukowania nie jest od początku dana; przewiduje się, że będzie w ramach takiego nauczania systematycznie rozwijana. Zaczynamy od sytuacji najprostszych, w miarę naturalnych. Specjalne znaczenie w tym okresie ma umiejętne wykorzystywanie sytuacji spontanicznie nadarżających się na lekcji, w których dedukcja pojawia się autentycznie jako naturalna część szerszego działania ucznia i jako zwykła potrzeba. Rolą nauczyciela jest dyskretne inspirowanie tego spontanicznego procesu, umiejętne rozkładanie akcentów i zwracanie uwagi na charakter nowej metodologii.

Oto uczeń zaproponował, jak skonstruować okrąg przechodzący przez trzy niewspółliniowe punkty. Robi na tablicy rysunek wyraźnie nieudany (co w dydaktycznym bilansie końcowym okaże się okolicznością sprzyjającą). Pozostając przy tym rysunku, uczeń broni swej propozycji ze zdwojoną energią. Stopniowo rozwija się dyskusja, w której przekonuje kolegów, że okrąg zbudowany według jego przepisu „musi” przejść przez dane punkty. Padną w niej kolejne argumenty, na które w końcu zgodzą się oponenci; całkiem zwyczajnie pojawią się wcześniej poznane definicje i własności. Nie ma tu nakazów i wyraźnie narzuconych rygorów formalnych.

Kolejny przykład jest związany z faktem, że promień można sześć razy „odłożyć” na okręgu. Każdy uczeń spotyka się z tą konstrukcją w kursie szkolnym.

Specjalnie ważne jest pierwsze zetknięcie się z twierdzeniem; dla rozwoju matematycznej postawy i myślenia ucznia nie jest obojętne, jak poznanie faktu przebiegało. Mogło być tak, że ktoś uczniowi wprost zakomunikował gotową własność i od razu podał przepis, jak rysować sześciokąt foremny o danym boku. Taki epizod – jak wiele innych – zapewne przeszedłby bez echa. Ale nauczyciel mógł obrać inną drogę, odpowiednio inspirując rozwój sytuacji w klasie i starając się zaintrygować uczniów tym faktem. W toku umiejętnie kierowanej dyskusji uczniowie sami przytoczą argumenty na rzecz wspomnianej tezy. Zadowolili nas, gdy rozważany fakt wyjaśnili tym, że kąty trójkąta równobocznego mają po 60° . Ujęty zostanie w sposób naturalny związek pomiędzy poznanymi twierdzeniami; ujęcie to stanie się – być może – pierwszym krokiem uczniów do nowej aktywności związanej z myśleniem abstrakcyjnym.

Analizując nieco z innej strony ten przykład, H. Freudenthal podkreśla związek lokalnego porządkowania w geometrii ze ścisłością. Rozumując, uczeń przytacza te argumenty, które mu wystarczają, i nie dostrzega konieczności wykorzystania innych jeszcze przesłanek. Arbitralna interwencja oraz informowanie go z zewnątrz o tym, co powinien jeszcze wykorzystać, są skazane na niepowodzenie dotąd, dopóki nie doświadczy on potrzeby zwiększenia precyzji rozumowań. Lokalne porządkowanie jest właśnie działaniem na pewnym poziomie ścisłości. „Analizuje się geometryczne pojęcia i związki do pewnej granicy, powiedzmy do tego momentu, w którym już gołym okiem widać, czym są pojęcia, a także to, że twierdzenia są prawdziwe. Tak rozumuje się zawsze w geometrii naszej przestrzeni życiowej; nigdy na podstawie aksjomatów, które leżą zbyt daleko [...]” (Freudenthal, 1973, str. 142).

W wielu przypadkach wymogi stawiane dedukcji na omawianym etapie szkolnego nauczania muszą być z konieczności dość liberalne. Sprowadza się twierdzenia nieoczywiste do twierdzeń uważanych przez uczniów za oczywiste, niekoniecznie nawet wcześniej opracowanych na lekcjach i wyodrębnionych jako samodzielne tezy. Tego typu postępowanie jest relatywne, gdyż horyzont oczywistości jest zmienny. Zapewne jest inny dla różnych uczniów, nawet tej samej klasy. Zależy od wieku ucznia, ale zależy też od wyboru drogi prowadzącej do rozwiązania problemu (stosowny wybór modelu, sposobu reprezentacji itp.); nie bez wpływu jest tutaj również charakter i rodzaj materiału szkolnego, w którym rozważania są przeprowadzane.

Gdy uczniowie potrafią już konstruować pełniejsze dowody pojedynczych twierdzeń, możliwe są także zróżnicowane działania w ramach lokalnie dedukcyjnej organizacji kursu. Przykładowo można tu wymienić następujące zabiegi i kierunki działań:

(a) wybór przez nauczyciela twierdzeń, które będą dowodzone w kursie; chodzi również o wybór takich metod, aby zabiegi w toku dowodzenia wszystkich tych twierdzeń gwarantowały stopniowy rozwój określonych aktywności (lokalna organizacja w tym przypadku może na przykład polegać na kilkakrotnym powracaniu do dowodu tego samego twierdzenia w celu uściślenia rozumowań, bądź ukazania możliwości przeprowadzenia argumentacji na innej zupełnie drodze);

(b) wybór pojęć, których gotowe definicje będą podane przez nauczyciela (podręcznik) oraz wyodrębnienie tych, które będą definiowane z pełnym udziałem uczniów;

(c) wyodrębnienie - przez analizę materiału matematycznego - aktywności związanych z metodą matematyczną; chodzi o aktywności, które w drodze transferu mogłyby stać się użyteczne poza matematyką, w innych dziedzinach i przyszłej działalności ucznia.

Powyższe sugestie ogólne wiążą się wyraźnie z nauczaniem ukierunkowanym na rozwijanie aktywności matematycznych (warto nadmienić, że bliższa charakterystyka natury tych aktywności jest ważnym zadaniem dydaktyki matematyki; dalszych badań wymaga także samo pojęcie lokalnie dedukcyjnej organizacji nauczania i w tym zakresie zarówno teoria, jak i praktyka stoją przed problemami wymagającymi rozwiązania).

Hasło „dowodzenie” - używane w kontekście nauczania szkolnego - bywa nieraz w praktyce zbyt mechanicznie kojarzone z obrazem sugerowanym przez samą matematykę, gdzie autorzy dążą do nadawania twierdzeniom postaci coraz bardziej ogólnej, zaś dowody stały się odrębnymi procedurami, nierzadko wyrafinowanymi. W nauce wypracowano na użytek dowodzenia specjalny język, a tradycja przekazała dorobek pokoleń w zakresie prezentacji rozumowań matematycznych i sposobów redagowania dowodów. Sposoby te stały się obowiązującymi kanonami. Funkcjonują więc określone wzorce, schematy redakcyjne, kategorie metodologiczne, standardowe metody dokonywania skrótów; nawet grafika i typografia są środkami, którymi operują klasyczne teksty matematyczne. Obraz ten nie powinien przesłaniać możliwości przeprowadzenia dedukcyjnych rozumowań w szkole również bez tego paradygmatu i bez redagowania dowodów, co dla ucznia okazuje się często oddzielnym zadaniem. Obok świadomie wyodrębnionych konstrukcji dowodowych można przeprowadzać krótkie okazyjne dedukcje, zwłaszcza gdy uczniowie początkują w tym zakresie. Tak zresztą było w porządku historycznym; przed pierwszym świadomie zbudowanym i wyodrębnionym dowodem starożytni przeprowadzali wiele rozumowań dedukcyjnych włączonych do praktycznych zagadnień, na przykład mierniczych lub budowlanych.

Dowodzenie kojarzy się nieraz uczniowi z oddzielną ceremonią zaczynającą się od zapowiedzi „Dowód”. Wtedy rozpoczął - w jego przekonaniu - naukę dowodzenia, gdy ten ceremoniał zastosowano po raz pierwszy. Natomiast krótkich, zwykłych argumentacji, jakich było wiele „po drodze” nie wiąże z dowodzeniem. Na przykład równość $27 - 12 = 15$ także jest twierdzeniem (choć zwykle nie używamy tej nazwy), które uczeń może krótko uzasadnić tak, jak inne twierdzenia. Czasami dobre okazje do prostych wnioskowań dedukcyjnych nie są wykorzystywane. A szkoda, bo wówczas przejście od „niedowodu” do dowodu byłoby płynne, zaś dłuższe łańcuchy inferencji, zatytułowane już jako dowody, mogłyby być odbierane przez uczniów bardziej naturalnie. Pojęcie dowodzenia w szkole powinno być rozumiane mniej szablonowo i jednocześnie szerzej niż dotąd; proste naśladowanie niektórych formalnych paradygmatów w nauce nie od razu jest możliwe, ani nie zawsze konieczne.

Organizując nauczanie oparte na lokalnych dedukcjach można budować wysepki dedukcyjne dwoma sposobami. Budowanie wysepki „od góry” zakłada równoległe wykonywanie dwóch czynności: wprowadzania twierdzeń oraz ich porządkowania związanego z dedukcyjnym uzasadnianiem. Przyjmuje się jedno lub kilka twierdzeń za punkt wyjścia i wyprowadza kilka następnych. Tak postępujemy w grupie uczniów bardziej już zaawansowanych, co nie oznacza, że twierdzenia wyjściowe mają być arbitralnie narzucone. Będą to na ogół fakty wcześniej uczniom znane i w pewien sposób kiedyś uzasadnione; powinno się je teraz jednak wydobyć i skompletować. Metodologię dedukcyjną zmieniamy po pewnym czasie na empiryczną lub mieszaną, aby w stosownym momencie kursu znów powtórzyć procedurę.

Drugi sposób dochodzenia do wysepki dedukcyjnej polega na jej ujawnieniu ex post. Nawiązujący do literatury przykład (Stoliar, 1974, str. 152-154) zostanie tu przedstawiony w wersjach odpowiadających różnym poziomom zaawansowania uczniów w rozumowaniach matematycznych; dotyczy on materiału o równoległoboku, z którym uczniowie spotykają się więcej razy w kursie.

Rozpoczynamy od fazy gromadzenia (izolowanych) faktów związanych z równoległobokiem. Uczniowie spotkali się już wstępnie z tą figurą, potrafili m.in. rozpoznawać równoległoboki i kreślić je z użyciem różnych przyrządów geometrycznych. W wyniku zorganizowanej obserwacji, kreślenia, pomiarów i częściowo wcześniejszych doświadczeń oraz intuicji stwierdzają, że w równoległoboku:

- (1) Boki przeciwległe są równoległe (dwie pary takich boków).
- (2) Boki przeciwległe są przystające (dwie pary takich boków).
- (3) Suma miar dwóch kątów kolejnych równa się 180° .

- (4) Kąty przeciwległe są przystające.
- (5) Przekątna dzieli figurę na dwa trójkąty przystające.
- (6) Przekątne się połowią.

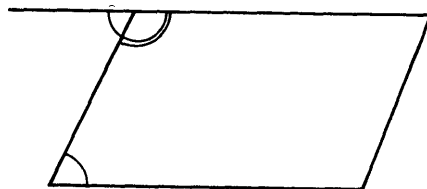
W tej fazie postępowania nie zakładamy wyprowadzania jednych własności z innych; zależy nam jedynie na skompletowaniu ich listy. Dopuszczamy przy tym różne metody. Zdania (1)–(6) zostały wypowiedziane skrótowo i sformułowane w pewnym kontekście słownym oraz sytuacyjnym; jako część tego kontekstu traktujemy sporządzony na tablicy rysunek. Zauważmy, że formalnie nie wyróżniono tu definicji równoległoboku. Uzupełnienie zdań oraz wyodrębnienie definicji nastąpi później; do tego samego tematu zamierzamy bowiem jeszcze powrócić, gdy uczniowie nabiorą większego doświadczenia.

Już jednak uczniów początkujących w dedukcji warto umiejętnie naprowadzać na myśl, że jedna z wymienionych własności może być uzyskana bez sprawdzania na rysunku (choć ten bywa potrzebny do skupienia uwagi), bez wykonywania pomiarów itp.; można ją otrzymać w drodze rozumowania. Pomocne okażą się przy tym inne własności i znane wcześniej fakty. W rezultacie wstępnego, tylko fragmentarycznego porządkowania może pojawić się w klasie następujący układ zdań:

- suma kątów przyległych równa się 180° .

- Gdy dwie proste przecięte trzecią są równoległe, to kąty naprzemianległe wewnętrzne są przystające.

- Przeciwległe boki równoległoboku są równoległe.



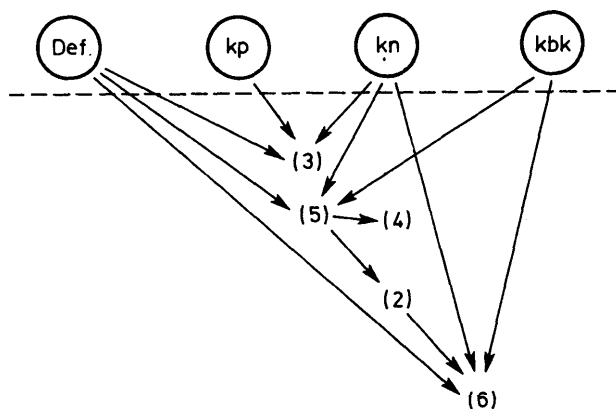
Rys. 2. Rysunek sporządzony na tablicy

- Suma miar dwóch kątów kolejnych równoległoboku równa się 180° .

Możemy tu zrezygnować z uściślenia wypowiedzi uczniów, gdyż celem próby jest doprowadzenie do pierwszego spostrzeżenia przez nich możliwości otrzymania na drodze myślowej jednego ze zdań (1)–(6) (pod linią przerywaną) z innych zdań (wypisanych nad tą linią). Własność dotycząca sumy dwóch kątów kolejnych równoległoboku była poprzednio rezultatem działań empirycznych, teraz pojawia się na tle innych zdań. Wydaje się, że to zestawienie jest ważnym doświadczeniem metodologicznym ucznia.

Kiedy już uczniowie będą bardziej zaawansowani w rozumowaniach, wspomniane porządkowanie ex post możemy doprowadzić do końca. Umiejętnie kierowani uc-

niowie powinni dojść do ustalenia, że jedna z wymienionych własności powinna stanowić podstawę sformułowania definicji równoległoboku, zaś pozostałe można uzyskać wykorzystując dodatkowo znane wcześniej twierdzenia. Wykreślony na lekcji diagram (rys. 3), będący rezultatem wspólnej dyskusji i analizy, ilustruje za pomocą strzałek fakt wynikania jednych zdań z innych (symbole Def., kp, kn, kbk oznaczają odpowiednio definicję równoległoboku opartą na kryterium równoległości przeciwległych boków, warunek dotyczący sumy miar kątów przyległych, twierdzenie o równości miar kątów naprzemianległych wewnętrznych i cechę „kąt - bok - kąt” przystawania trójkątów).



Rys. 3. Diagram ilustrujący wynikanie twierdzeń

Diagram przedstawia jeden z możliwych sposobów uporządkowania. A co będzie, jeśli inny z wymienionych pierwotnie warunków uczynimy podstawą definicji równoległoboku? - pyta nauczyciel. Uczniowie mają za zadanie przebudować diagram. To ćwiczenie - wykonane znów pod dyskretnym kierunkiem nauczyciela - sprzyja kształtowaniu otwartej postawy wobec definicji i może wnieść nowe elementy do rozumienia przez ucznia pojęć twierdzenia i dedukcji.

Realizując tego rodzaju cele związane z lokalnie dedukcyjną organizacją nauczania osiągniemy postęp, gdyż nasi uczniowie dostrzegą, że zapomnienie jakiegoś twierdzenia w matematyce nie zawsze musi być kłopotliwe. Znając inne, można zagubiony fakt często odtworzyć; taka jest struktura wiedzy matematycznej. Nawet bardzo naiwna świadomość tego stanu rzeczy może być uznana za praktyczny miernik pewnego już wyrobienia metodologicznego ucznia.

Inny przykład lokalnie dedukcyjnej organizacji (w bardziej już zaawansowanej metodologicznie formie) jest związany z działem dotyczącym jednokładności

ci i podobieństwa. Realizujemy ten materiał w zwykły sposób, koncentrując uwagę na stronie merytorycznej i zadaniowej; dowodzimy wybranych twierdzeń i staramy się o powiązania z wcześniejszymi tematami. Na zakończenie działu planujemy natomiast powtórkę, w której materiał zostanie uporządkowany logicznie (Konior, 1975, str. 148-154). Twierdzenia, które stanowią człony spójnej wysepki dedukcyjnej, niekoniecznie muszą być opracowywane na lekcjach bezpośrednio jedno po drugim. W czasie powtórzenia dokonuje się nieraz selekcji materiału, ukazując wybrane twierdzenia jako pewną strukturę.

Wysepki dedukcyjne, czy to zbudowane „od góry”, czy też ujawnione ex post mogą stanowić formę organizacyjną pracy także wówczas, gdy na lekcjach rozwiązujemy zadania i przeprowadzamy ćwiczenia. Wiele celów związanych z lokalną organizacją nauczania można jednak realizować w toku rozwiązywania problemów i zadań również bez stosowania wysepek dedukcyjnych. Ten sposób postępowania ilustruje przykład wykorzystujący następujące, zaplanowane na lekcję zadanie:

Dane są cztery zestawy informacji:

$$(I_2, I_5), \quad (I_2, I_4, I_6), \quad (I_1, I_5), \quad (I_2, I_3),$$

z których każdy dotyczy pewnego trójkąta (informacje podane są niżej). Co można w każdym z tych czterech przypadków wywnioskować o trójkącie?

I_1 - Trójkąt ma oś symetrii.

I_2 - W trójkącie można wskazać taki bok, którego środek pokrywa się z końcem odcinka będącego wysokością tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka leżącego naprzeciw wskazanego boku.

I_3 - Jeden z kątów trójkąta jest równy 60° .

I_4 - Można wskazać takie dwa wierzchołki trójkąta, że po odbiciu symetrycznym tego trójkąta względem prostej wyznaczonej przez te wierzchołki trójkąt ten wraz z jego obrazem utworzą czworokąt nie będący figurą wypukłą.

I_5 - Trójkąt jest prostokątny.

I_6 - O jednym z boków trójkąta wiadomo, że jest dwukrotnie większy od wysokości poprowadzonej w tym trójkącie z wierzchołka leżącego naprzeciw tego boku.

Nauczyciel zakłada, że uczniowie przeprowadzą - bez pisemnego redagowania rozwiązań - krótkie, na wpół intuicyjne rozumowania, ilustrując sytuację rysunkiem. Pominiecie formalnych szczegółów oraz łączne rozważanie zestawu ćwiczeń (zadanie jest serią czterech zagadnień) pozwala uświadomić uczniom, że: (1) wszelki rzetelny wywód i argumentacja wymagają wcześniejszego usta-

lenia przesłanek, (2) charakterystyczne dla poprawnego wnioskowania jest to, że uznajemy wniosek na podstawie przesłanek, (3) te same konkluzje można uzyskać wychodząc od różnych układów założeń, (4) dane przesłanki wolno zastąpić równoważnymi.

Istotne znaczenie ma w tym przykładzie fakt, że cztery zagadnienia występują seryjnie (łącznie); uczniom stwarza się więc okazję do porównania różnych zespołów przesłanek. W tradycyjnym układzie występują również sytuacje zadaniowe stanowiące bliskie odpowiedniki każdego z czterech podanych zagadnień, ale są to przypadki czasowo izolowane i raczej nigdy bezpośrednio nie konfrontowane z sobą.

Przykładem innego ćwiczenia, które może służyć realizacji celów związanych z lokalnie dedukcyjną organizacją nauczania matematyki, jest polecenie typu: zredukować zespół danych tak, aby dane zadanie (z nadmiarem informacji) dało się jeszcze rozwiązać. Jeśli rozwiązań jest kilka, to istnieje dodatkowa okazja do sprowokowania interesujących porównań i refleksji, które mogą poczynić sami uczniowie.

5. Ogólne uwagi związane z praktyką nauczania

Obserwując pracę szkół w określonym czasie, można by mówić o funkcjonującym tu pewnym doświadczeniu zbiorowym (na przykład w zakresie nauczania matematyki), czy też o stylu pracy szkoły (stylu nauczania). Ten styl - aktualny stan praktyki nauczania jest ukształtowany przez tradycję i częściowo „przekazywany” w kontaktach zawodowych młodszemu pokoleniu. Składają się nań do pewnego stopnia także podręczniki, niepisane, ale obowiązujące i respektowane zasady, wzorce, zwyczaje i rozwiązania, aktualne tendencje, nawet w pewnym stopniu „modne” prądy, dorobek nadzoru pedagogicznego, literatura metodyczna itp. Swe istnienie zaznaczył on częściowo w toku intensywnych reform szkolnych (stosunkowo łatwo można zmienić programy, sformułować nowe cele kształcenia, ale przyzwyczajenia w pracy szkoły pozostają na dłużej). Mówi o tym T.J. Fletcher, podkreślając, że „nauczanie w większym stopniu opiera się na zastanej tradycji. Nauczyciel uczy tak, jak uczono jego i jak w jego pojęciu uczą inni”. (Fletcher, 1986, str. 95). Autor zwraca uwagę na częściowo deklaracyjny - w tym stanie rzeczy - charakter niektórych celów nauczania matematyki, zwłaszcza celów ogólnych, długofalowych. Wolno sądzić - m.in. na podstawie doniesień w literaturze i opierając się na używanych podręcznikach - że wspomniany styl pracy, na przykład szkoły angielskiej bądź szwedzkiej, jest inny niż szkoły polskiej.

Styl nauczania także ulega zmianom, nie tak gwałtownym jednak i nie zawsze szybko zauważalnym.

Takie pojęcia dydaktyczne, jak na przykład zasada trwałości czy transfer, mogą być odniesione do rzeczywistości szkolnej w zasadzie niezależnie od wspomnianego wcześniej aktualnego stylu nauczania. Zmiana stylu nie wpływa zasadniczo na sposób ich rozumienia. Nieco inaczej jest, gdy idzie o pojęcie lokalnie dedukcyjnej organizacji nauczania matematyki. Z uwagi na występowanie różnych aktualnych stylów, jak też ze względu na zachodzące stopniowo zmiany w stylu pracy szkoły, pojawiają się sytuacje, w których podana wcześniej charakterystyka pojęcia nabiera aktualnego znaczenia w konfrontacji z danym stylem; znaczenie to jest niejako dodatkowo uregulowane przez ten stan szkoły i nauczania, do którego charakterystyka się odnosi. Jeśli więc pojęcie lokalnie dedukcyjnej organizacji nauczania matematyki odnosimy do jakiejś konkretnej rzeczywistości szkolnej (stylu nauczania), to zostaje ono w ten sposób dookreślone w kontekście owego stylu pracy szkoły; styl ten bowiem może na przykład akcentować jedne cele kształcenia (środki, metody i formy), a zupełnie pomijać inne, kiedyś aktualne i dominujące.

Nasuwa się również uwaga związana z granicznym charakterem dydaktyki matematyki, mającej własny obszar badań, ale rozwijającej się na styku różnych dyscyplin. Charakter ten sprawia, że w toku konstrukcji i określania niektórych jej pojęć wykorzystuje się równocześnie pojęcia matematyczne o stałym znaczeniu i ostro wyznaczonych zakresach oraz inne pojęcia i nazwy nieostre. Te ostatnie cechują się chwiejnością i kontekstowością m.in. dlatego, że dotyczą często złożonych procesów, zjawisk i obiektów o charakterze zmiennym (na przykład niektórych elementów składowych zmiennego stylu nauczania).

Formułując na tle wcześniejszych spostrzeżeń refleksję ogólną, zauważmy, że determinantami znaczenia pewnych pojęć dydaktycznych - poza ich wyodrębnionymi określeniami (charakterystyką, opisowymi definicjami) - mogą być ogólne warunki i założenia wynikające z całego systemu dydaktycznego (zespołu tez), na gruncie którego te określenia przyjęto, oraz aktualny styl pracy szkoły, do której odnosimy owe pojęcia.

6. Praktyka szkolna w danym okresie a lokalnie dedukcyjna organizacja nauczania (różne interpretacje pojęcia)

Sformułowane przez H. Freudenthala idee lokalnej organizacji wynikają z jego ogólnej koncepcji matematyki ucznia jako aktywności. Dla tej koncepcji ważny jest etap poprzedzający gotowe już wyniki sformułowane (na przykład w podręcz-

nikach) w postaci zwięzłych twierdzeń wyrażonych w specjalnym języku i ułożonych w pewnej kolejności. Dedukcja nie jest w tej aktywności uczniów ani jedyną, ani nawet najważniejszą metodą. Istotne znaczenie ma - co już było częściowo podkreślone - szerzej rozumiane porządkowanie. Obejmuje ono porządkowanie fragmentów rzeczywistości, a więc obiektów pozamatematycznych, później wstępną systematyzację wyników obserwacji i doświadczeń, porządkowanie wiedzy, tj. bardzo luźno jeszcze ujętych i tylko częściowo powiązanych faktów oraz intuicyjnych struktur - aż do takiego poziomu, na którym wprowadzamy definiowanie i dowodzenie.

Styl nauczania podporządkowany rozwijaniu aktywności matematycznych i ogólnie pojętej systematyzacji stwarza ramy dla praktycznej interpretacji pojęcia lokalnie dedukcyjnej organizacji (oznaczymy tę interpretację przez L_1). Przy tym rozumieniu lokalnie dedukcyjnej organizacji nauczania struktury naukowe i porządek w gotowej teorii matematycznej nie stanowią bezpośrednich wzorców kolejności pracy na lekcji; takie cele, jak np. 1° (str.103) schodzą na plan dalszy, a w skrajnym przypadku nie są realizowane wcale.

Interpretacja L_1 różni się od innego rozumienia lokalnie dedukcyjnej organizacji nauczania, mocno eksponującego cel 1° przy jednoczesnym słumieniu lub nawet odrzuceniu niektórych pozostałych celów przytoczonej listy. Ten sposób rozumienia (nazwijmy go L_2) realizuje się w warunkach nauczania, które zachowuje porządek dość ściśle wzorowany na układzie naukowym materiału i w zasadzie odnosi swe cele do gotowych teorii matematycznych. W najbardziej skrajnych przypadkach ujęcie L_2 można sobie wyobrazić w praktyce jako nauczanie gotowych „miniteorii”, przebiegające podobnie jak tradycyjna realizacja niektórych kursów aksjomatycznych, rozpoczynających się od narzuconej listy aksjomatów i opartych na wykładowo przeprowadzanych dowodach. W tym ujęciu (jego ślad można znaleźć także w literaturze) lokalnie dedukcyjna organizacja rozpoczyna się zasadniczo tam, gdzie rozpoczynamy logiczne wywodzenie jednych twierdzeń z innych, a kończy z chwilą zmiany tej metodologii na inną.

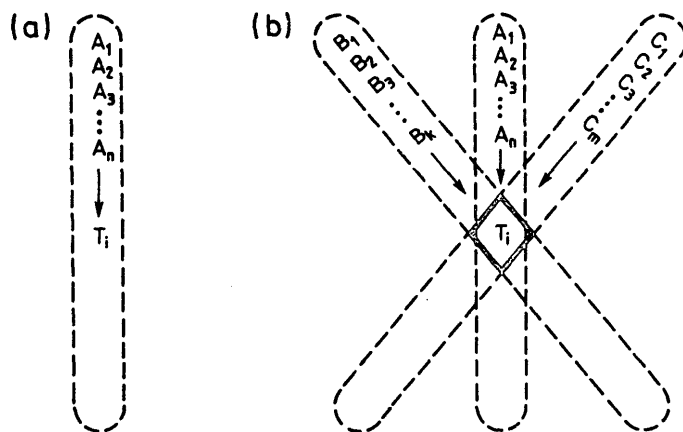
Dodajmy, że lokalnie dedukcyjna organizacja w rozumieniu zbliżonym do L_2 stanowiła - zgodnie z niektórymi koncepcjami programowymi - formę przygotowywania i wprowadzania uczniów do ujęcia aksjomatycznego i nauczania globalnie dedukcyjnego, które było przewidywane w następnym cyklu szkolnym.

Obowiązujące w danym okresie cele programowe oraz zastany styl pracy szkoły mogą jeszcze na inne sposoby częściowo determinować bądź też regulować rozumienie postulatów 1°-10°, a nawet do pewnego stopnia specyfikować także rozumienie założeń podstawowych lokalnie dedukcyjnej organizacji nauczania.

W szczególności program i praktyka szkolna mogą nie respektować niektórych spośród celów (na przykład celu 10° związanego z ogólnym kształceniem przez matematykę), gdy będą aktualnie nastawione na realizację innych zadań (choćby specyficznie pojętych i bardzo wąsko zakrojonych celów praktycznych). Pojawia się w ten sposób kolejna interpretacja lokalnie dedukcyjnej organizacji nauczania jako części pewnego rzeczywistego procesu dydaktycznego.

Sposób traktowania lokalnie dedukcyjnej organizacji nauczania matematyki, który zostanie dalej przedstawiony, nie korzysta bezpośrednio - tak, jak wyżej - z podanej wcześniej listy celów 1°-10°.

Odwołajmy się najpierw do porównania z metodą typową dla globalnie dedukcyjnego systemu. Jeśli rozwijamy systematycznie teorię aksjomatyczną, to jej formalny charakter obliuguje do kierowania się przy dowodzie twierdzenia T_i wyłącznie takim znaczeniem występujących pojęć, jakie zostało ustalone przez aksjomaty $A_1, A_2, \dots, A_n$, bądź przyjęte na gruncie tej teorii definicje. Poza ramy teorii wyznaczone aksjomatyką nie należy w takim globalnie zorganizowanym myśleniu wykraczać (przy daleko idących uproszczeniach sytuację tę przedstawia rys. 4(a), gdzie obrazowym odpowiednikiem wspomnianych granic wyznaczonych przez aksjomatykę jest linia przerywana).



Rys. 4. Teorie matematyczne a lokalne dedukcje

Pomocnicze odwoływanie się do wybranych modeli, różnych interpretacji i konkretnych znaczeń jest oczywiście pożyteczne, a nawet - ze względów heurystycznych - wskazane, ale z logicznej konstrukcji aksjomatycznego dowodu musi zostać ostatecznie usunięte. W toku lokalnych dedukcji korzystamy natomiast „oficjalnie” i w zasadzie bez ograniczeń z różnych własności konkretnego mo-

delu i - co charakterystyczne - nie pomijamy takich, które formalnie biorąc byłyby przedmiotem zainteresowania różnych teorii (por. schematyczne przedstawienie na rys. 4(b)). Jest to więc niejako korzystanie z różnych teorii jednocześnie. W istocie jednak wnioskujący nie jest na ogół w pełni świadom istnienia owych teorii, a jego rozumowaniu nie można przypisać waloru formalnej ścisłości. Jest ono za to spontaniczne i korzysta z naturalnie narzucających się w modelu związków. Podstawą takiego działania dla wyszkolonego matematyka bywa świadomość istnienia pewnych izomorfizmów oraz związane z tym przekonanie, że wyniki mogą być wyrażone konsekwentnie w języku tylko jednej teorii, na gruncie której można już przedstawić pełny, nawet sformalizowany dowód (por. Semadeni, 1975 oraz Thom, 1974).

Dopuszczając uproszczenia, można by powiedzieć, że lokalnie dedukcyjna organizacja nauczania matematyki polega - w tym ujęciu - na przeprowadzaniu rozumowań odbywających się w modelu, przy stosownym wyborze zarówno samych modeli, jak i momentów kursu dla tych rozumowań (oznaczymy to ujęcie przez L_3). Także i tutaj rozpoczynamy od sytuacji najprostszych i kilkuogniowych rozumowań, ale nauczanie powinno tak przebiegać, aby w dalszej perspektywie prowadziło do pogłębienia rozumienia dedukcji i stopniowego poszerzania jej zasięgu.

7. Zakończenie

W podjętej próbie analizy, zawierającej wiele uproszczeń, starano się m.in. wskazać na pewne interpretacje praktyczne pojęcia lokalnie dedukcyjnej organizacji nauczania matematyki (użycie litery L opatrzonej kolejno wskaźnikami miało na celu podkreślenie różnych możliwości ujęć i realizacji w praktyce). Analiza nie pretenduje natomiast do wyczerpującej charakterystyki tego złożonego pojęcia. Wskazane interpretacje ilustrują fakt, że pojęcie lokalnie dedukcyjnej organizacji nauczania jest relatywne z różnych powodów. Należą do nich: (1) sposoby interpretacji innych pojęć, (2) program szkolny, który zakłada bądź pomija pewne cele nauczania i (3) utrwalony w praktyce styl pracy szkoły.

Bibliografia

- FLETCHER, T.J.: 1986, Ulepszanie programów nauczania matematyki w zmieniających się społeczeństwach, „Wiadomości Matematyczne” 27, str. 93-108.
- FREUDENTHAL, H.: 1970, Un cours de géométrie, Tendances Nouvelles de l'Enseignement des Mathématiques vol. II, UNESCO.

- : 1973, Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 1, Ernst Klett Verlag, Stuttgart.
- KONIOR, J.: 1975, Organizacja nauczania matematyki oparta na lokalnych dedukcjach, Uniwersytet Śląski, Katowice.
- KRYGOWSKA, Z.: 1977, Zarys dydaktyki matematyki, część 1, WSiP, Warszawa.
- SEMADENI, Z.: 1977, O prematematyce i jej stosunku do fizyki, Problemy dydaktyki fizyki, Karpacz.
- STOLIAR, A.A.: 1974, Pedagogika matematyki, Wyższa Szkoła, Mińsk.
- THOM, R.: 1974, Matematyka „nowoczesna”: pomyłka pedagogiczna i filozoficzna? „Wiadomości Matematyczne” 18, str.113-129.

ON THE NOTION OF THE LOCALLY DEDUCTIVE
ORGANIZATION OF TEACHING MATHEMATICS

Summary

In the article, the notion of the locally deductive organization of teaching mathematics is defined. This notion belongs to the output of the didactics of mathematics of the last decades. The considerations are illustrated by examples from school practice. Certain practical interpretations of the notion of the locally deductive organization of teaching mathematics are also pointed out.