ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 10 (1989)

ZOFIA ZAMORSKA
Rzeszów

PRZYCZYNEK DO BADAŃ NAD ZAPAMIĘTYWANIEM TREŚCI MATEMATYCZNYCH

1. Uwagi wstępne

Doświadczenia szkolne pokazują, że jednym z istotnych powodów trudności uczniów w uczeniu się matematyki jest niesystematyczność ich pracy powodująca luki w podstawowych wiadomościach. Są to zwykle te elementy matematycznej wiedzy, które często stosuje się w trakcie rozwiązywania różnorodnych zadań w domu i w toku lekcji. Dlaczego uczniowie ich nie zapamiętują, dlaczego nie utrwalają się one niejako automatycznie?

Włodzimierz Szewczuk ([3], str. 235,248,251) w wyniku szerokich badań nad zapamiętywaniem różnego rodzaju materiału (opowiadanie, film, zdjęcie, słowa nie wyrażające żadnych treści [...]) formułuje następujące prawidła jako niezbędne w procesie zapamiętywania:

> O g ó l n a   z a s a d a   z a p a m i ę t y w a n i a . Zapamiętanie przez osobnika jakiegokolwiek układu bodźców jest możliwe tylko i jedynie wtedy, gdy układ ten zostanie włączony w jego działanie.
> P i e r w s z e   p r a w o   z a p a m i ę t a n i a . Zapamiętane może być przez osobnika tylko to, co zostaje wyodrębnione przez wywołanie jego odruchu orientacyjno-badawczego.
> D r u g i e   p r a w o   z a p a m i ę t a n i a . Zapamiętane może być przez osobnika tylko to, co wiąże się z jego doświadczeniem gatunkowym (bezwarunkowym) lub jednostkowym (warunkowym, nabytym).

W wyniku licznych eksperymentów stwierdzono, że zapamiętane zostały przede wszystkim te składniki treściowe, które najłatwiej włączały się w już istniejące struktury pojęciowe albo jako identyczne z nimi, albo do nich podobne, albo wreszcie pozostające w innej do nich relacji odzwierciedlanej przez osobnika.

Trzecie prawo zapamiętania. Zapamiętane może być przez osobnika tylko to, co wywołuje reakcję emocjonalną.

Uczenie się jest powiązane z procesem zapamiętywania zwanym w psychologii zapamiętywaniem zamierzonym, ponieważ polega ono na świadomym zapamiętaniu określonej wiedzy. W jednym z wniosków ogólnych dotyczącym zapamiętywania zamierzonego Włodzimierz Szewczuk ([3], str. 48) pisze: „W im większym stopniu zapamiętywanie staje się zamierzone, w tym szerszym zakresie istotnym jego składnikiem stają się specjalne działania myślowe występujące w postaci:

(a) świadomego przypominania sobie poprzednich zdarzeń,

(b) wypróbowywania lokalizacji czasowej przypominanych zdarzeń w ramach czasowych innych zdarzeń,

(c) wiązania zdarzeń i myśli z miejscem ich występowania,

(d) operowania skrótowymi oznaczeniami poszczególnych składników i ich grup".

Skuteczność uczenia się jest więc uzależniona od stopnia świadomości uczącego się w kierowaniu tym procesem.

Przedstawione prawidła zapamiętywania powinny mieć istotny wpływ na przebieg procesu nauczania wszystkich przedmiotów. Jak można zinterpretować je w przypadku nauczania matematyki?

W odniesieniu do matematyki ogólna zasada zapamiętywania oznacza uwzględnienie w procesie nauczania i uczenia się operatywnego charakteru tego przedmiotu. W praktyce szkolnej zasada ta realizuje się w różnych aspektach metody czynnościowej. Zofia Krygowska omawiając w „Zarysie dydaktyki matematyki" ([1], str. 84) różne rodzaje czynności konkretnych i myślowych towarzyszących rozwiązywaniu matematycznych problemów, akcentuje to słowami: „Myślenie matematyczne nie jest bierną kontemplacją danej nam a priori sytuacji; jest bardzo wyraźną aktywnością, wykonywaniem różnego typu czynności".

Umiejętne dydaktycznie organizowanie procesu rozwiązywania różnych zadań matematycznych przez uczniów może i powinno wpływać na zapamiętywanie zarówno wiadomości, jak i typowych metod, technik i strategii matematycznych, specyficznych sposobów rozumowania (np. rozumowanie niewprost), bowiem sprzyja ono wywoływaniu - zacytujemy tu dosłownie sformułowanie psychologa - „odruchu orientacyjno-badawczego".

Zgodnie z cytowaną poprzednio drugą zasadą zapamiętywania, to, co uczeń może zapamiętać, powinno być włączone w jego poprzednie doświadczenia, zdobytą wiedzę i umiejętności. Zamierzonemu zapamiętywaniu definicji, twierdzeń, matematycznych rozumowań sprzyja systematyczne i świadome porządkowanie tej wiedzy. Porządkowanie to na wyższym poziomie może między innymi polegać na ujmowaniu fragmentu tej wiedzy w pewien dedukcyjny układ, na każdym poziomie zaś na uświadomieniu sobie pojęć, twierdzeń i rozumowań ogólniejszych czy bardziej specyficznych od aktualnie rozważanych, na szerokim stosowaniu analogii itp. Uczeń świadomie uczący się matematyki powinien zatem być kierowany do refleksji nad tym, co aktualnie poznaje, i wiązania tej wiedzy z tym, co poprzednio poznał.

Poznaniu matematycznemu towarzyszą różnego rodzaju obrazy powstałe w umyśle uczącego się, bądź w wyniku doświadczeń w przestrzeni fizycznej (intuicja pierwotna), bądź w wyniku doświadczeń w dziedzinie przyswojonej już abstrakcyjnej wiedzy (intuicja wyrafinowana). Bogaty zasób intuicyjnych obrazów różnych rodzajów ułatwia „zachowanie orientacyjno-badawcze" w sensie pierwszej zasady zapamiętywania.

Zgodnie z trzecią zasadą, zapamiętywanie treści matematycznych zależy od pewnych czynników emocjonalnych, które przejawiają się w toku matematycznej aktywności ucznia w różny sposób, między innymi w zainteresowaniu problemem, zadowoleniem z jego rozwiązania, satysfakcją ze zrozumienia tego, co było początkowo niezrozumiałe itp. Te czynniki są istotne dla zapamiętywania zamierzonego.

Używając terminu „zadanie matematyczne", rozumiem go w szerokim sensie. Problemem jest także rozumne czytanie, interpretowanie matematycznego tekstu i przyswajanie sobie wiedzy przekazanej tym tekstem. Zofia Krygowska ([2], str. 23) pisze: „Racjonalna lektura matematycznego tekstu [...] wiąże się więc z różnymi czynnościami wykonywanymi » dookoła tekstu « , w wyobraźni, w abstrakcji, w konkrecie (zapis, schemat, model). W pewnych wypadkach celowe jest » odformalizowanie « tekstu, w pewnych na odwrót jego » doformalizowanie « , w innych » powierzenie się « formalizmowi i staranie się o jasne ujęcie struktury, której tekst dotyczy".

Niniejszy artykuł dotyczy problemu zapamiętywania treści czytanego i analizowanego przez ucznia tekstu matematycznego. Formułuję pytanie:

Czy jeżeli zorganizujemy uczniowi zapamiętywanie matematycznego tekstu tak, aby zachować (w stopniu możliwie optymalnym dla danego ucznia, danego tematu, danej sytuacji problemowej) omówione prawidła zapamiętywania, to treść zawarta w tekście pozostanie w jego pamięci przez długi czas, mimo iż nie będzie się wówczas do tego tekstu wracało?

Poszukując odpowiedzi na powyższe pytanie przeprowadziłam badania z udziałem dwudziestu uczniów wybranych z dwóch klas ósmych w taki sposób, by połowę grupy stanowili uczniowie „bardzo słabi" (nie tylko z matematyki), zaś pozostałą część - uczniowie dobrzy i bardzo dobrzy.

2. Warunki i przebieg sondażu

W a r u n k i   b a d a n i a

Badanych uczniów uczyłam matematyki od drugiego semestru klasy siódmej przez ponad rok przed rozpoczęciem badania. W toku tego nauczania należało uzupełnić wiele luk w podstawowych wiadomościach uczniów, wiadomościach niezbędnych dla realizacji nowego materiału. Uczniowie o wiele oporniej przyswajali sobie zaległe treści (z konieczności uzupełniane pospiesznie) niż definicje i twierdzenia poznawane na bieżąco. Byli wśród nich tacy, w przypadku których uzupełnienie wiadomości wydawało się niemożliwe. Przede wszystkim zapominali oni bardzo szybko zaległe wiadomości, choć przyswoili je ze zrozumieniem. Tych właśnie uczniów nazwałam w badaniu umownie uczniami „bardzo słabymi".

Program, który realizowałam wówczas w tych klasach, był bardzo szeroki. Uczniowie zapoznawali się między innymi z ogólnym pojęciem funkcji, z pojęciem funkcji odwrotnej do danej oraz ze złożeniami różnych funkcji. Pojęcia te były bogato ilustrowane przykładami oraz utrwalane w toku rozważań wielu rodzajów funkcji (liniowe, kwadratowe, homograficzne). Program obejmował też następujące przekształcenia płaszczyzny wraz z przekształceniami do nich odwrotnymi i różnymi złożeniami: symetria osiowa, symetria środkowa, translacja, rzut równoległy płaszczyzny na prostą; natomiast nie obejmował pojęcia obrotu płaszczyzny. W klasie ósmej uczniowie zapoznali się również z funkcjami trygonometrycznymi kąta dowolnego oraz z ich wykresami, okresowością i wzorami redukcyjnymi. Przy tej okazji spotkali się oni z intuicyjnym opisem kąta skierowanego, kątów dodatnich i ujemnych oraz sumy i różnicy tych kątów. Uczniowie zetknęli się również w toku lekcji ze sposobami opracowywania tekstu matematycznego, w szczególności z analizowaniem tekstu definicji. Powyższe względy zadecydowały o wyborze dla celów sondażu definicji obrotu płaszczyzny w następującym brzmieniu:

> Obrotem wokół środka O o kąt skierowany $\overrightarrow{\alpha}$ nazywamy takie przekształcenie płaszczyzny na płaszczyznę, w którym obrazem punktu X różnego

od punktu 0 jest taki punkt X', że: $\sphericalangle\ \overrightarrow{XOX'} \equiv \sphericalangle \overrightarrow{\alpha}$ i $0X' = 0X$. Obrazem punktu 0 jest ten sam punkt.

Zauważmy także, że ta sama nazwa pojęcia może początkowo wytworzyć w umyśle ucznia pewien obraz wywołany potocznym sensem tego terminu. Uczniom z pewnym doświadczeniem w lekturze tekstu definicji skojarzenie to powinno ułatwić zrozumienie definicji i rysunkową jej ilustrację. Obrót płaszczyzny jest dla ucznia klasy ósmej kolejnym przykładem przekształcenia, zatem może on wiązać poznawane pojęcie z nadrzędnym pojęciem przekształcenia oraz z pojęciem analogicznym. Podczas opracowywania tekstu uczeń może też wykorzystać spotkane wcześniej, w sytuacjach analogicznych, metody postępowania.

Cel badania

Odnośnie do zapamiętania tej definicji przez uczniów postawiliśmy w badaniu następującą wstępną hipotezę:

Jeżeli w wyniku lektury definicji uczeń będzie doprowadzony do jej zrozumienia na poziomie elementarnym, następnie ujmie ją operatywnie i powiąże z innymi pojęciami, przy czym wystąpi u niego świadoma chęć zapamiętania, to treść tej definicji zostanie zapamiętana przez dłuższy czas, mimo iż się wówczas do tego tekstu (ani do tekstów analogicznych) w ogóle nie będzie nawiązywać.

Próba weryfikacji tej hipotezy miała więc na celu ujawnienie wpływu jednorazowego, ale bardzo dokładnego opracowania definicji (z zachowaniem wszystkich prawideł zapamiętywania) na trwałość jej zapamiętania.

Przebieg badania

Badanie obejmowało dwa spotkania, indywidualnie z każdym uczniem, oraz sprawdzian pisemny po upływie trzech miesięcy od pierwszego spotkania. Spotkanie pierwsze rozpoczynało się samodzielnym czytaniem definicji trwającym około pięciu minut, po którym to czasie uczniowie spontanicznie przerywali lekturę i przechodzili do rozmowy z obserwatorem.

Sposób analizowania przez ucznia tekstu definicji nie był celem tego badania, ale może warto tutaj przekazać pewne obserwacje. Niektórzy uczniowie w wyniku lektury definicji dokonali samodzielnie jej interpretacji, inni - nie poradzili sobie z tekstem i oczekiwali pomocy ze strony obserwatora.

Następowało wówczas wspólne czytanie (obserwator i uczeń), wspólna konstrukcja przykładu i operatywne ujęcie definicji. Typową rozmowę tego rodzaju przedstawiono w protokole 1, zamieszczonym w aneksie.

Wszyscy uczniowie otrzymywali następnie następujące zadania do samodzielnego wykonania:

- wybór dowolnego obrotu i konstrukcja[1] obrazów dwóch punktów wybranych w tym obrocie,
- uzasadnienie, że tak określone przyporządkowanie jest przekształceniem,
- powtórzenie definicji z pamięci,
- badanie konsekwencji zastąpienia terminu „kąt skierowany" - terminem „kąt" w zwykłym sensie,
- ustalenie symbolu obrotu przez ucznia,
- symboliczny podpis rysunku,
- konstrukcja obrazów kilku punktów w złożeniu dowolnej symetrii osiowej z dowolnym obrotem,
- powtórzenie definicji z pamięci.

Do momentu pierwszego powtórzenia definicji uczniowie nie byli świadomi tego, że ostatecznym celem tych rozważań jest nie tylko zrozumienie definicji, lecz także jej zapamiętanie. Chodziło o zorientowanie się w tym, czy uczniowie zapamiętują tekst matematyczny spontanicznie podczas jego analizy.

Drugie spotkanie rozpoczynało się poleceniem powtórzenia definicji, po czym uczniowie zajmowali się trzema następującymi problemami:

- szukanie przekształcenia odwrotnego do danego obrotu,
- szukanie złożenia dwóch obrotów o wspólnym środku,
- szukanie związku między symetrią środkową a obrotem.

Na tym etapie uczniowie byli już świadomi, że daną definicję mają zapamiętać.

Jeżeli uczeń nie poradził sobie z zadaniem, wówczas uzyskiwał pomoc ze strony obserwatora. Protokół 1 (aneks) jest sprawozdaniem z rozmowy z uczniem, który żadnego z zadań nie rozwiązał samodzielnie.

Po trzech miesiącach, w toku trzeciego spotkania, uczniowie podawali pisemnie definicję obrotu wraz z ilustracją rysunkową oraz wymieniali wszystkie wiadomości zapamiętane z poprzednich spotkań. W czasie tego spotkania nie prowadzono żadnej rozmowy z uczniami.

---

[1] Tu i w dalszym ciągu używając terminu „konstrukcja" myślimy o konstrukcji na rysunku.

Z punktu widzenia dydaktyki można wysunąć zarzut, że odstępuje się w badaniu od naturalnych warunków szkolnych, w których nauczanie nie jest zindywidualizowane. Z drugiej strony, w nauczaniu szkolnym każde nowe pojęcie jest przez dłuższy okres utrwalane w różnych ćwiczeniach, wiązane stale z innymi. Tak więc w stosunku do sytuacji w klasie warunki sondażu były z jednej strony bardziej sprzyjające zapamiętaniu przez ucznia definicji (w prowadzonej w toku indywidualnej pracy ucznia z obserwatorem), z drugiej jednak mogły utrudniać zapamiętanie, bo definicja nie była „ćwiczona". Zarówno indywidualny kontakt z uczniem, jak i dłuższy okres, w którym uczeń miał zapamiętać tekst definicji, stanowiły jednak warunki odpowiadające celowi sondażu.

3. Wyniki i ich analiza jakościowa

Ze względu na cel badania godne uwagi wydają się następujące wyniki obserwacji uczniów:

1. W s z y s c y u c z n i o w i e odtworzyli poprawnie definicję nie tylko po dwóch tygodniach, lecz także po okresie trzech miesięcy od zapoznania się z jej tekstem. Należy przy tym przypomnieć, o czym już była mowa, że w okresie tych trzech miesięcy uczniowie ci nie stykali się w żadnej postaci ani z tą definicją, ani też z definicjami do niej analogicznymi. W dodatku nie podejrzewali oni, że po tak długim czasie (trzy miesiące) powróci się jeszcze do tego tematu.

2. Nie w każdym przypadku tekst wypowiadany przez ucznia był dosłownym tekstem definicji, lecz zawsze został prawidłowo oddany jego matematyczny sens. Potwierdzały to rysunki towarzyszące wypowiedzi słownej ucznia, które zawsze były poprawną ilustracją definicji. Różnice w sformułowaniach (w odniesieniu do podanego tekstu) były najczęściej spowodowane dokonywanymi przez nich skrótami; np. zwrot „takie przekształcenie" zastępowano słowem „przekształcenie"; zwrot „przekształcenie płaszczyzny na płaszczyznę" - zwrotem „przekształcenie płaszczyzny".

Powyższy przykład występował stosunkowo często, ponieważ podczas analizowania definicji nie akcentowano tego, iż chodzi o przekształcenie płaszczyzny <u>na</u> płaszczyznę (co zresztą nie było konieczne). Zdarzały się również przypadki zastępowania terminu „kąt skierowany" - terminem „kąt" w zwykłym sensie (czasem ujawniało się to jedynie w zapisie: $\sphericalangle XOX' \equiv \sphericalangle \alpha$ zamiast $\sphericalangle \overrightarrow{XOX'} =$ $= \sphericalangle \vec{\alpha}$), jednak wybierając obrót na rysunku ustalano zawsze kąt skierowany.

Zatem uczniowie zapamiętując definicję nie zwracali szczególnej uwagi na samą wypowiedź, lecz na jej znaczenie. Jest to zgodne z wnioskiem z badań Greeno i Baddeleya przedstawionym w [4], że „waga syntaktyki w pamięci długoterminowej jest dużo mniejsza niż waga czynników semantycznych". Ten sposób zapamiętywania był też uczniowi narzucony w badaniu przez samą metodę pracy nad tekstem definicji, gdzie akcentowano konieczność odczytania sensu warunku definicyjnego oraz wypowiadano go czynnościowo w trakcie sporządzania obrazu wybranego punktu X w wybranym obrocie. Również przy powtórzeniach definicji nie zwracano uwagi na te transformacje tekstu, które nie wypaczały jego matematycznego sensu.

3. Uczniowie słabi pracowali mniej więcej dwukrotnie wolniej niż uczniowie uzdolnieni matematycznie. Szczególnie duże różnice czasowe wystąpiły we wczesnej fazie analizowania tekstu definicji. Wystąpiły również duże różnice w jakości pracy (aktywność, spontaniczne przywoływanie potrzebnych wiadomości i stosowanie ich, itp.). Są one widoczne w załączonych typowych dla obydwu grup protokołach (aneks).

4. Mimo iż analiza tekstu definicji dokonywana przez uczniów słabych przebiegała stosunkowo długo, a w dodatku byli oni wówczas często odsyłani do tego tekstu (protokół 1 z aneksu), to jednak nie sformułowali oni poprawnie definicji przy pierwszym poleceniu powtórzenia jej. Oto charakterystyczne odpowiedzi uczniów słabych: „Obrót o środku O jest to takie przekształcenie, w którym $OX=OX'$. „Obrotem nazywamy punkt X', który jest obrazem punktu X." „Obrotem punktu O nazywamy takie przekształcenie, że punktowi X jest przyporządkowany dokładnie jeden punkt." „Obrotem o środku O nazywamy takie przekształcenie, w którym $OX = OX'$, $\sphericalangle XOX \equiv \sphericalangle \alpha$." Jednakże bezpośrednio po tej wypowiedzi ci sami uczniowie potrafili samodzielnie przedstawić i omówić przykład zastosowania definicji znajdującej się przed ich oczyma, zaś w dalszej kolejności (po krótkim odstępie czasu) powtarzali już poprawnie definicję z pamięci. Być może, uczniowie słabi nie zapamiętywali od razu analizowanego tekstu dlatego, że w trakcie długiej dyskusji nawiązywano jedynie do jego fragmentów, więc nie był on ujęty przez nich całościowo. Najprawdopodobniej jednak nie starali się oni o jego zapamiętanie, a zaskoczeni trudnym dla nich zadaniem werbalizacji wytworzonych przed chwilą intuicji, mówili po prostu cokolwiek.

5. Podczas odtwarzania tekstu definicji po okresie trzech miesięcy zarysowały się również wyraźne różnice w zakresie ilości zapamiętanych treści

pomiędzy uczniami omawianych grup. Wszyscy dobrzy uczniowie podawali (poza definicją i rysunkiem) przykłady złożeń obrotów o tym samym środku bądź złożeń obrotu z symetrią osiową oraz znajdowali obrót odwrotny do wybranego na przykładzie. Uczniowie słabi odtwarzali natomiast jedynie definicję wraz z jej ilustracją rysunkową i podpisem symbolicznym tego rysunku.

Zauważyłam też, iż żaden z uczniów uzdolnionych matematycznie nie przytoczył oczywistego dlań twierdzenia, że symetria środkowa jest szczególnym obrotem. Stało się tak prawdopodobnie dlatego, że zostało ono poprzednio szybko przez nich odkryte, więc pozostało niezauważone, jako po prostu banalne.

4. Wnioski końcowe

Wąski zakres sondażu nie pozwala na wysnuwanie ogólnych wniosków, niemniej nasuwają się pewne hipotezy uzasadniające celowość dalszych badań.

1) Wydaje się, że każdy przeciętny uczeń potrafi długoterminowo zachować w pamięci treść określonego tekstu matematycznego po jednorazowym bardzo starannym jego opracowaniu z uwzględnieniem znanych w psychologii prawideł zapamiętywania. Uczeń powinien przy tym być świadomy tego, że problem polega nie tylko na zrozumieniu danego tekstu, lecz także na jego zapamiętaniu.

2) W opracowywaniu tekstu matematycznego z uczniami należy wziąć pod uwagę następujące aspekty indywidualizacji pracy:

- Tempo pracy ucznia, które jest po części zależne od stopnia opanowania przez niego technik czytania tekstu matematycznego.

- Stopień aktywności i samodzielności ucznia w rozwiązywaniu matematycznych problemów.

- Sprawności intelektualne ucznia, a więc wg Gagnégo i White'a (cytuję za [4]) „zmagazynowane pojęcia, reguły, procedury i plany czy programy działania, które stanowią składniki hierarchii uczenia się".

Nasuwają się pytania:

- Czy wyniki przedstawionych badań potwierdzą się w szerszej populacji, niezależnie od rodzaju wybranego do zapamiętania tekstu?

- Ile doświadczeń przedstawionych w artykule będzie można z powodzeniem przenieść do nauczania w zespole klasowym?

Literatura

[1] Z. KRYGOWSKA, Zarys dydaktyki matematyki, cz. I, WSiP, Warszawa 1977.
[2] -, Zarys dydaktyki matematyki, cz. II, WSiP, Warszawa 1977.
[3] W. SZEWCZUK, Psychologia zapamiętywania, PWN, Warszawa 1966.
[4] V. BYERS i S. ERLWANGER, Pamięć w rozumieniu matematyki, „Dydaktyka Matematyki" 10 (1989), 5-34.

Aneks

Protokół 1. Rozmowy z uczniem słabo uzdolnionym matematycznie, E - eksperymentator, U - uczeń.

E. Masz tutaj napisaną definicję, przeczytaj ją dokładnie i spróbuj ją zrozumieć. Możesz w każdej chwili zapytać o wszystko, co uznasz za stosowne.

U. Nie wiem, co znaczy tutaj ten kąt skierowany.

E. Jest to para półprostych o wspólnym początku, czyli ważne jest to, które ramię jest pierwsze, a które drugie. [Tu następował rysunek ze wskazaniem ramion i rozwartości wraz z informacją o konstrukcji kąta skierowanego przystającego do danego kąta.]

E. Wracamy do naszej definicji.

U. [Czyta, nic nie rysuje, nic nie mówi.]

E. Co trzeba ustalić, aby wybrać w płaszczyźnie jeden obrót?
[Milczenie.]

E. Jaka jest nazwa?

U. [Czyta nazwę, lecz nie potrafi odpowiedzieć na pytanie.]

E. Przeczytaj wolno jeszcze raz.

U. Środek i kąt skierowany.
[Inni słabi uczniowie często ustalali tylko środek obrotu, a kąta skierowanego nie brali pod uwagę.]

Po ustaleniu kąta i środka obrotu nasz uczeń znowu milczy, wpatrzony w kartkę z tekstem definicji.

E. Czym jest zdefiniowany tutaj obrót?

U. Przekształceniem.

E. Dobrze, więc może przypomnisz, w jaki sposób można sobie pomóc w zrozumieniu przekształcenia.
[Uczeń milczy przez chwilę.]

E. Przypomnijmy definicję - przekształceniem, albo funkcją ze zbioru X w zbiór Y nazywamy takie -

U. przyporządkowanie, że każdemu ... [poprawnie]. Znaleźć trzeba sposób przyporządkowania.

E. Słusznie, spróbuj to zrobić.

U. [po chwili] Rysujemy półprostą $\overrightarrow{OX}$ i odkładamy $OX = OX'$.

E. Gdzie będziesz odkładał - przy dowolnej półprostej o początku O?

U. Nie [i milczy].

E. Położenie obrazu punktu X zależy też od ustalonego kąta obrotu.

U. Trzeba odłożyć ten kąt.

Następnie uczeń samodzielnie wykonuje konstrukcję, po czym poprawnie uzasadnia jednoznaczność tego przyporządkowania.

E. Postaraj się teraz odtworzyć z pamięci definicję obrotu płaszczyzny.

U. Obrotem punktu O nazywamy takie przyporządkowanie, że punktowi X jest przyporządkowany dokładnie jeden punkt X'.

E. W twoim sformułowaniu brak jest przede wszystkim opisu sposobu przyporządkowania. Spotkałeś się z wieloma przekształceniami i zawsze obraz wybranego punktu był w nich tylko jeden, a różnią się one sposobem przyporządkowania. Przeczytaj jeszcze raz fragment opisujący ten sposób.

U. [Uczeń wybiera warunek prawidłowo, a następnie odczytuje całą definicję.]

E. Jak myślisz; jakie byłyby konsekwencje tego, że w definicji kąt skierowany zostałby zastąpiony kątem w zwykłym sensie?

U. [Wykonuje rysunek, konstruując obraz punktu w tym samym kierunku, co poprzednio.]

E. Jak można inaczej?

U. [po dłuższym namyśle] Odwrotnie narysować. Obrazem punktu X są dwa punkty, nie zgadza się z przekształceniem, że tylko jeden.

E. Może teraz uda ci się powtórzyć definicję z pamięci.

U. Obrotem o środku O nazywamy takie przekształcenie, że punkt X' jest obrazem punktu X i $OX' = OX$ i kąt XOX' równa się $\sphericalangle\alpha$.

E. To że X' jest obrazem X nie jest jeszcze jednym warunkiem, tylko może wynikać z tych dwóch warunków, które opisują sposób przyporządkowania. Zapomniałeś też o kącie skierowanym. Jaki zaproponowałbyś symbol obrotu?

U. $O_{\sphericalangle\bar{\alpha}}$.

E. Coś jeszcze nie zostało uwzględnione.

[Uczeń milczy.]

E. Co jeszcze oprócz kąta skierowanego trzeba ustalić, aby wybrać jeden obrót?

U. Środek O;

[Uczeń uzupełnia symbol do postaci $O^{O}_{\sphericalangle\vec{\alpha}}$. Składanie wybranego obrotu z wybraną symetrią osiową wykonuje następnie sprawnie, w ostatnim zaś powtórzeniu definicji znowu zapomina o kącie skierowanym.]

Spotkanie drugie po dwóch tygodniach.

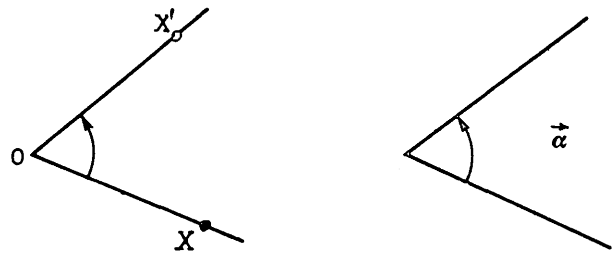
E. Przypomnij definicję obrotu płaszczyzny poznaną na poprzednim spotkaniu.

Uczeń wypowiada poprawnie warunek definicyjny, ale w nazwie i na rysunku nie uwzględnia kąta skierowanego.].

E. Czy z tym kątem wszystko w porządku?

U. Musi być jeszcze wiadomo, w którą stronę, bo otrzymalibyśmy dwa punkty.

E. Dlatego trzeba dodać, że chodzi o kąt skierowany. Teraz będziemy szukać obrotu odwrotnego do obrotu wybranego (rys. 1).



Rys. 1

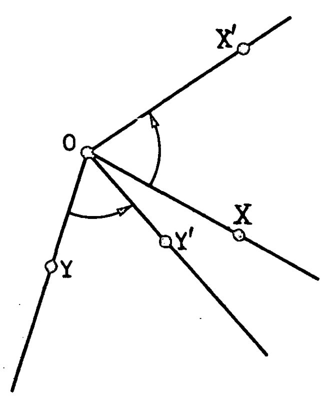
U. Obrót o kąt skierowany w dół.

E. Czyli obrót o kąt przeciwny o tym samym środku. Co trzeba uzasadnić, aby kogoś o tym przekonać?

U. Obrazem punktu X´ jest punkt X.

E. Czy tylko?

[Uczeń nie odpowiada.]



Rys. 2

E. Jeżeli weźmiemy dowolny punkt Y i jego obraz Y' w obrocie o $\measuredangle\vec{\alpha}$ (rys.2), czyli w obrocie odwrotnym obrazem Y' jest Y, to w obrocie o $-\measuredangle\vec{\alpha}$ obrazem Y' jest też Y.

Podobnie uczeń odkrył na podstawie rysunku przedstawiającego obraz jednego punktu, że złożeniem dwóch obrotów o środku 0 o kąty skierowane $\measuredangle\vec{\alpha}$ i $\measuredangle\vec{\beta}$, jest obrót o środku 0 o kąt $\measuredangle\vec{\alpha} + \measuredangle\vec{\beta}$, lecz nie odczuwał potrzeby sprawdzenia tego dla dowolnego punktu.

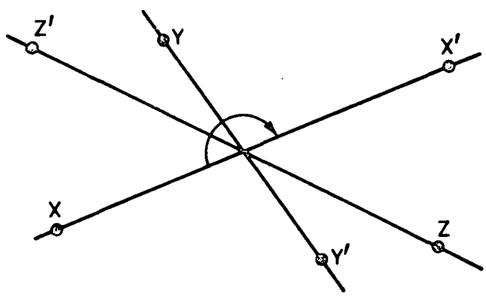
E. Przypomnijmy definicję symetrii środkowej. Czy jest ona powiązana z obrotem?

Uczeń zastanawia się przez chwilę, lecz nie czyni żadnych prób w kierunku uzyskania odpowiedzi.

E. Przestaw obrazy kilku punktów na rysunku.

Po sporządzeniu rysunku i wskazaniu kąta (rys. 3) uczeń zauważa ten związek.

Spotkanie zakończyło się powtórzeniem definicji z pamięci.



Rys. 3

P r o t o k ó ł 2. Rozmowy z uczniem uzdolnionym matematycznie.

Uczennica czytając definicję nic nie rysuje, jednak po chwili zgłasza zrozumienie i poprawnie wykonuje konstrukcję wraz z następującym uzasadnieniem: Obieram punkt 0 i punkt X i rysuję półprostą $\vec{OX}$ i obracam o kąt. Trzeba jeszcze ustalić $\measuredangle\vec{\alpha}$ skierowany.

E. Czy tak zdefiniowany obrót płaszczyzny jest przekształceniem?

U. Czy jest izometrią?

E. Pytam tylko, czy obrót jest przekształceniem; czy zaś izometrycznym bądź nie - to nas teraz nie interesuje.

U. Czy wszystkie punkty da się przekształcić?

E. Czy to przyporządkowanie jest funkcją?

U. Czy każdemu punktowi da się przyporządkować jeden i tylko jeden punkt?

Uzasadnienie powyższego faktu oraz odpowiedzi na dalsze pytania przedstawione w protokole 1 były u tej uczennicy natychmiastowe i poprawne. Już przy pierwszym powtarzaniu definicja została dokładnie wypowiedziana. Uczennica wykonała zadania w ciągu 20 minut.

Spotkanie drugie po dwóch tygodniach.

Przy powtórzeniu definicji uczennica zapomina o warunku, że $OX' = OX$, ale uzupełnia go podczas ilustracji rysunkowej. W trakcie szukania przekształcenia odwrotnego do danego obrotu uczennica mówi: „szukamy takiego sposobu, żeby X' przeszło w X; będzie to też obrót o kąt skierowany odwrotny" i wskazuje ten kąt na rysunku.

E. Taki kąt nazywamy przeciwnym do kąta $\sphericalangle \overrightarrow{\alpha}$ i oznaczamy go $-\sphericalangle \overrightarrow{\alpha}$. Szukałaś tego sposobu tylko dla jednego punktu X. Co trzeba teraz uzasadnić?

U. Czy inne spełniają ten sam warunek. Czy jak obieram dowolny punkt Y' ...

E. Który jest obrazem jakiegoś Y.

Uczennica rysuje obraz dowolnego punktu Y w tym samym obrocie (rys. 2).

E. Tak, co teraz musisz udowodnić?

U. Że obrazem punktu Y' w obrocie o kąt $-\sphericalangle \overrightarrow{\alpha}$ jest punkt Y.

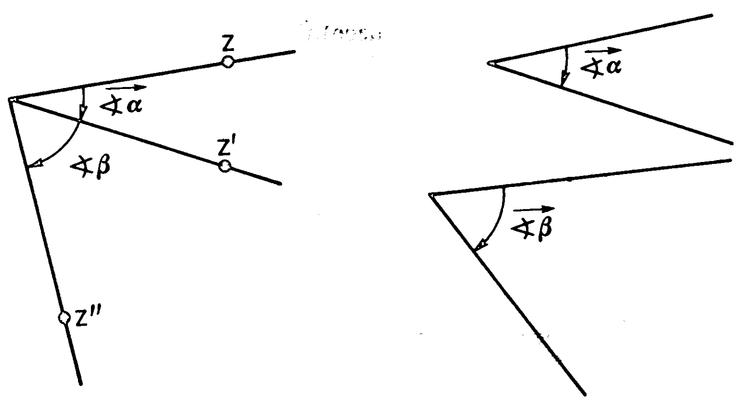
E. Składamy teraz 2 obroty: $O_0^{\sphericalangle \overrightarrow{\alpha}}$, $O_0^{\sphericalangle \overrightarrow{\beta}}$

[Uczennica odpowiada po chwili bez wykonywania rysunku, że]

U. złożeniem jest $O_0^{\sphericalangle \overrightarrow{\alpha} + \sphericalangle \overrightarrow{\beta}}$.

E. Co trzeba uzasadnić?

U. Wezmę dowolny punkt Z (rys. 4 został wykonany przez uczennicę dla wsparcia rozumowania), przekształcam przez złożenie i muszę uzasadnić, że gdy przekształcę względem kąta $\sphericalangle \overrightarrow{\alpha} + \sphericalangle \overrightarrow{\beta}$, to otrzymam Z.



Rys. 4

Podczas rozwiązywania ostatniego problemu polegającego na znalezieniu związku obrotu z symetrią środkową uczennica z własnej inicjatywy przedstawiła na rysunku obrazy kilku punktów wybranej symetrii środkowej i szybko uzyskała wynik.

A CONTRIBUTION TO THE STUDY OF MATHEMATICAL CONTENTS' RETENTION

Summary

Some questions of long-term retention of mathematics by 14-15 years old pupils are discussed. The following problem was considered: If the definition of a mathematical notion is taught to the student in the personal mode of work, having him or her read actively and observe other psychological learning principles, will he or she remember the meaning of the notion with satisfactory permanence?

The definition of rotation of the plane was taught to a number of students of different abilities. Results suggest the affirmative answer, idependently of student ability.