ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA V: DYDAKTYKA MATEMATYKI 10 (1989)

VICTOR BYERS i STANLEY ERLWANGER
Montreal, Kanada

PAMIĘĆ W ROZUMIENIU MATEMATYKI*

Próby wyjaśnienia zjawiska rozumienia matematyki odzwierciedlają różne aspekty tej dyscypliny, jak i różnice w poglądach na rozwój poznawczy, uczenie się i nauczanie. Jeden z kierunków identyfikuje rozumienie i wiedzę: Flavell mówi raz o wiedzy liczbowej, a raz o rozumieniu liczb, gdy omawia konserwację liczby (Flavell, 1977); Davis przyjmuje, że rozumienie zależy od rodzaju zaangażowanej wiedzy, takiej jak pojęcia, uogólnienia, procedury i fakty dotyczące liczb (Davis, 1978); Lehman zaś opisuje rozumienie matematyki jako każdy z trzech rodzajów wiedzy - zastosowanie, znaczenie i związki logiczne (Lehman, 1977). Skemp reprezentuje inny kierunek, który odróżnia rozumienie od wiedzy i zwraca uwagę na kategorie rozumienia matematyki. Ostatni, wieloczynnikowy model Skempa składa się z trzech kategorii rozumienia: instrumentalnego, odniesieniowego i logicznego, z których każdy dzieli się na podkategorie - intuicyjną i refleksyjną[(1)] (Skemp, 1979). Przed pojawieniem się tego modelu Byers i Herscovics powiązali idee Brunera i Skempa, tworząc model rozumienia matematyki złożony z czterech kategorii rozumienia: instrumentalnego, odniesieniowego, intuicyjnego i formalnego (Byers i Herscovics, 1977[(2)]). Reprezentantem trzeciego kierunku jest Gagné, który charakteryzuje rozumienie czegoś jako opanowanie pewnego zestawu sprawności intelektualnych (Gagné, 1970). W związku z tym Gagné

---

*Memory in mathematical understanding, „Educational Studies in Mathematics" 16(1985), 259-281. Copyright 1985: D. Reidel Publishing Company. Wydawnictwo D. Reidla wyraziło zgodę na bezpłatne opublikowanie tego artykułu, za co Redakcja „Dydaktyki Matematyki" wyraża uprzejme podziękowanie.

(1) W oryginale: instrumental, relational, logical, intuitive, reflective.

(2) W innej pracy Herscovicsa model ten został nieco zmodyfikowany (zob. N. Herscovics i J.O. Bergeron, Models of understanding, „Zentralblatt für Didaktik der Mathematik" 15(1983), 2, 75-836; przyp. tłumacza).

rozróżnia rozpoznanie obrazu, odtworzenie informacji werbalnej i realizację sprawności intelektualnych, utrzymując, że rozróżnienie to odzwierciedla różnice w organizacji pamięci odpowiednich składników wiedzy. Niedawno badał on rolę różnych struktur pamięci dla pogłębienia rozumienia przez uczniów nauczanego materiału (Gagné i White, 1978).

Mimo iż owe próby różnorakiego podejścia do zagadnienia są wartościowe, żadna z nich nie rozwiązuje kwestii związku między zapamiętywaniem a rozumieniem matematyki. W kwestii uczenia się Gagné uważa za konieczne spytać: Co jest zapamiętywane? - i dochodzi do wniosku, że „Uczenie się nie może występować bez zapamiętywania" (Gagné, 1970). Chociaż podobne stwierdzenia niewątpliwie odnoszą się do rozumienia, wydaje się, że Davis, Lehman i do pewnego stopnia Skemp uważają rozpatrywanie zapamiętywania w tym kontekście za zbędne.

Poza kilkoma godnymi uwagi wyjątkami, dydaktycy matematyki niechętnie mówią o pamięci w kontekście rozumienia matematycznego. W istocie, matematycy na ogół rozumieniu przeciwstawiają czysto pamięciowe opanowanie. Dydaktycy matematyki zawsze uważali, że w przeciwieństwie do innych przedmiotów, w matematyce nie jest konieczne umyślne zapamiętywanie. To przekonanie zostało utwierdzone przez psychologię postaci, która nie przywiązywała wagi do pamięci, lekceważyła „rozwiązywanie zadania za pomocą przypomnienia, mechanicznego odtworzenia tego, co zostało wykute [...]" (Wertheimer, 1959) i ukazywała szkodliwy wpływ zapamiętanych schematów na rozwiązywanie zadań (Luchins, Duncker). Co więcej, jednym z symptomów „lęku matematycznego" jest „wyparcie rozumienia przez zapamiętanie" (Morris, 1981). Ponieważ zapamiętanie często prowadzi do błądzenia bez końca (Morris, 1981), takie obserwacje i przekonania spowodowały wytworzenie się poglądu, którego przykładem jest określenie przez Freemonta zapamiętywania, czyli uczenia się na pamięć, jako jednej z „czasochłonnych przeszkód skutecznego uczenia się matematyki" (Freemont, 1971). Pogląd ten zrodził podejrzliwość wobec pamięci i unikania tego tematu w większości prac z zakresu dydaktyki matematyki. Wyjątek stanowi Krutetski, który uważa „pamięć matematyczną" za jedną z cech odróżniających uczniów matematycznie uzdolnionych od nieuzdolnionych (Krutetskii, 1976).

Tymczasem zaś nauczanie matematyki nie tylko nie pozwala ignorować pamięci, ale często uprzytamnia związane z nią problemy. Nauczyciele twierdzą, że uczniowie matematykę łatwo zapominają, a powstałe tak braki są trudne do uzupełnienia. Stąd szkolne nauczanie i uczenie się matematyki rozmija się istotnie z tym, co proponują teoretycy. Różnicę tę można streścić w dwu słowach: ćwiczenie i powtarzanie.

Rozdźwięk między teorią i praktyką można dostrzec w tendencji z lat 1960., gdy próbowano przeciwdziałać zapamiętywaniu przez uczniów reguł i wzorów. Ausubel podsumował efekty w następujących słowach: „Zgodnie z obecnym naciskiem na rozwiązywanie zadań »ze zrozumieniem«, uczniowie przestali zapamiętywać wzory i zamiast tego zapamiętują wzorcowe zadania" (Ausubel, 1971). Odtąd wśród tych dydaktyków matematyki, którzy są bliscy praktyki nauczania, dawny pogląd, że pamięć jest użyteczna do pewnych rzeczy, zyskał na powrót uznanie. I tak Scopes wypowiada opinię bardzo podobną do tej, którą w 1941 wyrażali Butler i Wren, gdy charakteryzuje „miejsce dla pracy pamięciowej". Pisze on: „Te wyniki, wzory, związki, które pojawiają się dostatecznie często, by warto to uczynić, są powierzane pamięci dla oszczędności czasu i podniesienia wydajności pracy" (Scopes, 1973).

Niestety jednak, taka rola pamięci w „podnoszeniu wydajności" nie da się pogodzić z osiągnięciami psychologii poznania, które - według Greera - zrewolucjonizowały naukę o pamięci w okresie mniej więcej ostatniego dziesięciolecia (Greer, 1981). Baddeley następująco charakteryzuje te osiągnięcia: „... podczas gdy w latach 1960. uważano powszechnie pamięć za magazyn informacji, która mogła zostać użyta lub nie, ... w latach 1970. występuje tendencja do traktowania pamięci jako integralnej części innych zadań przetwarzania informacji, takich jak postrzeganie, rozpoznawanie schematów, rozumienie i rozumowanie" (Baddeley, 1976, str. 187).

Jak się wydaje, stosunek do pamięci w dydaktyce matematyki jest oparty na poglądach, które uczeni o innych specjalnościach na ogół już porzucili. Podejście informatyczne potwierdza w szczególności słuszność wypowiedzi Brunera z lat 1960. (Bruner, 1973), że tradycyjne rozróżnienie między uczeniem się pamięciowym i rozumieniem, wciąż popularne w dydaktyce, jest „pseudodylematem". Doniosłość pamięci w aktywności matematycznej, od najprostszych rachunków po wymyślne dowody, jest niemal sama przez się oczywista. Istotnym zagadnieniem jest nie to, czy pamięć pełni jakąś rolę w rozumieniu matematyki, ale to, co i jak jest zapamiętywane przez tych, którzy ją rozumieją, i tych, którzy jej nie rozumieją.

Badania nad zapamiętywaniem

Badania nad pamięcią trwają już od prawie stu lat, ale przez pierwsze 75 lat swej historii koncentrowały się niemal wyłącznie na ilościowej ocenie utraty informacji. Toteż eksperymentalne badanie pamięci jest znane raczej jako badanie zapamiętywania. Początek dało w roku 1885 pojawienie się klasycznej pracy

Ebbinghausa na temat zapamiętywania bezsensownych zgłosek. Ustanowiła ona tradycję - znaną jako tradycja Ebbinghausa - która zdominowała badania nad pamięcią aż do lat 1960.

Krzywa Ebbinghausa zapamiętywania bezsensownych zgłosek pokazuje wysoką prędkość zapominania. Zapamiętany materiał redukuje się do 44% już po upływie pierwszej godziny; potem nadal go ubywa, choć już w łagodniejszym tempie. Stwierdzono też, że krzywe zapamiętania dla materiału sensownego (poezja i proza) mają ten sam ogólny kształt co ta krzywa, ale poziom zapamiętania jest tu istotnie wyższy. Mniej więcej tyle samo materiału z kursu akademickiego ulega zapomnieniu w ciągu roku, co bezsensownych zgłosek w ciągu dnia (Hilgard, 1957). Choć nie brakowało teoretycznych wyjaśnień tych zjawisk, wiele prac tego wczesnego okresu dotyczyło zależności prędkości zapominania materiału werbalnego od różnych warunków ćwiczeń powtórkowych, a nie występującego przy tym procesu poznawczego.

Niemniej jednak rezultaty tych badań znalazły zastosowanie w nauczaniu. Zdawały się one potwierdzać potrzebę recytowania, ćwiczeń i powtórek (Morgan i Deese, 1957). Woodworth wywnioskował z eksperymentów nad pamięcią, że „Materiał, który chcemy pamiętać przez długi czas, należy studiować i studiować wciąż od nowa" (Woodworth i Schlossberg, 1954). Pogląd na temat pamięci w dydaktyce matematyki wciąż na ogół formułuje się używając ilościowych aspektów zapamiętywania i zapominania.

Tymczasem zaś w psychologii już w latach czterdziestych i pięćdziesiątych zaczął pojawiać się zupełnie inny typ badań nad zapamiętywaniem. Uwaga zaczęła przesuwać się ku cechom jakościowym zapamiętywania oraz roli znaczenia i organizacji. Niektórzy teoretycy powoływali się na badania w szkole, które wskazywały, że „zapamiętywanie treści" było wydajniejsze niż werbalne uczenie się na pamięć. Zdawało się wynikać z nich, że gdy terminologia jest zapominana z przewidywaną prędkością, utrata stosowania zasad nie następuje w porównywalnym tempie (Hilgard, 1957). Hilgard pisał: „Pamięć jest jak sieć wiadomości powiązanych razem, z rozmaitym stopniem organizacji, a powodzenie w zapamiętaniu zależy od tego, ile jest organizacji". A dalej: „Należy stąd wyciągnąć praktyczny wniosek, że skuteczne nauczanie powinno kłaść nacisk na rozumienie zasad ..., gdyż ta wiedza prawdopodobnie pozostanie na zawsze dostępna w pamięci" (Hilgard, 1957).

Różnicę między tym, co można by nazwać jakościowym i ilościowym podejściem do wyników badań nad zapamiętywaniem zilustrujemy interpretacją Osgooda klasycznego eksperymentu Katony z roku 1940. W eksperymencie tym dwie grupy osób zapamiętywały następującą tabelę:

2 9 3 3 3 6 4 0 4 3 4 7
5 8 1 2 1 5 1 9 2 2 2 6

Pierwszej grupie dano 3 minuty na odkrycie zasady, druga zapamiętywała liczby w rytmicznych trójkach. W teście bezpośrednim, prawie trzecia część każdej grupy mogła odtworzyć poprawnie te liczby; ale 3 tygodnie później, gdy czwarta część tych, którzy szukali zasady, mogła wciąż odtworzyć tabelę, nie zrobił tego nikt z uczących się liczb na pamięć.

Dla Katony taki wynik potwierdzał doniosłość rozumienia związków strukturalnych. Natomiast Osgood, opierając swój pogląd na kształcie krzywej Ebbinghausa, utrzymywał, że: „Bezwzględna ilość zapominanego materiału zmienia się w zależności od ilości tego, co jest do zapamiętania. Dla tych, którzy uczyli się zasady, wszystkim, co musieli zapamiętać, była właśnie zasada: zacznij od dolnego wiersza, dodaj 3, potem 4, potem 3 itd.; reszta tablicy była nie odtwarzana z pamięci, lecz zrekonstruowana. Natomiast osoby zapamiętujące liczby musiały przypominać sobie 24 oddzielne liczby i ich położenie" (Osgood, 1953).

„Zasadę" w eksperymencie Katony można więc sformułować jako regułę. Osgood wskazuje zatem w istocie na stosunkową łatwość zapamiętywania reguł. Z punktu widzenia dydaktyki matematyki kontrowersja ta sprowadza się więc do następującego pytania: Jaka jest różnica, jeżeli jest, między zapamiętywaniem zasad a zapamiętywaniem reguł?

Pamięć i nauczanie

Jednym z celów ruchu reform programowych lat 1960. było zniesienie potrzeby pamięciowego uczenia się. Niektórzy reformatorzy uznali jakościowe podejście do zapamiętywania za idealne dla swoich celów, odchodząc w ten sposób od dominującej postawy wobec pamięci. Przedstawimy poniżej odpowiednie poglądy Brunera i Skempa.

Bruner jest dobrze znany jako zwolennik nauczania struktury przedmiotu. Jeden z jego argumentów na rzecz tego rodzaju nauczania odnosi się do pamięci. Mówi on: „Chyba najbardziej podstawową rzeczą, jaką po stu latach intensywnych badań można powiedzieć o pamięci ludzkiej, jest to, że szybko zapominamy szczegóły, o ile nie są umiejscowione w układzie zorganizowanym" (Bruner, 1962). Zatem stosunek Brunera do pamięci jest bardzo podobny do stanowiska Hilgarda. Bruner idzie jednak dalej niż Hilgard pisząc: „Materiał szczegółowy pozostaje w pamięci dzięki zastosowaniu uproszczonych sposobów przedstawiania. Takie przedstawianie ma charakter »regeneracyjny« [...] Uczenie się ogólnych czy podstawowych zasad zapewnia tę korzyść, że zapomniane nie będzie oznaczało całkowitego zapomnienia, a to, co pozostanie, pozwoli, w razie potrzeby, odtworzyć szczegóły" (Bruner, 1962). Bruner uważa więc na przykład zapamiętywanie wzorów za zgodne z zasadą uczenia się struktury. Twierdzi, że „uczony nie próbuje zapamiętać odległości przebytych przez ciała spadające w różnych polach grawitacyjnych w różnym czasie. Zna natomiast wzór, łatwiejszy do zapamiętania, pozwalający mu odtwarzać („regenerować"), z różnym stopniem dokładności szczegóły, na których oparty jest ten łatwiejszy do zapamiętania wzór. Tak więc uczy się on na pamięć wzoru $S = (1/2)gt^2$, a nie całego zbioru odległości, czasów i stałych grawitacyjnych" (Bruner, 1962; cyt. za wyd. polskim, str. 28-29).

Poglądy Brunera wykraczały w istocie poza wnioski płynące z badań nad zapamiętywaniem. Wyprzedził on stanowisko przyjęte dziesięć lat później, gdy stwierdził, że „głównym problemem dotyczącym pamięci człowieka jest nie magazynowanie, lecz wydobywanie" i że „materiał zorganizowany w kategoriach własnych zainteresowań i struktur poznawczych ma największą szansę na dostępność w pamięci" (Bruner, 1961).

Skemp jest najlepiej znany z dokonania rozróżnienia między rozumieniem odniesieniowym a instrumentalnym[3] (Skemp, 1976). Charakteryzuje je następująco: „Rozumienie instrumentalne w sytuacji matematycznej polega na rozpoznaniu zadania jako reprezentanta określonej klasy zadań, dla której znamy już regułę [...] Rozumienie odniesieniowe, przeciwnie, polega przede wszystkim na odniesieniu zadania do właściwego schematu[4]" (Skemp, 1979).

Skemp posługuje się przymiotnikami „odniesieniowe" i „instrumentalne" nie tylko dla rozróżnienia typów rozumienia, ale także dla opisania nauczania, uczenia się, myślenia i w gruncie rzeczy rodzajów matematyki szkolnej. Sam jest zwolennikiem „nauczania odniesieniowego", tj. nauczania akcentującego związki matematyczne, jako przeciwieństwa „nauczania instrumentalnego", które sprowadza się do wpajania reguł. Jedną z dostrzeganych przez niego zalet „matematyki odniesieniowej" jest to, że choć jest ona trudniejsza w uczeniu się - „jest ją łatwiej pamiętać" (Skemp, 1976). Mówi on: „Z pewnością łatwiej jest nauczyć się, że pole trójkąta = 1/2 podstawy x wysokość, niż nauczyć się, dlaczego tak jest". Wskazuje jednak, że takie uczenie się wymaga pamiętania oddzielnych reguł dla pól trójkątów, równoległoboków i trapezów, podczas gdy spojrzenie

---

(3) Zob. (1) (przyp. tłumacza).

(4) Termin „schemat" (w oryginale „scheme") oznacza u Skempa to, co można by określić jako struktura pojęciowa (przyp. tłumacza).

na ich pola w odniesieniu do pola prostokąta usuwa tę konieczność. Skemp uznaje, że jest pożądane znać oddzielne reguły: „Nie mamy ochoty wyprowadzać ich za każdym razem". Utrzymuje jednak, że „wiedząc także, jak są powiązane wzajemnie, możemy pamiętać je jako części spójnej całości, co jest łatwiej" (Skemp, 1976).

Skemp przyznaje, że „matematykę instrumentalną zazwyczaj jest łatwiej rozumieć", gdyż jest ona oparta na „łatwych do zapamiętania regułach". Twierdzi jednak, że „rozumienie instrumentalne wymaga zapamiętania, którymi sposobami rozwiązuje się które zadania, a których nie, a także nauczenia się różnych metod dla różnych typów zadań" (Skemp, 1976). Tak więc instrumentalne uczenie się jest szybsze tylko wówczas, gdy reguł jest niezbyt wiele (Skemp, 1979). Stwierdza w końcu: „Jest rzeczą prawdopodobną, że w schemacie[(5)] jest więcej do nauczenia się, a mniej do pamiętania: więcej do nauczenia się, bo chodzi o pojęcia wyższego rzędu i liczniejsze powiązania; ale mniej do pamiętania, bo raz opanowany, tworzy on spójną całość, z której można wyprowadzić nieskończenie wiele planów szczególnych" (Skemp, 1979). Tak więc Skemp, podobnie jak Bruner i Hilgard, znajduje w roli organizacji materiału dla jego pamiętania argument za pewnym szczególnym sposobem nauczania; ale ogólne spojrzenie Skempa na pamięć obejmuje również pogląd Osgooda.

Dydaktycy znaleźli się wobec zadania zastosowania tych koncepcji w klasie. Bez wątpienia objętość materiału do zapamiętania (jak i jego organizacja) musi być brana pod uwagę przy ocenie wyników nauczania. Uznali to tacy psychologowie jak Ausubel, choć ten ostatni zakłada występowanie zasadniczej różnicy między zapamiętywaniem ze zrozumieniem znaczenia a zapamiętywaniem mechanicznym (Ausubel, 1968).

Z drugiej strony można by sądzić, że jakościowe podejście do zapamiętywania - to, które akcentuje rolę znaczenia i organizacji - lepiej nadaje się do nauczania niż wcześniejsze podejście jakościowe i powinno też bardziej odpowiadać dydaktykom. A tymczasem, jak wspomnieliśmy wcześniej, podejście to ma jak dotąd znikomy wpływ na środowisko zainteresowane nauczaniem matematyki. Podczas gdy poglądy Brunera i Skempa na uczenie się i rozumienie są dość popularne, ich poglądy na pamięć nie znalazły powszechnego uznania. Jak się zdaje, nauczyciele i dydaktycy matematyki zwróceni ku praktyce nauczania byliby skłonni uznać stosowność podejścia jakościowego do rozwiązywania zadań, ale nie do uczenia się sprawności rachunkowych, skupiających główny ciężar matematyki szkolnej.

[(5)] Zob. (4).

Wynikające stąd postawy wobec pamięci nie są najszczęśliwsze. Jest wiele pytań - interesujących zarówno dla praktyki jak dla teorii - stawianych przy podejściu jakościowym, które po prostu nie pojawiłyby się, gdyby na pamięć patrzeć głównie z perspektywy szybkości zapominania. Przykładowo postawimy trzy takie pytania i uzasadnimy ich istotność.

1. Czy uczenie się zasad, struktury bądź związków redukuje ilość lub złożoność materiału matematycznego, który musi być przechowywany w pamięci? Czy za redukcję ilości pamiętanych szczegółów musimy płacić wzrostem trudności ich zapamiętania?

W wyniku badań nad rozwiązywaniem równań, w którym badanymi podmiotami byli studenci uniwersytetu, Carry, Lewis i Bernard zauważyli: „Niestety, podstawowe zasady (aksjomaty) są tak liczne i złożone, jak oparte na nich operacje algebraiczne (reguły)..." (Carry et al., 1980). W istocie, w przypadku prostych równań trzeba pamiętać więcej aksjomatów niż reguł. Może to tłumaczy, dlaczego uczniowie często wolą reguły od nauczania odniesieniowego (Skemp, 1976)?

2. Czy „odtworzenie" częściowo zapomnianego zagadnienia matematycznego jest równie proste, jak podstawienie liczb w miejsce liter we wzorze $S = (1/2)gt^2$ (Bruner, 1962)? Jeżeli wzór na pole trójkąta, równoległoboku czy trapezu został zapomniany, czy poprawny wzór stanie się oczywisty w momencie odwołania się do związków między polami tych figur a polem prostokąta (Skemp, 1976)? Czy takie postępowanie prowadzi do rzetelnej matematyki? W jakim zakresie znaczenie zależy od „pamięci matematycznej" (Krutetski, 1976)?

Analizując prace studentów, Carry et al.(1980) byli zaszokowani „masą zabawnie bezsensownych przekształceń". Protokoły sugerowały, że błędy są często wynikiem prób przypomnienia sobie częściowo zapamiętanych sposobów postępowania. Autorzy wyciągają stąd następujący wniosek: „Nic nie wskazuje na to, by znaczenie(6) odgrywało większą rolę przy rozwiązywaniu równań" (Carry et al., 1980). (Czy jest jakieś inne wytłumaczenie tego zjawiska?)

3. Czy można zgubić rozumienie matematyczne? Czy „zasada" może przekształcić się w pamięci w ślepą regułę?

Bell stwierdził, że większość 15-letnich uczniów nie pamięta związków będących podstawą reguły: „Żeby pomnożyć przez dziesięć, dopisujemy zero". Nie potrafią oni dać poprawnego uzasadnienia tej reguły; „być może otrzymali je, gdy uczyli się tej zasady po raz pierwszy, ale od tego czasu dawno o nim za-

---

(6) Tj. znaczenie symboli i operacji symbolicznych (przyp. tłumacza).

pomnieli i teraz umieją już tylko wypowiedzieć tę zasadę[7] i podać przykłady" (Bell, 1976).

Nie wiemy niestety, jak przebiegało nauczanie w klasach, o których mowa w powyższych przykładach. Wiemy natomiast, że badania eksperymentalne porównujące skuteczność różnych stylów nauczania - produkt kontrowersji dydaktycznych z lat sześćdziesiątych - nie dostarczyły jednoznacznych wyników (Shulman, 1970). Mayer i Greeno stwierdzili co prawda jakościowe różnice w umiejętności rozwiązywania zadań przez dwie grupy uczniów nauczanych rozkładu binomialnego metodami przypominającymi podejście instrumentalne i odniesieniowe (Mayer i Greeno, 1972). Błędy popełniane przez uczniów jednej grupy były innego typu niż błędy drugiej grupy, ale żadna z grup nie wykazywała wyraźnie rozumienia matematycznego.

W latach sześćdziesiątych i siedemdziesiątych niewiele przeprowadzono badań eksperymentalnych. Wbrew temu, a może właśnie dlatego, kilka strukturalistycznych teorii uczenia się i zapamiętywania wywarło wpływ na nauczanie szkolne. Teorie te sugerowały, że wyniki można by poprawić, gdyby struktura nauczania została tak zmodyfikowana, by stała się zgodna z postulowanymi strukturami poznawczymi. Było też niewypowiedziane założenie, że jeżeli przedmiotu ustrukturowanego, takiego jak matematyka, będziemy uczyć należycie, to w pamięci struktura przedmiotu będzie odzwierciedleniem struktury nauki.

Są to mocne hipotezy. Toteż dla empirycznego potwierdzenia tez strukturalistów Shavelson uznał za potrzebne rozróżnienie między „strukturą treściową" materiału nauczania a „strukturą poznawczą" w pamięci uczącego się. Ale zebrane przez niego fakty nie sugerowały „niemal idealnej zgodności między strukturami treściowymi a strukturami poznawczymi" (Shavelson, 1972). Ponadto jedno z badań wykazało niską korelację między zgodnością[8] i wynikami nauczania (Geeslin i Shavelson, 1975). Shavelson, jego uczniowie i współpracownicy stwierdzili oczekiwaną zgodność[9] w przypadku „systemów działaniowych" (szkolne ujęcie jednodziałaniowych systemów algebraicznych). Ale wykryli też godne uwagi wyjątki (Shavelson, 1974) oraz fakty świadczące o braku rozumienia (Branca, 1980).

---

(7) Tak jest w oryginale. Oczywiście, Bell ma na myśli to, co autorzy nazywają regułą (przyp. tłumacza).

(8) Tj. zgodnością struktury nauczania i struktury dyscypliny (przyp. tłumacza).

(9) Tj. zgodność struktury treści i struktury poznawczej (przyp. tłumacza).

Tak więc nie można powiedzieć, by twierdzenia strukturalistycznych reformatorów znalazły potwierdzenie. A w szczególności nie ma obecnie powodów, by uważać, że matematykę pamięta się niezmiennie taką, jakiej uczono. Prawdą jest, że aktywność matematyczna obejmuje użycie stosownych „ciągów operacji, przekształceń, kroków logicznych itd." (Greer, 1981). Ale jesteśmy zgodni z Greerem, że: „Wysoce ryzykowne jest założenie, że formalne opisy tych ciągów muszą koniecznie odzwierciedlać procesy poznawcze" (Greer, 1981), gdyż na aktywność matematyczną wpływają też strukturalne właściwości pamięci. Ponadto - według nas - kontrowersja ta odzwierciedla też przepaść dzielącą teorię od praktyki, o której mówiliśmy wcześniej. Sądzimy dalej, że przepaść tę można by zmniejszyć, odwołując się do najnowszych wyników badań nad pamięcią.

Struktura i organizacja pamięci

Dwa odkrycia przetarły drogę rewolucyjnych zmian w badaniach nad pamięcią, które pojawiły się w latach 1970. Jednym było rozróżnienie między pamięcią długo i krótkoterminową, drugie dotyczyło istnienia w pamięci subiektywnej organizacji. Te wyniki były związane ze zmianami w metodologii eksperymentalnej i doprowadziły do obecnej dominacji podejścia informatycznego do pamięci i uczenia się, jak też do organizacji pamięci. Poprzednie jednolite traktowanie pamięci ustąpiło poglądom bardziej zróżnicowanym. Jednym z rezultatów była krytyka dawnego paradygmatu uczenia się

Nauczanie - Wyniki

i sugestii, jakoby „efekty uczenia się mogły być najlepiej zrozumiane przez eksplorację trójczłonowej relacji:

Nauczanie - Struktura pamięci - Wyniki"

(Gagné i White, 1978). Innymi słowy, w teorii uczenia się zaczęto uważać szczególne struktury pamięci nabyte przez uczącego się za warunek wstępny jakiejkolwiek aktywności zewnętrznej.

Wstępnych dowodów istnienia dwu składników pamięci dostarczyła w latach 1950. psychologia poznania, gdzie pod wpływem teorii informacji badano pojemność „pamięci bezpośredniej"(10) dla cyfr, liter i słów. Miller sugerował, że pojemność tę należy mierzyć w „porcjach" i że zakres pamięci chwilowej jest „magiczną liczbą 7 $\pm$ 2" (Miller, 1956). Inne dowody pochodzą z obserwacji cofania się amnezji; sugerowały one występowanie „okresu konsolidacji", w czasie którego wejście pamięci przygotowuje się na długoterminowe przechowywanie

(10) W oryginale: immediate memory.

(Baddeley, 1976). Dało to podstawę do przypuszczenia, że pamięć długo i krótkoterminowa mają odmienną podstawę neurofizjologiczną (Hebb, 1972). Pod koniec dekady znaleziono dalsze dowody przy użyciu bardziej tradycyjnych metod (Baddeley, 1976), czego tu nie będziemy omawiać. Wraz z analogią i symulacją komputerową okazało się to decydujące, tak że pod koniec lat 1970, rozróżnienie tych dwu składników pamięci stało się powszechnie uznane.

Współczesny pogląd na pamięć jako czynnik odgrywający aktywną rolę w przetwarzaniu informacji sugeruje, że istnieje jeszcze inny komponent pamięci, którego funkcją jest raczej przetwarzanie niż magazynowanie informacji. Przez analogię z komputerem komponent ten został nazwany pamięcią roboczą. Jak się zdaje, nie ma on swego odpowiednika fizjologicznego i przez różnych autorów był dawniej lokowany bądź w pamięci krótkoterminowej, bądź (rzadziej) w długoterminowej. W ciągu ostatnich piętnastu lat zyskał jednak status odrębnego magazynu pamięci, gdyż - jak inne komponenty pamięci - zarówno magazynuje, jak i przetwarza informację. Niektórzy teoretycy zaproponowali też czwarty komponent, wykonawczy albo decyzyjny, lecz wystąpiły przy tym trudności teoretyczne.

Zajmiemy się informatycznym modelem pamięci zawierającym trzy komponenty: pamięć krótkoterminową, długoterminową i roboczą (Greeno, 1973). Teoria ta przypisuje tym komponentom różne własności i funkcje. Pamięć długoterminową pojmujemy jako tę, która ma nieograniczoną pojemność i trwale przechowuje informację. Pamięć krótkoterminowa jest natomiast tym komponentem, który przechowuje numer telefonu przez okres wystarczający do wybrania go na tarczy. Jej główną funkcją wydaje się selekcjonowanie tej pochodzącej z zewnątrz informacji, która ma być przekazana do pamięci długoterminowej, ale funkcja ta wymaga, by informacja płynęła także w przeciwnym kierunku[11]. Pamięć krótkoterminową charakteryzuje bardzo mała pojemność (3 do 5 porcji), łatwość odzyskiwania przechowanej informacji i szybkie powracanie do stanu gotowości (kilka sekund).

Pamięć robocza otrzymuje informację z pamięci zarówno krótko, jak i długoterminowej, a także przekazuje informację do obydwu tych komponentów. Przechowuje informację w czasie jej przetwarzania, powiedzmy w czasie uczestnictwa w rozmowie, czytania artykułu czy rozwiązywania zadania matematycznego - co może być kwestią minut, godzin lub dni. Pojęcie pamięci roboczej ma zasadniczą wagę w modelu pamięci, który Greeno zaproponował dla rozwiązywania zadań (Greeno, 1973), gdyż właśnie tam następuje organizacja rozwiązania przez skonstruowanie stosownej reprezentacji problemu z danych dostarczonych przez pa-

---

[11] Tj. z pamięci długo do krótkoterminowej (przyp. tłumacza).

mięć krótkoterminową i odpowiedniej informacji wydobytej z pamięci długoterminowej.

W myśl tego poglądu organizacja pamięci roboczej jest generalnie określona zadaniem, jakie ma być wykonane. Pamięć długoterminowa ma zaś, przeciwnie, organizację trwałą - podlegającą modyfikacji przez uczenie się. Cechy trwałości i nieograniczonej pojemności pamięci długoterminowej zaprowadziły Shavelsona do ulokowania w niej struktur pojęciowych (Shavelson, 1974). Prześledźmy pewne prace z tej dziedziny.

W latach sześćdziesiątych wiele uwagi poświęcono roli syntaktyki w pamięci człowieka. Prace nad przypominaniem sobie i rozpoznawaniem zdań pokazały, że podmioty miały tendencję do mylenia zdań w formie „Johnowi podobał się obraz i kupił go od Holendrów" i „Obraz spodobał się Johnowi i został mu sprzedany przez Holendrów". Zdanie „Zwędził kapustę, ale przedtem zatrąbił" jest często pamiętane jako „Zatrąbił, a następnie zwędził kapustę". Wyciągnięto stąd wniosek, że waga syntaktyki w pamięci długoterminowej jest dużo mmniejsza niż waga czynników semantycznych (Baddeley, 1976). Pamięć długoterminowa jest też często nazywana „pamięcią semantyczną" (Baddeley, 1976; Greeno, 1973).

Zaproponowano kilka modeli pamięci semantycznej. Najbardziej popularne miały postać złożonych sieci utworzonych ze „znaczących pojęć" i skojarzeń między nimi. Shavelson przedstawia pewien model będący uproszczoną kombinowaną wersją takiej sieci. Składa się ona z „węzłów" reprezentujących pojęcia albo zbiory pojęć i odcinków skierowanych reprezentujących powiązania między węzłami. Występują tu różnego rodzaju relacje, w tym hierarchie zbiorów i podzbiorów oraz ich własności. Obejmują one także umiejscowienie wydarzeń w przestrzeni i czasie. Relacje te prowokują wiele różnorodnych zdań[(12)]. Przyjmuje się zazwyczaj, że informacja w pamięci semantycznej jest przechowywana w postaci zdań. Toteż Anderson i Bower czynią zdanie zasadniczą jednostką reprezentacji wiedzy w pamięci długoterminowej według ich modelu HAM (Anderson i Bower, 1973, str. 152). Greeno nazywa ten rodzaj wiedzy „wiedzą zdaniową" (Greeno, 1973).

Informatyczne spojrzenie na pamięć stanowi, oczywiście, istotny postęp w porównaniu z poglądami opartymi na badaniach nad zapamiętywaniem. Wspomnieliśmy, że Greeno ulokował rozwiązywanie zadań w pamięci roboczej. Jednak jego opis tego komponentu pamięci (Greeno, 1973, str. 112) sugeruje, że pamięć robocza uczestniczy także w uczeniu się matematyki w klasie. Ograniczona pojemność pamięci roboczej wskazuje z kolei, że pewne metody nauczania mogą przeciążać ten

---

[(12)] W oryginale: propositions.

komponent pamięci. Jeżeli jest to prawdą, dawałoby to teoretyczne wyjaśnienie, dlaczego reformy struktury nauczania nie okazały się tak skuteczne, jak tego kazali oczekiwać ich zwolennicy.

Tym niemniej, informatyczne modele pamięci długoterminowej zastosowane do matematyki podlegają pewnym ograniczeniom. Pierwsze dotyczy umiejętności rachunkowych. Problem polega na tym, że pamiętanie tych umiejętności wydaje się jakościowo różne od pamiętania pojęć czy zdań (por. Gagné, 1970). W związku z tym Greeno, idąc za Gagné, postuluje, że w pamięci semantycznej są zmagazynowane dwa rodzaje wiedzy. Prócz wiedzy zdaniowej zawiera ona wiedzę w formie praw lub operacji. Nazywa on ten drugi rodzaj wiedzy „wiedzą algorytmiczną". Dodaje, że „wiedza algorytmiczna jest wiedzą, która automatycznie tłumaczy się na działanie, w sensie wykonywania operacji" (Greeno, 1973, str. 114). Zauważa on, że współczesny dorobek teoretyczny jest bogaty w hipotezy dotyczące natury wiedzy pierwszego rodzaju i sugeruje, że aktualne teorie na temat pamięci semantycznej muszą być uzupełnione adekwatną reprezentacją operacji sekwencjalnych (str. 115).

Drugie ograniczenie dotyczy pojęć. Collins i Quillian zakładają, że „Pierwszym przybliżeniem [...] treści pojęcia jest wszystko, co zostało o nim usłyszane, przeczytane lub zobaczone" (Collins i Quillian, 1972). Założenie to jest zapewne słuszne dla każdego pojęcia. Ale pojęcia z dziedziny matematyki i nauk ścisłych są „pojęciami zdefiniowanymi" (Gagné, 1970), a niektóre definicje są tu wyróżnione i grają kluczową rolę w formalizacji przedmiotu. Jedną z oznak braku rozumienia matematycznego jest wyciąganie wniosków na temat pojęcia zdefiniowanego, powiedzmy funkcji, z jego sensu intuicyjnego (Vinner, 1981). Mówić więc, jak ci autorzy, że w modelu sieciowym „wszystko jest określone przez wszystko inne, tak że zwykła logiczna struktura systemów matematycznych nie pozostaje w mocy" (Collins i Quillian, 1972), to stwierdzać niedostatek tego modelu w odniesieniu do matematyki.

Wiadomo dobrze, że matematyka formalna składa się ze zdań. Lecz czy tak właśnie matematyka jest reprezentowana w pamięci? Czy ciągi operacji są pamiętane jako zdania? Jak często twierdzenie jest pamiętane jako rysunek?

Współczesna teoria wyróżnia rozmaite typy pamięci i różne sposoby kodowania informacji. I tak pamięć wzrokowa różni się od werbalnej. Jest także pamięć słuchowa, kinestetyczna, dotykowa i węchowa (Baddeley, 1976). Nad konsekwencjami tych różnic debatowano w ciągu co najmniej dekady. Paivio zaproponował „teorię dwu procesów", zgodnie z którą pamięć długoterminowa zawiera dwa oddzielne, lecz związane ze sobą systemy - jeden odnoszący się do wyobraźni, drugi o charakterze językowym (Paivio, 1971). Tulvig sugerował, że pamięć semantyczna powinna być odróżniana od „pamięci epizodycznej" (Tulvig, 1972). Może być równie dobrze tak, że w ostatecznym rozrachunku jest „jeden system abstrakcyjnej pamięci semantycznej", który przechowuje rozmaite rodzaje informacji, dostępnej różnymi kanałami (Baddeley, 1976); ale powyższe rozróżnienia są ważne dla teorii drugiego rzędu, mających zastosowanie w dydaktyce. Gagné i White posłużyli się nimi dla skonstruowania modelu uczenia pamięci długoterminowej[13] (Gagné i White, 1978).

Model ten postuluje związki między organizacją pamięci a wynikami uczenia się. Autorzy rozróżniają cztery rodzaje struktur pamięci: (a) sieci zdań, (b) sprawności intelektualne, (c) obrazy i (d) epizody. Sprawności intelektualne to zmagazynowane pojęcia, reguły, procedury i plany czy programy działania; stanowią one składniki „hierarchii uczenia się" Gagnégo (Gagné, 1968). Różnica między sprawnościami intelektualnymi a zdaniami to różnica między „wiedzieć jak" i „wiedzieć że". Obrazy nie muszą mieć charakteru wzrokowego i mogą angażować różne poziomy przetwarzania. Zapamiętane „epizody" są osobistym doświadczeniem zdobytym w działaniu. W pojęciu autora wszystko to jest z sobą powiązane. Wyniki uczenia się zostały w rezultacie podzielone na kategorie „wydawania wiadomości" i „stosowania reguł".

Wydaje się oczywiste, że taki model może posłużyć do zaatakowania roli pamięci w nauczaniu. Według nas jednak, nawet ten model nie daje koniecznej podstawy do adekwatnego opisu rozumienia matematycznego. Ujawnia natomiast fakt, że terminów „struktura" i „organizacja" używa się we współczesnej psychologii pamięci w sensie dalekim od matematyki.

Takie ich użycie zakorzeniło się, jak się wydaje, w połowie lat sześćdziesiątych, w okresie raptownego wzrostu zainteresowania organizacją pamięci. Zainteresowanie to ogniskowało się głównie na eksperymentach ze „swobodnym odtwarzaniem", gdzie badany swobodnie odtwarza listę danych, zazwyczaj słów, w dowolnie wybrany sposób. Następnie analizuje się porządek, w jakim słowa są odtwarzane, dla wykrycia przejawów organizacji pamięci. Stwierdzono, że przy zapamiętywaniu list słów badani wykorzystują nie tylko wszelkie cechy organizacji w tych listach, dostrzeżone czy zasugerowane przez badającego, ale także narzucają swą własną subiektywną organizację na losowo dobrany materiał. Przy tym „polecenie zorganizowania materiału prowadzi do dobrego zapamiętania, nawet gdy podmiot nie otrzymał instrukcji nauczenia się go" (Baddeley, 1976).

---

[13] „Uczyć pamięć" znaczy tu „wprowadzać do pamięci informację" (przyp. tłumacza).

Współczesna teoria organizacji powstała głównie w celu ujęcia wyników takich badań. Mówi się, że ujawniła się organizacja, gdy odtwarzany materiał może być sklasyfikowany na specyficzne podzbiory na podstawie ustalonych chwilowych relacji wśród danych na liście (Postman, 1972). „Termin »organizacja« odnosi się na ogół do struktur myślowych, określających relacje wśród danych, zdarzeń, cech itp. Struktury te są co najmniej trzech typów: kategoryczne, serialne i odniesieniowe" (Mandler, 1972). „Serialność" odnosi się tu do cech syntaktycznych, a „odniesieniowość" do stosowania technik mnemonicznych.

Choć ten rodzaj organizacji ma niewiele wspólnego z matematyką w naszym pojęciu, wyraźnie sugeruje, w jaki sposób pamiętają ten przedmiot uczniowie. Wbrew założeniom wczesnych teorii strukturalistycznych, sugeruje ona, że uczący się może organizować matematykę, której się uczy, na swój własny sposób, tak że „pamięta" pewne rzeczy, których nigdy go nie uczono. Powstałe tak struktury mogą poprawić jego rozumienie, ale mogą też produkować zniekształcenia i pomieszanie pojęć, o których mówiliśmy wcześniej. Ten aspekt pamięci badali dwaj psychologowie-konstruktywiści - Bartlett i Piaget.

Transformacje w pamięci

Jasne jest, że poglądy na pamięć charakterystyczne dla lat 1970. powstały pod wpływem badań, których wyniki niezbyt dobrze pasowały do tradycji Ebbinghausa. Niektóre z nich pochodzą sprzed pięćdziesięciu lat i należą do Bartletta (Bartlett, 1932), który radykalnie zerwał z tą tradycją i jest obecnie uznawany za głównego prekursora współczesnej psychologii poznawczej (Mayer, 1977).

Bartlett, badając studentów uniwersytetu, posłużył się metodą powtarzanej reprodukcji. Polecał badanym bądź kilkakrotne odtwarzanie tego samego materiału, bądź też kolejne odtwarzanie go przez różne osoby. Pokazał, że zapamiętane opowiadania (zazwyczaj opowieści ludowe z różnych kultur) przechodziły z upływem czasu systematyczne przeobrażenia, stając się coraz bliższe oczekiwaniom badanych. Opowiadania stawały się coraz bardziej zwięzłe i spójne przez opuszczenie tego, co wydawało się nieistotnym szczegółem, chociaż niektóre rzeczy były uwypuklane i uzupełniane komentarzami. Przykłady zniekształceń były liczne. I tak hinduska opowieść „Wojna duchów" została zniekształcona przez pominięcie wszelkich wzmianek o istotach nadnaturalnych. Niekiedy opowiadanie było zniekształcone nie do poznania.

Bartlett zaproponował dwie podstawowe idee dla wyjaśnienia tych zjawisk. Po pierwsze, zarówno uczenie się i pamiętanie, jak i postrzeganie i myślenie są przejawami podstawowego „wysiłku w poszukiwaniu znaczenia"(14): nowy materiał jest asymilowany do istniejących „schematów", które są zorganizowanymi reprezentacjami dawnego doświadczenia, wcielającymi indywidualny pogląd na rzeczywistość. Po drugie, pamięć nie jest szczegółowa, ale schematyczna. Akt zapamiętywania jest aktywnym „procesem rekonstrukcji". W rezultacie, chociaż pamięć dostarcza szczegółowej informacji, która subiektywnie wydaje się poprawna, może ona poważnie zniekształcać oryginalny materiał.

Piaget i jego współpracownicy potwierdzili i rozszerzyli wyniki Bartletta, pracując z dziećmi i w ramach piagetowskiej teorii rozwoju intelektualnego. Piaget i Inhelder rozróżniali „pamięć w sensie ścisłym" i „pamięć w sensie szerszym" (Piaget i Inhelder, 1973). Ta ostatnia odnosi się do konserwacji operacji i wiedzy ogólnej obejmującej trwałe „schematy inteligencji". Ta pierwsza dotyczy rozpoznawania i przypominania sobie specyficznego obiektu lub zdarzenia napotkanego dawniej. Według Flavella, przypomina to bardzo pamięć epizodyczną Tulviga (Flavell, 1977; Tulvig, 1972). Autorzy przedstawiają serię badań nad tego typu pamięcią.

W jednym z eksperymentów małym dzieciom pokazano rząd 10 równoległych patyczków ułożonych od najmniejszego do największego, prosząc o zapamiętanie go. W tydzień potem, i jeszcze raz po ośmiu miesiącach, zażądano odtworzenia tego szeregu z pamięci. Już uprzednio pokazano, że wykonane przez dzieci rysunki takiego szeregu można podzielić na typy, które odpowiadają znanym stadiom rozwojowym operacyjnego schematu seriacji. Dziecko może narysować pewną liczbę patyczków równej długości; albo grupy patyczków dwu lub trzech długości; albo wreszcie - cały szereg poprawnie. Wszystkie te typy, jak też kilka podtypów korespondujących z piagetowskimi podstadiami dla seriacji, obserwowano w obydwu testach obecnego eksperymentu. Lecz w 74% przypadków rysunki z pamięci w drugim teście były wierniejszą reprodukcją oryginalnego szeregu niż w pierwszym.

Piaget i Inhelder wyciągają ogólny wniosek, że to, co dziecko pamięta, zależy od poziomu jego rozwoju poznawczego. Ponadto twierdzą oni, że odtworzenie z pamięci poprawi się, jeżeli między jednym testem a drugim dokona się postęp w rozwoju odpowiedniego schematu. Pierwszy wniosek został potwierdzony przez innych i wydaje się ogólnie uznany; drugi został przyjęty z pewną dozą sceptycyzmu (Flavell, 1977). Ale poza aspektami „dojrzewania poznawczego" jest w życiu codziennym i folklorze szkolnym wiele przykładów lepszego powtórzenia

(14) W oryginale: effort after meaning.

z pamięci po upływie pewnego czasu (Piaget i Inhelder, 1973; Michener, 1978).

Naszym zdaniem, idea konstruktywistyczna, według której materiał w pamięci podlega - z korzyścią czy na szkodę - jakościowym zmianom, stanowi cenne uzupełnienie informatycznego poglądu na pamięć.

Podejście informatyczne do pamięci rozwinęło się w dużej mierze w związku z badaniami nad pamiętaniem i rozumieniem języka. Głównym celem utworzonych tu modeli było wyjaśnienie zapamiętywania i odtwarzania materiału werbalnego: list słów, zdań i tekstu. Nawet w odniesieniu do takiego materiału uznaje się dziś chyba powszechnie, że - przynajmniej w niektórych przypadkach - „uczenie się wymaga integracji i modyfikacji materiału, a nie tylko jego powiązania" (Claxton, 1980). W ten sposób Claxton sugeruje, że dalszy rozwój psychologii poznania wymaga, by w specyfikacji zawartości pamięci prócz dominującej obecnie „metafory asocjacyjnej" posługiwać się również „metaforą integracyjną" (Claxton, 1980). Wydaje nam się, że takie podejście jest szczególnie właściwe w badaniach nad pamiętaniem i rozumieniem matematyki.

Musimy jednak zaznaczyć, że posługiwanie się konstruktywistycznym spojrzeniem na nauczanie matematyki niesie pewne niebezpieczeństwo. W roku 1974 Wittrock, opierając się na tym podejściu, uczynił bardzo sensowną uwagę, że tym, co ważne dla rozumienia, jest nie metoda nauczania - czy to heurystyczna czy podająca, ale jej wpływ na działanie ucznia. Proponował dalej, by na uczenie się matematyki patrzeć jak na proces generatywny, w którym „uczący się [...] konstruują znaczenie z pamięci". Wysunął nawet „hipotezę, że uczący się musi aktywnie konstruować znaczenie, jeżeli ma się uczyć ze zrozumieniem" (Wittrock, 1974). W hipotezie tej tkwi jednak trudność związana z występowaniem zniekształceń i subiektywną organizacją pamięci. Sugeruje to, że znaczenie konstruowane przez ucznia może być nie tym, którego konstrukcja była intencją nauczyciela. I rzeczywiście, postaramy się pokazać, że gdy uczeń nie jest odpowiednio kierowany, może sobie wytworzyć całkowicie błędne pojmowanie matematyki.

Ciąg zdarzeń stanowiących proces uczenia się bywa często dzielony na cztery fazy: zrozumienie, opanowanie, magazynowanie, odzyskiwanie[(15)] (Gagné, 1970). W przypadku materiału matematycznego, fazy te są ściśle połączone związkami logicznymi. Ponadto występuje pokrewieństwo między formą a treścią matematyki (Byers i Erlwanger, 1984). Może z powodu tych związków i pokrewieństwa transformacje dokonywane w pamięci na materiale matematycznym rzadko okazują się ulepszeniami mnemonicznymi; częściej są po prostu błędami, zniekształceniami i pomieszaniem pojęć.

[(15)] W oryginale: apprehension, acquisition, storage, retrival.

Badania nad uczniowskimi błędami matematycznymi mają długą historię i ogromną literaturę. Mimo to natura i przyczyny błędów matematycznych wciąż nie zostały dobrze zrozumiane. Błędy wydają się mieć specyfikę zależną od materiału nauczania, ale ich pojawianie się stwarza takie wrażenie, jakby było stosunkowo niezależne od programu i metod nauczania. Z pewnością nie zostały one wyeliminowane dzięki próbie „lepszego nauczania matematyki" z lat sześćdziesiątych (Radatz, 1979). „Grube błędy popełniane przez uczniów w okresie nauczania przez ćwiczenie pojawiają się i obecnie, gdy nauczanie ma bardziej pojęciowy charakter" (Suydam i Dessart, 1980). Z drugiej strony obserwowano, że „każdy uczeń ma skłonność do błędów pewnego szczególnego typu" (Carry et al., 1980). Aktualne zgodne stanowisko dydaktyków zajmujących się tym problemem zostało wyrażone następująco przez Ginsburga: „Błędy są rzadko kapryśne czy przypadkowe" (Ginsburg, 1977). Ginsburg dodaje: „Zazwyczaj błędy dzieci są oparte na systematycznych regułach. [...] Błędne reguły dzieci mają sensowne pochodzenie. Są to zazwyczaj zniekształcenia lub błędne interpretacje poprawnych procedur" (Ginsburg, 1977).

Z punktu widzenia praktyki nauczania jest ważne wiedzieć, w jakim momencie uczenia się zjawiają się zniekształcenia. Niestety, nie jest łatwo odpowiedzieć na to pytanie.

Bartlett opisał zniekształcenia, które obserwował, jako zniekształcenia powstałe w pamięci (Bartlett, 1932). Wysunięto jednak przypuszczenie, że wiele z nich było wywołanych częściowym zapominaniem, i były to w istocie „celowe konfabulacje badanej osoby z zamiarem »wygładzenia« opowieści" (Anderson i Bower, 1973). Sugerowano także, że zapamiętywanie fragmentu prozy jest analogiczne do streszczania go, tak więc zniekształcenia pojawiałyby się raczej w czasie uczenia się niż przy magazynowaniu czy odzyskiwaniu materiału (Baddeley, 1976). Piaget i Inhelder w odniesieniu do swojego materiału odrzucają zniekształcenia na wejściu, twierdzą jednak, że transformacje pamięci występują w całym okresie przechowywania (Piaget i Inhelder, 1973, str. 383-387). Pojawianie się zniekształceń w czasie uczenia się matematyki jest dość dobrze znane; mało natomiast wiadomo, jak i kiedy się one zjawiają. Zebrane fakty wskazują, że zniekształcenia materiału matematycznego mogą zjawić się w dowolnej fazie procesu uczenia się.

Według Carry et al. (1980), większość błędów obserwowanych przez tych autorów przy rozwiązywaniu równań popełniono w czasie prób odtworzenia częściowo zapamiętanych procedur. Ale obserwowali oni także co najmniej dwie tendencje, które trudno byłoby dopasować do powyższej reguły; jedna polegała na ignorowaniu nawiasów lub dostrzeganiu ich tam, gdzie ich nie było, druga - na stapianiu upraszczania przez odejmowanie i przez dzielenie w jedną wymyśloną wspólną operację, którą autorzy nazwali „kasowaniem". Z drugiej strony, Jenks et al. (1980) podali przykład, gdzie zniekształcenie procedury matematycznej nastąpiło - jak się wydaje - dokładnie wtedy, gdy, według Bartletta, następuje zniekształcenie materiału werbalnego - w czasie magazynowania.

Erin była córką jednego z autorów artykułu. W szkole przerabiała właśnie z arytmetyki „przenoszenie"(16) i szło jej to bardzo dobrze aż do ferii świątecznych. Po feriach zaczęła dawać systematycznie błędne odpowiedzi. Ojciec zaaranżował zabawę w prowadzenie magazynu firmy „pakującej cukierki". Polegało to na układaniu po dziesięć klocków reprezentujących cukierki do butelki plastikowej, gdy tylko było jeszcze dość klocków. Po chwili Erin nagle wykrzyknęła: „Ja przenosiłam pojedyncze zamiast paczek!" I pokazała ojcu następujący rachunek:

$$\begin{array}{r} {}^{4}36 \\ +\ 28 \\ \hline 91 \end{array}$$

Trudno jest określić dokładnie, kiedy po raz pierwszy pojawiło się pomieszanie pojęć w kolejnym przykładzie, wydaje się tylko, że rozwijało się ono w dłuższym czasie; przykład ten ujawnia natomiast nowe, ogromnie interesujące szczegóły.

Dwunastoletni Benny był najlepszym uczniem w klasie, gdzie korzystano ze zindywidualizowanych tekstów matematycznych (IPI), które miały ograniczać do minimum udział nauczyciela. Benny widział jednak w matematyce nie racjonalnie i logicznie zbudowany przedmiot, lecz ogromną kolekcję dowolnych reguł, które stosował polując na odpowiedzi zgodne z oczekiwanymi przez nauczyciela. Wytwarzał także własne reguły, które stosował systematycznie i był gotów je objaśnić. Według niektórych z nich $0,3 \times 0,4 = 0,12$, $0,3 + 0,4 = 0,07$, $2/4 + 2/4 = 4/4 = 1$ i $2/1 + 1/2 = 3/3 = 1$ (Erlwanger, 1973). Benny, jak się zdaje, „uogólniał" reguły mnożenia ułamków dziesiętnych i zwykłych na niektóre przypadki dodawania. A dla wyjaśnienia niemożliwych do przyjęcia odpowiedzi „uogólnił" także swoje odkrycie, że ta sama odpowiedź może mieć różne formy, w swoistą „teorię względności" treści matematycznych (Byers i Erlwanger, 1984).

(16) Chodzi o przenoszenie do wyższego rzędu cyfry dziesiątek w algorytmie dodawania (przyp. tłumacza).

Studium przypadku Bennyego nie pasuje zbyt dobrze do żadnego z omawianych wyżej poglądów na pamięć; ale pojęcie „rzekomego uogólnienia" daje się bardzo dobrze zaszeregować do kategorii „transformacji w pamięci". Choć mechanizm powstałych zniekształceń jest niezbyt jasny, jakoś poradziła sobie z tym nauczycielka uczestnicząca w seminarium na temat rozumienia matematyki. Zauważyła ona, że praktycznie dla wszystkich dzieci 1/2 + 1/3 = 5/6 dopóty, dopóki nie wprowadzi się mnożenia ułamków; wtedy „1/2 + 1/3 nagle dla niektórych dzieci staje się równe 2/5". Podobnie „łatwo jest uczniom zrozumieć, że 2x + 3x = 5x, dopóki nie spotkają się z (2x)x(3x), kiedy to 2x + 3x staje się dla nich równe $5x^2$!"

Langford (1972) otrzymał podobne odpowiedzi, badając strategie rachunkowe 176 uczniów klasy VII. Niektóre odpowiedzi były następujące: 3/4 + 5/2 = 8/6 (36 uczniów), 3/8 + 7/8 = 10/16 (37 uczniów), 2/3 + 1/2 = 3/5 (31 uczniów), 3/4 - 1/2 = 2/2 czyli 1 (44 uczniów), 2/3 x 3/5 = 10/15 x 9/15 = = 90/15 (27 uczniów) i 9/10 : 3/10 = 3/10 (61 uczniów). Zauważa on: „To, co wydaje się skutkiem nieuwagi kiepskich rachmistrzów, ma często podstawę racjonalną, choć błędną"(Langford, 1972, str. 39). Widzimy więc, że nie tylko wcześniej opanowana operacja przeszkadza w nauczeniu się nowej (Radatz, 1979), ale także - odwrotnie - do częstych zjawisk należy zniekształcenie dawnego materiału przez fałszywe uogólnienia świeżego (Davis, 1983).

Wydaje się nam, że głównego źródła błędów matematycznych należy szukać w transformacjach pamięci i subiektywnej organizacji. Przypuszczamy, że wiele błędów pochodzi z uczniowskich prób uproszczenia materiału matematycznego. Uczeń próbuje wprowadzić swą własną unifikację, spójność i zgodność w materiale, którego uczył się w różnych okresach, opierając się przy tym na hipotezach, które wydają mu się zarówno proste, jak i sensowne. Ponieważ zaś występuje wówczas tendencja do mylenia dawnych i nowych pojęć, strategii i algorytmów, a także podstawiania jednych za drugie, pojawiające się błędy są często przypisywane „interferencji" (Radatz, 1979). Sądzimy, że w wielu przypadkach termin „fałszywe uogólnienie" jest odpowiedniejszy. Ponadto, bez względu na to, w którym momencie procesu uczenia pojawiają się te uogólnienia domowego wyrobu, można je rozpatrywać jako szczególne przypadki „wysiłku w poszukiwaniu znaczenia" Bartletta. Nie trzeba dodawać, że „znaczenie" wytworzone takim wysiłkiem - bez względu na to, czy zadowala ucznia, czy nie - nie może być matematycznie wartościowe.

Pamiętanie matematyki jest zadaniem bardziej złożonym niż pamiętanie obrazka lub opowiadania. Po pierwsze bowiem, symbolika matematyczna jest pełna istotnych szczegółów, po drugie zaś, twierdzenie matematyczne, czy to w formie zdaniowej, czy algorytmicznej, samo jest pewnym skrótem. Choć trzeba odróżniać sens takiego twierdzenia od jego formy, drobne zmiany wysłowienia mogą twierdzenie prawdziwe zmienić w fałszywe, a drobne zmiany procedury dają często błędne odpowiedzi na zadania. Nieliczni uczniowie umieją poprawnie wypowiedzieć twierdzenie czy definicję, co sprawia, że należy to do trudnych pytań egzaminacyjnych nawet na poziomie uniwersyteckim. Tak więc uczenie się matematyki zazwyczaj angażuje zarówno pamięć werbalną, semantyczną, jak i obrazową. Złożoność tego zadania tłumaczy częste korzystanie ze słów-kluczy przy rozwiązywaniu zadań (np. „i" znaczy „dodać"), a także dominację mechanicznego zapamiętywania, o czym wspominaliśmy wcześniej.

Jasne jest, że stwierdzenie, iż „rozumieć matematykę znaczy [...] móc robić matematykę" (Byers, 1980) jest niewystarczające. Trzeba wymagać, by uczeń mógł robić dobrą matematykę. To zaś implikuje sprawne odtwarzanie odpowiednich wiadomości i umiejętności. Stąd dobry uczeń tak organizuje swoją wiedzę matematyczną, by zminimalizować wysiłek poznawczy. Umie on utrafić we właściwą proporcję pamięci i dedukcji. Wie na przykład, które wzory trzeba zapamiętać, które wystarczy zapamiętać tylko częściowo, a częściowo wyprowadzać, wreszcie które można zostawić do wyprowadzenia w razie potrzeby, z powodzeniem stosuje sposoby mnemoniczne, a nawet potrafi wymyślać własne. Słaby uczeń nie umie tego; próbuje więc zapamiętać na siłę mnóstwo reguł, faktów i procedur. Jest widoczne, że pamiętanie matematyki jest ważną umiejętnością, różną od przedmiotu jako takiego.

Praktyczne zagadnienie: jak uczyć pamiętania matematyki - przekracza tematykę tego artykułu, chcielibyśmy jednak powiedzieć parę słów o pewnym pokrewnym problemie. Jak się wydaje, wiedza i umiejętności matematyczne są ogromnie podatne na zniekształcenia pamięci. Wynikający stąd problem jest niewątpliwie ważny, lecz dotąd nie ma zgodności co do natury tych zniekształceń i ich traktowania w nauczaniu. W szkolnej praktyce nazywa się je błędami i na ogół zaleca się powtórki; z drugiej strony teoria od dawna zaleca (z wyjątkiem Gagné, 1983) rozumienie - co w tym kontekście sprowadza się do lepszego odróżniania pojęć. To bowiem uważa się za główną funkcję powtórki, w przeciwieństwie do ćwiczeń i recytacji (Butler i Wren, 1941). Obydwa te podejścia w różnym stopniu spotykały powodzenia i niepowodzenia. Pierwsze wydaje się skuteczne dla zapamiętywania krótkoterminowego; drugie wymaga chyba warunków dla nauczania indywidualnego. Jednak nawet te stwierdzenia mogą wymagać modyfikacji w świetle pewnych wyników uzyskanych przez Sadowską i McIlveena (1984)(17). Sądzimy, że problem ten może być przedmiotem owocnych badań metodami nowej psychologii poznania.

Wnioski

Aktualny cel kształcenia matematycznego sprowadza się do tego, by wszyscy uczniowie rozumieli matematykę po to, by radzić sobie z wymaganiami, jakie stawia złożony świat nowoczesnej techniki. Nie wystarczy już ograniczyć wymagania rozumienia do garstki uczniów, którzy mogliby je osiągnąć bez większej pomocy ze strony nauczyciela. Stoimy więc wobec zadania, jak pomóc uczniom nie będącym matematykami z urodzenia. Rozwiązanie tego zadania nie będzie łatwe. Po pierwsze bowiem wymagać to będzie zmiany postawy u dydaktyków matematyki, którzy wciąż przeciwstawiają rozumienie - pamięci, a tę ostatnią traktują jako magazyn reguł i faktów, które trzymają się razem dzięki dość luźnym związkom asocjacyjnym, i w rezultacie są kiepsko przechowywane lub ulegają całkowitemu zapomnieniu. A po drugie, przepaść, jaka według nas dzieli wyniki badań nad pamięcią i teorię oraz praktykę nauczania matematyki, będzie musiała ulec znacznemu zwężeniu. Gdy bowiem poglądy dydaktyków na pamięć pozostawały stosunkowo niezmienne, poglądy psychologów uległy całej serii doniosłych zmian.

Dawniejsze ilościowe podejście do pamięci ustąpiło miejsca podejściu strukturalistycznemu, jakościowemu. Niestety jednak, to ostatnie zakładało, że w pewnych optymalnych warunkach nauczania struktury matematyczne w pamięci są zasadniczo identyczne ze strukturami matematyki formalnej. Wskutek tego teoria ta nie mogła postawić - nie mówiąc o odpowiedzi - wielu doniosłych pytań, których część omówiliśmy wyżej. Podejście informatyczne, które nastąpiło potem, traktowało pamięć jako integralną część innych aktywności przetwarzania informacji, mogło więc sprostać niektórym problemom dydaktycznym. Trzymało się ono jednak pochodzącej od Ebbinghausa orientacji na materiał pozostały w pamięci;

---

(17) Uczniowie IV i V klasy odpowiadali na pytanie o sposób rozwiązania każdego z 24 podanych równań z „okienkiem", np. 1) 14-6= □, 4) □ + 9 =14, 19)□:12=24 [...] Poprawną odpowiedzią na zadanie 4) mogłoby być „Odjąć 9 od 14" albo „14-9". Zauważono dwa typy powtarzających się błędów; jeden zdawał się polegać na systematycznym wybieraniu działania odwrotnego. Efekty nauczania korektywnego, w którym starano się kształtować pojęciowe aspekty liczb i działań, były bardzo pozytywne. Jednak powtórne badanie po dalszych 6 tygodniach wykazało m.in., że większość uczniów, którzy za pierwszym razem błędnie wybierali działanie odwrotne, powróciło do tej strategii, mimo że porzucili ją bezpośrednio po nauczaniu korektywnym (przyp. tłumacza).

w rezultacie nie mogło zająć się zniekształceniami w pamięci, które, jak się wydaje, są odpowiedzialne za trudności w uczeniu się i rozumieniu matematyki. Podejście to nie zwróciło też dostatecznie uwagi na powiązania między różnymi pojęciami i procesami matematycznymi (Claxton, 1980), choć powiązania te są istotne dla opanowania przedmiotu.

Wraz z podejściem konstruktywistycznym wielostronne badanie pamięci nabrało rosnącego znaczenia. I tak Piaget podjął takie badania w związku ze swymi pracami nad rozwojem inteligencji człowieka, gdy Claxton sugerował, że „całe poznanie może być uważane za studium pamięci" (Claxton, 1980). Tym niemniej nowa psychologia poznania zbyt pochopnie wyciągała ogólne wnioski ze sztucznych sytuacji laboratoryjnych, w dodatku pomyślanych w celu zbadania zapamiętywania i rozumienia języka, a nie matematyki. Stąd częste żądania „rzetelności ekologicznej"[(18)] (Claxton, 1980) i podkreślanie z naciskiem, że „mechanizmy poznawcze mają specyfikę zależną od treści" (Allport, 1980). Neisser wypowiedział w związku z tym odważny pogląd: „Myślę, że pamięć w ogóle nie istnieje [...] Pojęcie to odziedziczyliśmy po psychologii średniowiecznej, która dzieliła umysł na niezależne funkcje: »myśl«, »wola«, »uczucie«, i wiele innych, a »pamięć« wśród nich. Porzućmy to i zacznijmy inaczej stawiać pytania. Tym, co nas interesuje, jest - jak sądzę - jak ludzie korzystają ze swego dawnego doświadczenia w zetknięciu z teraźniejszością i przyszłością" (Neisser, 1978).

Starajmy się za wszelką cenę stawiać właściwe pytania, ale „dawne doświadczenie" stanowi z pewnością zbyt ogólną charakterystykę tego, co chcemy pamiętać z matematyki. Bez wątpienia badanie roli pamięci dla rozumienia matematyki jest zadaniem ekologicznie rzetelnym. Zadanie to nie wymaga traktowania pamięci jako „funkcji" umysłu; ale wymaga użycia w eksperymentach materiału takiego rodzaju, jakiego jest pełno w nauczaniu tego przedmiotu. W związku z tym z radością obserwujemy ostatnio duży wzrost zainteresowania procesami poznawczymi myślenia matematycznego, którego wyrazem są takie prace, jak Resnick (1983), Riley et al. (1983) i Burton (1984).

Przyznajemy, że streszczone tutaj wyniki psychologii, a w szczególności „nowe kierunki" w psychologii poznania, w gruncie rzeczy poszerzyły przepaść, o której była mowa wyżej; ale wierzymy też, że stworzyły one nowe możliwości

---

[(18)] Przymiotnik „ekologiczny" należy tu rozumieć w sensie ekologii społecznej, badającej „związki między przestrzennym układem danych zjawisk społecznych a ich charakterem" (Słownik języka polskiego PWN). Chodzi więc o prowadzenie badań w środowisku szkolnym, a nie laboratoryjnym, nienaturalnym dla badanych zjawisk (przyp. tłumacza).

dla jej zamknięcia. Mamy nadzieję, że ten artykuł stanowi przyczynek zbliżający nas do tego celu.

Bibliografia

ALLPORT, D.A.: 1980, Patterns and actions: cognitive mechanisms are content--specific, w G. Claxton (ed.): Cognitive Psychology: New Directions, Routledge and Kegan Paul, London, str. 26-64.

ANDERSON, J.R. and BOWER, G.H.: 1973, Human Associative Memory, Wiley, Halstead Press.

AUSUBEL, D.P.: 1968, Educational Psychology: A Cognitive View, Holt, Rinehart and Winston, str. 113-114.

-: 1971, Some psychological and educational limitations of learning by discovery, w D.B. Aichele and R.E. Reyes (eds.): Reading in Secondary School Mathematics, Prindle, Weber and Schmidt, str. 193-209.

BADDELEY, A.D.: 1976, The Psychology of Memory, Basic Books.

BARTLETT, F.C.: 1932, Remembering: A Study in Experimental and Social Psychology, Cambridge University Press.

BELL, A.W.: 1976, The Learning of General Mathematical Strategies, Ph.D. Thesis, Centre for Mathematical Education, University of Nottingham, str.918.

BOYER, C.B.: 1968, A History of Mathematics, Wiley, str. 53.

BRANCA, N.A.: 1980, Communication of mathematical structure and its relationship to achievement , Journal for Research in Mathematics Education 11, 37-49.

BRUNER, J.S.: 1961, The act of discovery , Harvard Educational Review 31, 21-32.

-: 1962, The Process of Education, Harvard University Press (wyd. polskie: PWN, Warszawa 1965).

-: 1973, Beyond the Information Given: Studies in the Psychology of Knowing, Norton (wyd. polskie: PWN, Warszawa 1978).

BURTON, L.: 1984, Mathematical thinking: the struggle for meaning , Journal for Research in Mathematics Education 15, 1, 35-49.

BUTLER, H.C. and WREN, F.: 1941, The Teaching of Secondary Mathematics, 1st ed., McGraw-Hill.

BYERS, V.: 1980, What does it mean to understand mathematics? , International Journal of Mathematics Education Science and Technology 11, 1, 1-10.

-, and Erlwanger, S.H.: 1984, Content and form in mathematics , Educational Studies in Mathematics 15, 259-275.

-, and Herscovics, N.: 1977, Understanding school mathematics , Mathematics Teaching 81.

CARRY, L.B., LEWIS, C. and BERNARD, J.F.: 1980, Psychology of Equation Solving: An Information Processing Study, Final Technical Report, Dept. of Curriculum & Instruction. University of Texas At Austin.

CLAXTON, G.: 1980, Remembering and understanding , w G. Claxton (ed.): Cognitive Psychology: New Directions, Routledge and Kegan Paul, str. 197-235.

-: 1980, Cognitive psychology: a suitable case for what sort of treatment?, w: G. Claxton(red.): Cognitive Psychology:New Directions, Routledge and Kegan Paul, str. 1-25.

COLLINS, A.M. and QUILLIAN, M.R.: 1972, How to make a language user , w: E.Tulvig and W. Donaldson(red.): Organization of Memory, Academic Press, str. 309-351.

DAVIS, E.J.: 1978, A model for understanding understanding in mathematics , Arithmetic Teacher, September.

DAVIS, R.R.: 1983, Complex mathematical cognition , w: H.P. Ginsburg (red.): The Development of Mathematical Thinking, Academic Press, New York, str. 254--290.

ERLWANGER, S.H.: 1973, Benny's conception of rules and answers in IPI mathematics , Journal of Childrens' Mathematical Behaviour 1, 2.

FLAVELL, J.H.: 1977, Cognitive Development, Prentice-Hall.

FREEMONT, H.: 1971, New mathematics and old dilemmas , w: D.B. Aichele and R.E. Reyes (red.): Readings in Secondary School Mathematics, Prindle, Weber and Schmidt, 4.

GAGNÉ, R.M.: 1968, Learning hierarchies , Educational Psychologist 6, 1-9.

-: 1970, Conditions of Learning, 2nd Ed., Holt Rinehart and Winston.

-: 1983, Some issues in the psychology of mathematics instruction , Journal for Research in Mathematics Education 14, 7-18.

- and WHITE, R.T.: 1978, Memory structures and learning outcomes , Review of Educational Research, 48, 2, 187-222.

GEESLIN, W.E. and SHAVELSON, R.J.: 1975, Comparison of content structure and cognitive structure in high school students' learning of probability , Journal for Research in Mathematics Education 6, 109-120.

GINSBURG, H.: 1977, Children's Arithmetic: The Learning Process, D. van Nostrand, str. 128-129.

GREENO, J.G.: 1973, The structure of memory and the process of solving problems w R.L. Solso (red.): Contemporary Issues in Cognitive Psychology: The Loyola Symposium, Winston, 103-134.

GREER, B.: 1981,Cognitive psychology and mathematical thinking, For the Learning of Mathematics 1, 3, 22-24.

HEBB, D.O.: 1972, Textbook of Psychology, 3rd ed., Saunders,str.99.

HILGARD, E.R.: 1957, Introduction to Psychology, 2nd ed., Harcourt Brace, str. 285-302 (wyd. polskie, PWN, Warszawa 1967).

JENKS, S.M., PECK, D.M. and CHATTERLEY, L.J.: 1980, Why blame the kids? We teach mistakes! , Arithmetic Teacher 28, 2, str. 38-41.

KRUTETSKII, V.A.: 1976, The Psychology of Mathematical Abilities in School Children, w J. Kilpatrick and I. Wirszup (red.), University of Chicago Press.

LANGFORD, F.G.: 1972, Some Computational Strategies of Seventh Grade Pupils, University of Virginia, Charlottesville.

LEHMAN, H.: 1977, On understanding mathematics , Educational Theory, 27, 2.

MANDLER, G.: 1972, Organization and recognition , w: E. Tulvig and W. Donaldson (red.): Organization of Memory, Academic Press, str. 146-167.

MAYER, R.E.: 1977, Thinking and Problem Solving: An Introduction to Human Cognition and Learning, Scott, Foresman & Co.

- and GREENO, J.G.: 1972, Structural differences between learning outcomes produced by different instructional methods , Journal of Educational Psychology 63, str.165-173.

MICHENER, E.R.: 1978, Understanding understanding mathematics , Cognitive Science 2, 361-383.

MILLER, G.A.: 1956, The magical number seven, plus or minus two: some limits on our capacity for processing information , Psychological Review 63, str.81-96.

MORGAN, C.T. and DEESE, J.: 1957, How to Study, McGraw-Hill.

MORRIS, J.: 1981, Math anxiety: teaching to avoid it , Mathematics Teacher 74, 6, str. 414.

NEISSER, U.: 1978, What are the important questions?, w: M,M. Guneberg, P.E. Morris, and R.N. Sykes (red.): Practical Aspects of Memory, Academic Press, str. 3-24.

OSGOOD, C.E.: 1953, Method and Theory in Experimental Psychology, Oxford, str. 570.

PALVIO, A.: 1971, Imagery and Verbal Processes, Holt, Reinhart & Winston.

POSTMAN, L.: 1972, A pragmatic view of organization theory , w: E. Tulvig and W. Donaldson (eds.): Organization of Memory, Academic Press, str. 3-48.

PIAGET, J. and INHELDER, B.: 1973, Memory and Intelligence, Basic Books.

RADATZ, H.: 1979, Error analysis in mathematics education , Journal for Research in Mathematics Education 10, 163-171.

RESNICK, L.B.: 1983, A developmental theory of number understanding , w: H.P. Ginsburg (red.): The Development of Mathematical Thinking, Academic Press, New York, str. 109-151.

RILEY, M.S., GREEN, J.G. and HELLER, J.I.: 1983, Development of children's problem solving ability in arithmetic , w: H.P. Ginsburg (red.): The Development of Mathematical Thinking, Academic Press, New York, str. 153-196.

SADOWSKI, B.R. and MCILVEEN, D.H.: 1982, Diagnosis and remediation of sentence-solving error patterns , Arithmetic Teacher 31, 5, 42-45.

SCOPES, P.G.: 1973, Mathematics in Secondary Schools - A Teaching Approach, Cambridge University Press, str. 86.

SHAVELSON, R.J.: 1972, Some aspects of the correspondence between content structure and cognitive structure in physics instruction , Journal of Educational Psychology 63, 225-234.

-: 1974, Methods for examining representations of a subject-matter structure in a student's memory , Journal of Research in Science Teaching 11, 231--249.

SHULMAN, L.S.: 1970, Psychology of mathematics education , w: Mathematics Education, Yearbook 69, National Society for the Study of Education, Part I, University of Chicago Press.

SKEMP, R.R.: 1976, Relational understanding and instrumental understanding , Mathematics Teaching 77.

-: 1979, Goals of learning and qualities of understanding , ibidem 88.

-: 1979, Intelligence, Learning and Action, Wiley, str. 259-260.

SUYDAM, M.N. and DESSART, D.J.: 1980, Skill learning , w: R.J. Shumway (red.): Research in Mathematics Education, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, str. 207-243.

TULVIG, E.: 1972, Episodic and semantic memory , w: E. Tulvig and W. Donaldson (red.): Organization of Memory, Academic Press, str. 381-403.

VINNER, S.: 1981, Personal communication.

WERTHEIMER, M.: 1959, Productive Thinking, enl. ed., Harper, str. 11.

WITTROCK, M.C.: 1974, A generative model of mathematics learning , Journal of Research in Mathematics Education 5, 181-196.

WOODWORTH, R.S. and SCHLOSSBERG, H.: 1954, Experimental Psychology, 2nd ed., Holt, str. 730.

(Z angielskiego tłumaczył STEFAN TURNAU)

MEMORY IN MATHEMATICAL UNDERSTANDING

Summary

Whatever cognitive processes are involved in understanding mathematics, it is clear that one of them is learning. No one is born with an understanding of measure theory, abstract algebra or general topology; the very name mathematics means "that which is to be learned" (Boyer, 1968). One of the outcomes of learning is remembered knowledge. Indeed it is our contention that memory plays an essential role in the understanding of mathematics. However, what it is that is remembered by students who understand mathematics in contrast to those who do not is by no means a trivial question. In fact, we would like to suggest that there is a gap in this connection between recent developments in memory research and the theory and practice of mathematics education. A second purpose of the present article is to survey briefly the origins of this gap.