ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE IX (1965)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Т. Стысь (Варшава)

Об однозначной разрешимости первой задачи Фурье для одной параболической системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка

В работе [1], гл. V, приведены теоремы об однозначной разрешимости первой задачи Фурье для дифференциального уравнения второго порядка, параболического типа. Здесь эти теоремы обобщаются на случай системы линейных уравнений соответствующей эллиптической системе рассматриваемой в [2] и [3]

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}\frac{\partial u_h}{\partial x_k}\right) + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u_h}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{p} F_{hj} u_j = C\frac{\partial u_h}{\partial t}, \tag{1}$$
$$(h = 1, 2, \ldots, p;\ A_{ik} = A_{ki}).$$

Систему (1) будем рассматривать в области $D = \{(x, t): x \in B, t > 0\}$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, B — ограниченная область в пространстве X. Функции $\partial A_{ik}(x, t)/\partial x_l$, $B_i(x, t)$, $F_{hj}(x, t)$, $C(x, t)$ $(i, k, l = 1, 2, \ldots, n;$ $h, j = 1, 2, \ldots, p)$ предполагаются непрерывными в замкнутой области $\bar{D}_T = \{(x, t): x \in \bar{B}, 0 \leqslant t \leqslant T\}$, а форма $\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\delta_i\delta_k > 0$ для $(x, t) \in D$, $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) \neq 0$. Кроме того, предполагается существование двух положительных констант C_0 и C_1 таких, что $C_0 \leqslant C(x, t) \leqslant C_1$ в области D. Обозначим через S_0 и S_T часть границы области D_T соответствующую $t = 0$ и $t = T$, а через σ_T боковую поверхность области D_T, т. е. $\sigma_T = \{(x, t): x \in \partial B,\ 0 < t < T\}$ где ∂B — обозначает границу B.

Теорема 1. *Если $u = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ является регулярным*(1) *решением системы* (1) *в области D_{T_0}, а матрица $F = (F_{hj})_{h,j=1}^{p}$ удовлетворяет неравенству $\eta F \eta^* \leqslant 0$ для любого действительного вектора $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p)$ и любой точки $(x, t) \in D_{T_0}$, то при $T < T_0$ функция $|u| = (u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_p^2)^{1/2}$ достигает своей верхней грани на $\sum_T = S_0 + \sigma_T$.*

(1) *Регулярной* функцией в области D называем функцию непрерывную в замкнутой области $\bar{D}$ и дважды непрерывно дифференцируемую в D.

Доказательство. Легко проверяется, что $|u|^2$ удовлетворяет уравнению

$$(2)\qquad \sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}\frac{\partial|u|^2}{\partial x_k}\right)+\sum_{i=1}^{n}B_i\frac{\partial|u|^2}{\partial x_i}-C\frac{\partial|u|^2}{\partial t}= =2\left(\sum_{i,k=1}^{n}A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u^*}{\partial x_k}-uFu^*\right).$$

Из теоремы 2 в [1], гл. V, стр. 178, сразу следует, что функция $|u|^2$ достигает своей верхней грани на Σ_T, а с ней функция $|u|$ также. Из теоремы 1 следует:

Следствие 1. *Если u является регулярным решением системы* (1) *в области D_{T_0}, исчезающим на Σ_{T_0}, а матрица F удовлетворяет неравенству $\eta F\eta^*\leqslant 0$ для любого действительного вектора $\eta=(\eta_1,\eta_2,\ldots\ldots,\eta_p)$ и любой точки $(x,t)\in D_{T_0}$, то $u\equiv 0$ в области D_{T_0}.*

Теорема 2 (М. Пиконе). *Если существует функция v регулярная в D_{T_0}, удовлетворяющая условиям:*

$$\text{(a)}\qquad v>0 \quad \text{в области} \quad \overline{D}_{T_0},$$

$$\text{(b)}\qquad Lv\equiv\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)+\sum_{i=1}^{n}B_i\frac{\partial v}{\partial x_i}-C\frac{\partial v}{\partial t}+v\sum_{h,j=1}^{p}|F_{hj}|\leqslant 0 \quad \text{в области} \quad D_{T_0},$$

то единственным регулярным решением системы (1), *равным нулю на Σ_{T_0}, является функция $u\equiv 0$.*

Доказательство. Пусть $\omega=\dfrac{|u|^2}{v}$, тогда подставляя в уравнение (2) $|u|^2=\omega v$, получим

$$(3)\qquad v\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)+v\sum_{i=1}^{n}\overline{B}_i\frac{\partial\omega}{\partial x_i}-Cv\frac{\partial\omega}{\partial t}+ +\left[\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)+\sum_{i=1}^{n}B_i\frac{\partial v}{\partial x_i}-C\frac{\partial v}{\partial t}\right]\omega+2uFu^*=2\sum_{i,k=1}^{n}A_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial u^*}{\partial x_k}.$$

Так как $2uFu^*\leqslant\omega v\sum\limits_{h,j=1}^{p}|F_{hj}|$, то на основании (3) имеем

$$(4)\qquad \sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)+\sum_{i=1}^{n}\overline{B}_i\frac{\partial\omega}{\partial x_i}-C\frac{\partial\omega}{\partial t}+\omega Lv\geqslant 0.$$

Из неравенства (4) следует (см. [4]), что функция ω достигает своей верхней грани на Σ_{T_0}, но на Σ_{T_0} $\omega = 0$, потому $u \equiv 0$ в D_{T_0}.

Из теоремы 2 вытекает

Следствие 2. *Если u регулярное решение системы* (1) *в области D_{T_0} равно нулю на Σ_{T_0} и матрица F ограничена в D_{T_0}, то $u \equiv 0$ в D_{T_0}.*

Пусть $\gamma = \sup\limits_{(x,t)\in D_{T_0}} \Big(\sum\limits_{h,j=1}^{p} |F_{hj}(x,t)|\Big)$, возьмем $v = e^{\gamma t}$ тогда $v > 0$ в $\bar{D}_{T_0}$ и $Lv = \Big(\sum\limits_{h,j=1}^{p} |F_{hj}| - \gamma\Big)v \leqslant 0$, таким образом функция v удовлетворяет предположениям теоремы 2, откуда $u \equiv 0$ в D_{T_0}. Используя указаные выше теоремы можно доказать, что свойства решений параболического уравнения второго порядка в неограниченных областях, указаные в [1] и [5], переносятся на решения системы (1).

Пусть

$$D^0 = \{(x,t)\colon x\in B_0,\ t > 0\} \quad \text{и} \quad D^0_T = \{(x,t)\colon x\in B_0,\ 0 < t < T\},$$

где B_0 — неограниченная область. Оставляя предположения относительно коэффициентов системы (1), принятые для областей D и D_T в областях D^0 и D^0_T, докажем следующую теорему:

Теорема 3. *Если существует функция v регулярная в области $D^0_{T_0}$ и удовлетворяющая условиям*

$$\text{(a)} \qquad v > 0 \quad \textit{при} \quad (x,t)\in D^0_{T_0},$$

$$\text{(b)} \qquad Lv \leqslant 0 \quad \textit{при} \quad (x,t)\in D^0_{T_0},$$

то единственным регулярным решением системы (1) *в области $D^0_{T_0}$, равным нулю на $\Sigma^0_{T_0}$ и удовлетворяющим условию*

$$\text{(c)} \qquad \lim_{\varrho\to\infty} \frac{|u(x,t)|}{v(x,t)} = 0 \quad \textit{где} \quad \varrho = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)^{1/2},$$

является решение $u \equiv 0$ в $D^0_{T_0}$.

Доказательство. Через D_R обозначим область $\{(x,t)\colon x\in B_0,\ \varrho \leqslant R,\ 0 < t < T < T_0\}$. Граница области D_R состоит из боковой поверхности σ_R, уравнение которой $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = R^2$ при $x\in B_0$, и из $\sigma_R^* = D_R \cap \sigma_T$, а также и с ограниченных множеств S_0^R и S_T^R соответствующих $t = 0$ и $t = T$. Также как в доказательстве теоремы 2 проверяется, что функция $\omega = \dfrac{|u|^2}{v}$ достигает своей верхней грани на множестве $\Sigma^R_{T_0} = S_0^R \cup \sigma_R \cup \sigma_R^*$. В силу условия (c) и предположения равенства нулю u на Σ_{T_0}, при любом действительном $\varepsilon > 0$ и достаточно большим R, имеем $\omega < \varepsilon$ для $(x,t)\in\Sigma^R_T$, таким образом $\omega \equiv 0$ в D_R, откуда $u \equiv 0$.

В работе [5] дается доказательство теоремы Ц. Штурма для параболического уравнения второго порядка в области неограниченной в направлении t. Эту теорему при некоторых предположениях можно перенести на случай рассматриваемой здесь системы (1). В ограниченной области B рассматривается следующую систему линейных уравнений

$$(5)\qquad \sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}\frac{\partial v_h}{\partial x_k}\right)+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial v_h}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{p}f_{hj}v_j=0 \qquad (a_{ik}=a_{ki}).$$

Функции $\dfrac{\partial a_{ik}(x)}{\partial x_l}, \dfrac{\partial b_i(x)}{\partial x_l}$, $f_{hj}(x)$ $(i,k,l=1,2,\ldots,n;\ h,\ j=1,2,\ldots,p)$ предполагаются непрерывными в области B, а формы $\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}\delta_i\delta_k>0$ и $\sum\limits_{i,k=1}^{n}(a_{ik}-A_{ik})\delta_i\delta_k\geqslant 0$, при любом действительном $\delta=(\delta_1,\delta_2,\ldots$ $\ldots,\delta_n)\neq 0$ и $(x,t)\in D^0$.

Теорема 4 (Ц. Штурма). *Если $v=(v_1,v_2,\ldots,v_p)$ является регулярным решением системы* (5) *в области B, равным нулю на границе B и отличным от нуля в B и если* .

$$\int_0^T \theta(t)dt\to+\infty \qquad при \qquad T\to+\infty,$$

причём

$$\int_B\Bigg\{\sum_{i,k=1}^{n}(a_{ik}-A_{ik})\frac{\partial|v|}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial|v|}{\partial x_k}-\frac{|v|^2}{4}\Bigg[2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i}-\frac{\partial B_i}{\partial x_i}\right)-\sum_{i,k=1}^{n}A^{ik}B_iB_k+$$
$$+4\left(e_uFe_u^*-e_vfe_v^*+\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\frac{\partial e_u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial e_u^*}{\partial x_k}\right)\Bigg]\Bigg\}dx\geqslant\theta(t),$$

где $|v|=(v_1^2+v_2^2+\ldots+v_p^2)^{1/2}$, A^{ik} — элементы матрицы обратной к матрице $A=(A_{ik})_{i,k=1}^{n}$, кроме того, функции $\dfrac{\partial B_i}{\partial x_l}$ $(l=1,2,\ldots,n)$ являются непрерывными в области D, то каждое регулярное решение $u(x,t)$ системы (1), *отличное от нуля в D, стремится к бесконечности при $t\to\infty$, т. е. $\lim\limits_{t\to\infty}|u(x,t)|=\infty$.*

Доказательство. Пусть $h_i=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{A_{ik}}{|u|}\cdot\dfrac{\partial|u|}{\partial x_k}$, с формулы Грина и предположения равенства нулю v на границе B следует, что

$$\int\limits_B \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(|v|^2 h_i)\,dx = 0, \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial x_i} = \frac{1}{|u|} \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ik}\frac{\partial |u|}{\partial x_k}\right) - \frac{1}{|u|^2} \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\frac{\partial |u|}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial |u|}{\partial x_k}. \tag{7}$$

Так как u является решением системы (1), тогда имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial x_i} = C\frac{1}{|u|}\cdot\frac{\partial |u|}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{1}{|u|}\cdot\frac{\partial |u|}{\partial x_i} - e_u F e_u^* + \tag{8}$$
$$+ \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\frac{\partial e_u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial e_u^*}{\partial x_k} - \frac{1}{|u|^2}\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\frac{\partial |u|}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial |u|}{\partial x_k}.$$

Из (6) и (8) имеем:

$$\int\limits_B \sum_{i,k=1}^{n} (|v|^2 h_i)\,dx = \int\limits_B |v|^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial x_i}\,dx + 2\int\limits_B |v| \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial |v|}{\partial x_i}\,dx = \tag{9}$$
$$= \int\limits_B |v|^2 \left(C\frac{1}{|u|}\cdot\frac{\partial |u|}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{1}{|u|}\cdot\frac{\partial |u|}{\partial x_i} - e_u F e_u^* + \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\frac{\partial e_u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial e_u^*}{\partial x_k} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{|u|^2}\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\frac{\partial |u|}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial |u|}{\partial x_k}\right) dx + 2\int\limits_B \frac{|v|}{|u|}\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\frac{\partial |v|}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial |v|}{\partial x_k}\,dx.$$

Так как v является решением системы (5), то из формулы Грина получим:

$$\int\limits_B \left[\sum_{i,k=1}^{n} (a_{ik} - A_{ik})\frac{\partial |v|}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial |v|}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} |v|\frac{\partial |v|}{\partial x_i}(B_i - b_i) + \right. \tag{10}$$
$$\left. + |v|^2\left(e_u F e_u^* - \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\frac{\partial e_u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial e_u^*}{\partial x_k} - e_v f e_v^* + \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial e_v}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial e_v^*}{\partial x_k}\right)\right] dx +$$
$$+ \int\limits_B \left[\sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\frac{\partial |v|}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial |v|}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{n} |v| B_i \frac{\partial |v|}{\partial x_i} - \right.$$
$$\left. - |v|^2\left(e_u F e_u^* - \sum_{i,k=1}^{n} A_{ik}\frac{\partial e_u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial e_u^*}{\partial x_k}\right)\right] dx = 0.$$

С (9) и (10) следует равенство:

$$\int_B C\frac{|v|^2}{|u|}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial t}dx=\int_B\Bigg[\sum_{i,k=1}^{n}(a_{ik}-A_{ik})\frac{\partial|v|}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial|v|}{\partial x_k}+ \tag{11}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}|v|\frac{\partial|v|}{\partial x_i}(B_i-b_i)+|v|^2\Bigg(e_uFe_u^*-\sum_{i,k=1}^{n}A_{ik}\frac{\partial e_u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial e_u^*}{\partial x_k}-e_vfe_v^*+$$

$$+\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\frac{\partial e_v}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial e_v^*}{\partial x_k}\Bigg)\Bigg]dx+\int_B\Bigg[|v|^2\sum_{i=1}^{n}B_i\frac{1}{|u|}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial x_i}+|v|^2e_uFe_u^*+$$

$$+\frac{|v|^2}{|u|^2}\sum_{i,k=1}^{n}A_{ik}\frac{\partial|u|}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial x_k}-|v|^2\sum_{i,k=1}^{n}A_{ik}\frac{\partial e_u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial e_u^*}{\partial x_k}-2\frac{|v|}{|u|}\sum_{i,k=1}^{n}A_{ik}\frac{\partial|u|}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial|v|}{\partial x_k}+$$

$$+\sum_{i,k=1}^{n}A_{ik}\frac{\partial|v|}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial|v|}{\partial x_k}-\sum_{i=1}^{n}B_i|v|\frac{\partial|v|}{\partial x_i}-|v|^2\Bigg(e_uFe_u^*-\sum_{i,k=1}^{n}A_{ik}\frac{\partial e_u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial e_u^*}{\partial x_k}\Bigg)\Bigg]dx=$$

$$=\int_B\Bigg[\sum_{i,k=1}^{n}(a_{ik}-A_{ik})\frac{\partial|u|}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{n}|v|\frac{\partial|v|}{\partial x_i}(B_i-b_i)+$$

$$+|v|^2\Bigg(e_uFe_u^*-\sum_{i,k=1}^{n}A_{ik}\frac{\partial e_u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial e_u^*}{\partial x_k}+e_vfe_v^*+\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\frac{\partial e_v}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial e_v^*}{\partial x_k}\Bigg)\Bigg]dx-$$

$$-\int_B\sum_{i=1}^{n}|v|B_i\left(\frac{\partial|v|}{\partial x_i}-\frac{|v|}{|u|}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial x_i}\right)dx+$$

$$+\int_B\sum_{i,k=1}^{n}A_{ik}\left(\frac{\partial|v|}{\partial x_i}-\frac{|v|}{|u|}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial|v|}{\partial x_k}-\frac{|v|}{|u|}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial x_k}\right)dx.$$

Из (11) следует неравенство:

$$\int_B C\frac{|v|^2}{|u|}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial t}dx\geqslant\int_B\Bigg\{\sum_{i,k=1}^{n}(a_{ik}-A_{ik})\frac{\partial|v|}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial|v|}{\partial x_k}-\frac{|v|^2}{4}\Bigg[2\sum_{i=1}^{n}\Bigg(\frac{\partial b_i}{\partial x_i}- \tag{12}$$

$$-\frac{\partial B}{\partial x_i}\Bigg)-\sum_{i,k=1}^{n}A^{ik}B_iB_k+4\Bigg(e_uFe_u^*-e_vfe_v^*+\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\frac{\partial e_u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial e_u^*}{\partial x_k}\Bigg)\Bigg]\Bigg\}dx+$$

$$+\int_B\sum_{i,k=1}^{n}A_{ik}\left(\frac{\partial|v|}{\partial x_i}-\frac{|v|}{|u|}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial x_i}-\frac{|v|}{2}\sum_{j=1}^{n}A^{ij}B_j\right)\Bigg(\frac{\partial|v|}{\partial x_k}-\frac{|v|}{|u|}\cdot\frac{\partial|u|}{\partial x_i}-$$

$$-\frac{|v|}{2}\sum_{j=1}^{n}A^{kj}B_j\Bigg)dx.$$

Пусть

$$z(t) = \int_B C|v|^2 \ln|u|\,dx.$$

Из предположений и неравенства (12) следует

$$z(T) - z(0) \geqslant \int_0^T \theta(t)\,dt.$$

Так как $T \to +\infty$, то $z(T) \to +\infty$, откуда имеем, что $|u| \to \infty$ при $t \to \infty$. Легко видеть, что частным случаем последнией теоремы является теорема доказанная в [5].

Цитированная литература

[1] M. Krzyżański, *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego*, Warszawa 1957.

[2] А. В. Бицадзе, *Об еллиптических системах дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка*, ДАН СССР 112 (1957), стр. 983.

[3] T. Styś, *Twierdzenie Hopfa dla pewnego eliptycznego układu równań liniowych drugiego rzędu*, Prace Mat. 8 (1964), стр. 143-146.

[4] L. Nirenberg, *A strong maximum principle for parabolic equations*, Comm. Pure Appl. Math. 6 (1953), стр. 167-177.

[5] A. Mcnabb, *Applied Mathematics Laboratory*, Department of Scientific and Industrial Research, Wellington, New Zealand, 1961.