ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE IX (1965)

M. KALECKI (Warszawa)

Twierdzenie o sumach typu $\sum \sigma\left(\frac{N}{r}\right)$ i jego zastosowanie

Poniżej udowodnimy twierdzenie o sumach $\sum\sigma(N/r_i)$, gdzie $\sigma(x)$ jest liczbą wyrazów zmierzającego do nieskończoności nie malejącego ciągu liczb dodatnich $s_j \leqslant x$, a r_i są to wyrazy innego takiego ciągu. Twierdzenie to pozwala na bardzo prosty i przejrzysty dowód znanego twierdzenia o ilości liczb $\leqslant N$ mających k czynników pierwszych.

LEMAT. *Niech s_j i r_i oznaczają zmierzające do nieskończoności niemalejące ciągi liczb dodatnich, a $\sigma(x)$ i $\varrho(x)$ ilości wyrazów tych ciągów, które nie przewyższają x. Zachodzi następująca zależność:*

$$\sum_{r_i \leqslant N} \sigma\left(\frac{N}{r_i}\right) = \sum_{r_i \leqslant N/A} \sigma\left(\frac{N}{r_i}\right) + \sum_{s_j \leqslant A} \varrho\left(\frac{N}{s_j}\right) - \sigma(A)\varrho\left(\frac{N}{A}\right),$$

gdzie A jest dowolną liczbą dodatnią.

Dowód. Suma $\sum\limits_{r_i \leqslant N} \sigma(N/r_i)$ jest ilością rozwiązań nierówności $r_i s_j \leqslant N$. W każdym takim rozwiązaniu mamy $r_i \leqslant N/A$ lub $s_j \leqslant A$. Ilość rozwiązań pierwszego typu jest równa $\sum\limits_{r_i \leqslant N/A} \sigma(N/r_i)$, ilość rozwiązań drugiego typu jest równa $\sum\limits_{s_j \leqslant A} \varrho(N/s_j)$, a ilość rozwiązań należących do obu typów daną jest iloczynem $\sigma(A)\varrho(N/A)$. Otrzymujemy zatem żądany wzór.

Udowodnimy następujące

TWIERDZENIE 1. *Niech $\sigma(N)$ i $\varrho(N)$ równają się asymptotycznie funkcjom $\sigma'(N)$ i $\varrho'(N)$ o następujących własnościach:*

$$(1) \qquad \sigma'(N) = \frac{N}{f(\log N)}, \qquad \varrho'(N) = \frac{N}{\varphi(\log N)}$$

przy czym f i φ są to funkcje o wzroście regularnym, tzn. niemalejące i dla każdego $0 < u \leqslant 1$ spełniające warunek

$$(2) \qquad \frac{f(ux)}{f(x)} \to u^g; \quad \frac{\varphi(ux)}{\varphi(x)} \to u^\gamma, \quad \text{gdy} \quad x \to \infty,$$

gdzie g i γ są to stałe parametry, $g \geqslant 0$, $\gamma \geqslant 0$.

Niech dalej $\sum_{r_i\leqslant N}\frac{1}{r_i}$ *i* $\sum_{s_j\leqslant N}\frac{1}{s_j}$ *równają się asymptotycznie funkcjom o wolnej zmienności:* $S(\log N)$ *i* $R(\log N)$, *zmierzającym do* ∞, *gdy* $N\to\infty$, *tzn. takim, że dla każdego* $0<u\leqslant 1$

$$\frac{S(ux)}{S(x)}\to 1 \quad i \quad \frac{R(ux)}{R(x)}\to 1, \quad gdy \quad x\to\infty. \tag{3}$$

Zachodzi wówczas zależność

$$\sum_{r_i\leqslant N}\sigma\left(\frac{N}{r_i}\right) = \big(\sigma'(N)R(\log N)+\varrho'(N)S(\log N)\big)\big(1+o(1)\big). \tag{4}$$

Dowód. W tezie lematu przyjmijmy $N/A=N^{\varepsilon}$ i $A=N^{1-\varepsilon}$, gdzie ε jest stałą, $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$.

Możemy wówczas napisać:

$$\sum_{r_i\leqslant N}\sigma\left(\frac{N}{r_i}\right) = \tag{5}$$

$$=\sum_{r_i\leqslant N^{\varepsilon}}\sigma\left(\frac{N}{r_i}\right)+\sum_{s_j\leqslant N^{\varepsilon}}\varrho\left(\frac{N}{s_i}\right)+\sum_{N^{\varepsilon}<s_j\leqslant N^{1-\varepsilon}}\varrho\left(\frac{N}{s_j}\right)-\sigma(N^{1-\varepsilon})\,\varrho(N^{\varepsilon}).$$

Z warunku (3) mamy

$$\sum_{s_j\leqslant N^{\varepsilon}}\frac{1}{s_j}=S(\varepsilon\log N)\big(1+o(1)\big)=S(\log N)\big(1+o(1)\big);$$

$$\sum_{N^{\varepsilon}<s_j<N^{1-\varepsilon}}\frac{1}{s_j}=\Big(S\big((1-\varepsilon)\log N\big)-S(\varepsilon\log N)\Big)\big(1+o(1)\big)=o\big(S(\log N)\big); \tag{6}$$

$$\sum_{r_i\leqslant N^{\varepsilon}}\frac{1}{r_i}=R(\varepsilon\log N)\big(1+o(1)\big)=R(\log N)\big(1+o(1)\big).$$

Rozpatrzmy po kolei cztery wyrazy prawej strony równania (5). Mamy

$$\sum_{r_i\leqslant N^{\varepsilon}}\sigma\left(\frac{N}{r_i}\right)=\sum_{r_i\leqslant N^{\varepsilon}}\frac{N}{r_i}\cdot\frac{1+o(1)}{f\left(\log\frac{N}{r_i}\right)}=\sum_{r_i\leqslant N^{\varepsilon}}\frac{N}{r_i}\cdot\frac{1+o(1)}{f\left(\left(1-\frac{\log r_i}{\log N}\right)\log N\right)}.$$

Ponieważ f, w myśl warunku (2), jest funkcją niemalejącą,

$$\frac{N\big(1+o(1)\big)}{f(\log N)}\sum_{r_i\leqslant N^{\varepsilon}}\frac{1}{r_i}\leqslant\sum_{r_i\leqslant N^{\varepsilon}}\sigma\left(\frac{N}{r_i}\right)\leqslant\frac{N\big(1+o(1)\big)}{f\left(\left(1-\frac{\log N^{\varepsilon}}{\log N}\right)\log N\right)}\sum_{r_i\leqslant N^{\varepsilon}}\frac{1}{r_i}.$$

Stąd, biorąc pod uwagę wzór (6), mamy

$$\frac{N\big(1+o(1)\big)R(\log N)\big(1+o(1)\big)}{f(\log N)} \leqslant \sum_{r_i\leqslant N^\varepsilon}\sigma\left(\frac{N}{r_i}\right) \leqslant \frac{N\big(1+o(1)\big)R(\log N)\big(1+o(1)\big)}{f\big((1-\varepsilon)\log N\big)}$$

i, w myśl warunku (2),

$$\frac{NR(\log N)\big(1+o(1)\big)}{f(\log N)} \leqslant \sum_{r_i\leqslant N^\varepsilon}\sigma\left(\frac{N}{r_i}\right) \leqslant \frac{NR(\log N)\big(1+o(1)\big)}{(1-\varepsilon)^g f(\log N)},$$

albo

$$\sum_{r_i\leqslant N^\varepsilon}\sigma\left(\frac{N}{r_i}\right) = \frac{\sigma'(N)R(\log N)\big(1+o(1)\big)}{(1-\alpha\varepsilon)^g}, \tag{7}$$

gdzie $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. Podobnie otrzymujemy

$$\sum_{s_j\leqslant N^\varepsilon}\varrho\left(\frac{N}{s_j}\right) = \frac{\varrho'(N)S(\log N)\big(1+o(1)\big)}{(1-\beta\varepsilon)^\gamma}, \tag{8}$$

gdzie $0\leqslant\beta\leqslant 1$. Dalej

$$\sum_{N^\varepsilon<s_j\leqslant N^{1-\varepsilon}}\varrho\left(\frac{N}{s_j}\right) = \sum_{N^\varepsilon<s_j\leqslant N^{1-\varepsilon}}\frac{N}{s_j}\cdot\frac{1+o(1)}{\varphi\left(\log\dfrac{N}{s_j}\right)} =$$

$$= \sum_{N^\varepsilon<s_j\leqslant N^{1-\varepsilon}}\frac{N\big(1+o(1)\big)}{\varphi\left(\left(1-\dfrac{\log s_j}{\log N}\right)\log N\right)}\cdot\frac{1}{s_j}$$

i, pamiętając, że φ jest funkcją niemalejącą, mamy:

$$\frac{N\big(1+o(1)\big)}{\varphi\big((1-\varepsilon)\log N\big)}\sum_{N^\varepsilon<s_j\leqslant N^{1-\varepsilon}}\frac{1}{s_j} \leqslant \sum_{N^\varepsilon<s_j\leqslant N^{1-\varepsilon}}\varrho\left(\frac{N}{s_j}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{N\big(1+o(1)\big)}{\varphi\Big(\big(1-(1-\varepsilon)\big)\log N\Big)}\sum_{N^\varepsilon<s_j\leqslant N^{1-\varepsilon}}\frac{1}{s_j}.$$

Biorąc pod uwagę wzór (6) oraz warunek (2) otrzymujemy

$$\sum_{N^\varepsilon<s_j\leqslant N^{1-\varepsilon}}\varrho\left(\frac{N}{s_j}\right) = \varrho'(N)o\big(\varrho(\log N)\big). \tag{9}$$

Wreszcie

$$\sigma(N^{1-\varepsilon})\varrho(N^\varepsilon) = \frac{N\big(1+o(1)\big)}{f\big((1-\varepsilon)\log N\big)\varphi(\varepsilon\log N)}$$

i, w myśl warunku (2),

$$(10) \quad \sigma(N^{1-\varepsilon})\varrho(N^{\varepsilon}) = \frac{N\big(1+o(1)\big)}{(1-\varepsilon)^{g}\varepsilon^{\gamma}f(\log N)\varphi(\log N)} = \frac{\varrho'(N)\big(1+o(1)\big)}{(1-\varepsilon)^{g}\varepsilon^{\gamma}f(\log N)}.$$

Ze wzorów (5), (7), (8), (9) wynika

$$\sum_{r_i\leqslant N}\sigma\left(\frac{N}{r_i}\right) = \left(\frac{\sigma'(N)R(\log N)}{(1-\alpha\varepsilon)^{g}} + \frac{\varrho'(N)S(\log N)}{(1-\beta\varepsilon)^{\gamma}}\right)\big(1+o(1)\big)+$$
$$+\varrho'(N)\left(o\big(S(\log N)\big)-\frac{1}{(1-\varepsilon)^{g}\varepsilon^{\gamma}f(\log N)}\right)\big(1+o(1)\big).$$

Ale $\dfrac{1}{(1-\varepsilon)^{g}\varepsilon^{\gamma}f(\log N)} = o\big(S(\log N)\big)$, ponieważ $S(\log N)\to\infty$, gdy $N\to\infty$; mamy zatem ostatecznie

$$\sum_{r_i\leqslant N}\sigma\left(\frac{N}{r_i}\right) = \left(\frac{\sigma'(N)R(\log N)}{(1-\alpha\varepsilon)^{g}} + \frac{\varrho'(N)S(\log N)}{(1-\beta\varepsilon)^{\gamma}}\right)\big(1+o(1)\big),$$

co, wobec $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ i $0\leqslant\beta\leqslant 1$ oraz możliwości przyjęcia dla ε dowolnie małej wartości, dowodzi twierdzenia.

Wniosek. *W przypadku $r_j = s_j$, $\sigma(x) = \varrho(x)$, mamy*

$$\sum_{s_j\leqslant N}\sigma\left(\frac{N}{s_j}\right) = 2\sigma'(N)S(\log N)\big(1+o(1)\big).$$

W szczególności, oznaczając przez p liczby pierwsze a przez $\pi(x)$ ilość tych liczb $\leqslant x$, otrzymujemy:

$$\sum_{p\leqslant N}\pi\left(\frac{N}{p}\right) = 2\frac{N}{\log N}\left(\sum_{p\leqslant N}\frac{1}{p}\right)\big(1+o(1)\big) = \frac{2N\log\log N}{\log N}\big(1+o(1)\big).$$

Dowiedziemy teraz znanego twierdzenia o ilości liczb $\leqslant N$ mających k czynników pierwszych. Część wstępna dowodu wzorowana jest na dowodzie Hardy'ego i Wrighta ([1], str. 369, 370), trzon zaś jego wynika niemal bezpośrednio z twierdzenia 1.

Twierdzenie 2. *Niech $\tau_k(N)$ oznacza ilość liczb $\leqslant N$ mających k czynników pierwszych, a $\pi_k(N)$ ilość liczb $\leqslant N$ mających k różnych czynników pierwszych. Udowodnimy, że $\tau_k(N)$ i $\pi_k(N)$ są asymptotycznie równe* $\dfrac{N(\log\log N)^{k-1}}{(k-1)!\,\log N}$.

Dowód. Oznaczmy przez $\Pi_k(N)$ ilość zespołów k czynników pierwszych, których iloczyny są $\leqslant N$, uważając za różne zespoły również i takie, które różnią się tylko porządkiem czynników. Zachodzą nierówności

$$(11) \qquad k!\,\pi_k(N)\leqslant \Pi_k(N)\leqslant k!\,\tau_k(N),$$

gdyż liczba permutacji w zespołach złożonych z k różnych czynników pierwszych jest mniejsza (dla $k \geqslant 2$) od liczby wszystkich permutacji, a tych z kolei jest mniej od liczby permutacji, w przypadku, gdyby wszystkie powtarzające się czynniki traktować jako różne. $\tau_k(N)-\pi_k(N)$ jest liczbą iloczynów $\leqslant N$ zawierających co najmniej dwa jednakowe czynniki pierwsze. Przedstawiając te iloczyny w postaci kanonicznej i odejmując po jednym z powtarzających się w danym iloczynie czynników pierwszych otrzymujemy zespoły o $k-1$ czynnikach pierwszych, różniące się co najmniej porządkiem. Mamy więc

$$\tau_k(N)-\pi_k(N) \leqslant \Pi_{k-1}(N). \tag{12}$$

Ustawmy teraz iloczyny objęte liczbą $\Pi_k(N)$ według wielkości i oznaczmy je przez $r_{k,i}$ (oczywiście w tym niemalejącym ciągu ta sama wartość będzie się powtarzała kilka razy). Łatwo wykazać, że

$$\sum_{r_{k,i}\leqslant N} r_{k,i} = (\log\log N)^k\big(1+o(1)\big). \tag{13}$$

Istotnie, mamy

$$\Big(\sum_{p\leqslant\sqrt[k]{N}} \frac{1}{p}\Big)^k \leqslant \sum_{r_{k,i}\leqslant N} \frac{1}{r_{k,i}} \leqslant \Big(\sum_{p\leqslant N} \frac{1}{p}\Big)^k,$$

gdyż przy $p\leqslant\sqrt[k]{N}$ każde $r_{k,i}\leqslant N$, a przy $p\leqslant N$ obok wszystkich $r_{k,i} \leqslant N$ istnieją $r_{k,i}>N$. Zważywszy, że

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p} = (\log\log x)\big(1+o(1)\big)$$

otrzymujemy

$$(\log\log N-\log k)^k\big(1+o(1)\big) \leqslant \sum_{r_{k,i}} \frac{1}{r_{k,i}} \leqslant (\log\log N)^k\big(1+o(1)\big),$$

co dowodzi wzoru (13).

Dowiedziemy teraz, że jeżeli

$$\Pi_k(N) = \frac{Nk}{\log N}(\log\log N)^{k-1}\big(1+o(1)\big),$$

to taka sama zależność zachodzi dla $k+1$. Stąd wyniknie już łatwo dowód twierdzenia.

Zachodzi przede wszystkim zależność

$$\Pi_{k+1}(N) = \sum_{r_{k,i}\leqslant N} \pi\Big(\frac{N}{r_{k,i}}\Big),$$

gdyż liczby $r_{k+1,i}$ możemy tworzyć w ten sposób, że w każdym zespole $r_{k,i}$ dodajemy kolejno po czynniku pierwszym $\leqslant N/r_{k,i}$. Do rozwinięcia

$\sum\limits_{r_{k,i}\leqslant N}\pi(N/r_{k,i})$ możemy zastosować twierdzenie 1. Przyjmujemy

$$r_i = r_{k,i}, \qquad s_j = p_j, \qquad \sigma(N) = \pi(N), \qquad \varrho(N) = \Pi_k(N).$$

Mamy dalej

$$\pi(N) = \frac{N}{\log N}\big(1+o(1)\big); \qquad \Pi_k(N) = \frac{N}{\log N}k(\log\log N)^{k-1}\big(1+o(1)\big)$$

oraz

$$\sum_{p\leqslant N}\frac{1}{p} = \log\log N\big(1+o(1)\big); \qquad \sum_{r_{k,i}\leqslant N}\frac{1}{r_{k,i}} = (\log\log N)^k\big(1+o(1)\big);$$

$$S(\log N) = \log\log N; \qquad R(\log N) = (\log\log N)^k.$$

Otóż funkcje

$$\frac{N}{\log N} \quad \text{i} \quad \frac{N}{\log N}k(\log\log N)^{k-1} \qquad \text{oraz} \qquad \log\log N \quad \text{i} \quad (\log\log N)^k$$

spełniają warunki postawione w twierdzeniu 1. Wobec tego możemy zastosować wzór (4):

$$\sum_{r_{k,i}\leqslant N}\pi\left(\frac{N}{r_{k,i}}\right) =$$

$$= \left(\frac{N}{\log N}(\log\log N)^k + \frac{N}{\log N}k(\log\log N)^{k-1}\log\log N\right)\big(1+o(1)\big) =$$

$$= \frac{N}{\log N}(k+1)(\log\log N)^k\big(1+o(1)\big);$$

c. b. d. o.

Ponieważ wzór

$$\Pi_k(N) = \frac{N}{\log N}k(\log\log N)^{k-1}\big(1+o(1)\big) \tag{14}$$

jest słuszny dla $k=1$, gdyż

$$\Pi_1(N) = \pi(N) = \frac{N}{\log N}\big(1+o(1)\big),$$

a gdy jest słuszny dla k, jest również słuszny dla $k+1$, możemy uważać wzór (14) za udowodniony. Wynika z niego, że

$$\Pi_{k-1}(N) = o\big(\Pi_k(N)\big)$$

i następnie na podstawie tego wzoru oraz wzorów (11) i (12)

$$\tau_k(N) \sim \pi_k(N) \sim \frac{N}{\log N}\cdot\frac{(\log\log N)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Praca cytowana

[1] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford 1960.

M. Kalecki (Warszawa)

A THEOREM ON SUMS OF THE TYPE $\sum \sigma\left(\frac{N}{r}\right)$ AND ITS APPLICATION

SUMMARY

Let $s_j > 0$, $r_i > 0$, $s_j \to \infty$, $r_i \to \infty$; let $\sigma(x)$ and $\varrho(x)$ be the numbers of j's and such that $s_j \leqslant x$ and $r_i \leqslant x$, respectively. The following theorem is proved.

Let $\sigma(N)$ and $\varrho(N)$ be asymptotically equal to non-decreasing functions

$$\sigma'(N) = \frac{N}{f(\log N)}; \quad \varrho'(N) = \frac{N}{\varphi(\log N)}$$

such that

$$\frac{f(ux)}{f(x)} \to u^g; \quad \frac{\varphi(ux)}{f(x)} \to u^\gamma \quad \textit{when } N \to \infty \textit{ for each } 0 < u \leqslant 1,$$

where g and γ are non-negative constants. Moreover, let $\sum\limits_{s_j \leqslant N} 1/s_j$ and $\sum\limits_{r_i \leqslant N} 1/r_i$ be asymptotically equal to functions $S(\log N)$ and $R(\log N)$ such that

$$S(x) \to \infty, \quad R(x) \to \infty, \quad \frac{S(ux)}{S(x)} \to 1, \quad \frac{R(ux)}{R(x)} \to 1$$

as $x \to \infty$, for each $0 < u \leqslant 1$. Then

$$\sum_{r_i \leqslant N} \sigma\left(\frac{N}{r_i}\right) = \big(\sigma'(N)R(\log N) + \varrho'(N)S(\log N)\big)\big(1 + o(1)\big).$$

From this equation a very simple and lucid demonstration is derived of the well-known theorem on the quantity of numbers $\leqslant N$ having k prime factors.
