ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE IX (1965)

W. Leksiński (Warszawa)

Uogólnione, ciągłe zagadnienie brzegowe Riemanna dla układu n funkcji

Wstęp. Niech S^+ będzie ograniczonym obszarem na płaszczyźnie zespolonej, którego brzegiem jest gładka krzywa Jordana L. Styczna do krzywej L tworzy ze stałym kierunkiem kąt spełniający warunek Höldera. Dopełnienie zbioru $S^+ + L$ do całej płaszczyzny otwartej oznaczamy przez S^-.

Niech

$$(1)\qquad a(t) = [a_{\alpha\beta}(t)] = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

$$(2)\qquad b(t) = [b_{\alpha\beta}(t)] = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \dots & b_{1n}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \dots & b_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \dots & b_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

oraz

$$(3)\qquad c(t) = [c_\alpha(t)] = \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{bmatrix},$$

gdzie $a_{\alpha\beta}(t)$, $b_{\alpha\beta}(t)$ oraz $c_\alpha(t)$ są to funkcje rzeczywiste zmiennej zespolonej t, będą macierzami określonymi w każdym punkcie $t \in L$, spełniającymi warunek Höldera (tzn. elementy tych macierzy spełniają warunek Höldera), przy czym macierze $A = a(t)+ib(t)$ oraz $B = a(t)-ib(t)$ są nieosobliwe, tzn. $\det A \neq 0$ i $\det B \neq 0$ dla $t \in L$. Obszar S^+ można odwzorować konforemnie na wnętrze koła. Niech w dalszym ciągu S^+ i L oznaczają odpowiednio wnętrze i brzeg koła jednostkowego ze środkiem w początku układu.

Liniowe, niejednorodne zagadnienie Riemanna dla układu n funkcji, rozwiązane przez N. P. Wekuę ([1]), polega na wyznaczeniu układu n funkcji $\Phi_k(z) = u_k + iv_k$, $k = 1, 2, \dots, n$ (który będziemy dalej traktować jako macierz jednokolumnową i nazywać krótko kolumną), holomorficznych w obszarze S^+, których wartości brzegowe $\Phi_k^+(t) = u_k(t)+iv_k(t)$, spełniają w każdym punkcie $t\in L$ układ warunków brzegowych:

$$\sum_{k=1}^{n}[a_{\alpha k}(t)u_k(t)-b_{\alpha k}(t)v_k(t)] = c_\alpha(t) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Układ (4) można zapisać jednym warunkiem macierzowym:

$$a(t)u(t)-b(t)v(t) = c(t), \tag{5}$$

gdzie $u(t)$ i $v(t)$ są to następujące kolumny

$$u(t) = [u_\alpha(t)] = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}, \qquad v(t) = [v_\alpha(t)] = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Należy zaznaczyć, że N. P. Wekua stosował metodę, za pomocą której N. I. Muscheliszwili rozwiązał zagadnienie (5) w przypadku $n = 1$ ([2]). Metoda ta polega na przedłużeniu holomorficznej w kole S^+ kolumny $\Phi(z)$ na jego zewnętrze, tj. obszar S^-, według wzoru

$$\Phi_*(z) = \overline{\Phi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} \quad \text{dla} \quad z\in S^-, \tag{7}$$

gdzie kreska nad kolumną oznacza przejście do jej wartości sprzężonej, przy czym przez wartość sprzężoną kolumny $\Phi(z) = [\Phi_k(z)]$ rozumiemy kolumnę $\overline{\Phi(z)} = [\overline{\Phi_k(z)}]$. Jeżeli tak otrzymaną częściami holomorficzną kolumnę

$$w(z) = \begin{cases} \Phi(z) & \text{dla} \quad z\in S^+, \\ \Phi_*(z) & \text{dla} \quad z\in S^- \end{cases} \tag{8}$$

oznaczymy znów przez $\Phi(z)$, to na mocy (7), w każdym punkcie $t\in L$ zachodzi równość

$$\overline{\Phi^+(t)} = \Phi^-(t) \tag{9}$$

i warunek (5) możemy zapisać w postaci

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t)+g(t), \tag{10}$$

gdzie

$$G(t) = -A^{-1}(t)B(t), \qquad g(t) = 2A^{-1}(t)c(t).$$

Tak więc stosowana przez Muscheliszwiliego, a następnie przez Wekuę metoda, polega na sprowadzeniu zagadnienia Riemanna do zagadnienia Hilberta.

W monografii [1] podano warunek konieczny i wystarczający rozwiązalności zagadnienia (5), wyrażający się w zapisie macierzowym następująco

$$\int_L q(\tau)h(\tau)d\tau = 0, \tag{11}$$

gdzie

$$q(t) = \begin{bmatrix} q_{-\varkappa_1-2}(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_{-\varkappa_2-2}(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & q_{-\varkappa_n-2}(t) \end{bmatrix}, \tag{12}$$

przy czym $q_\alpha(t)$ są dowolnymi wielomianami stopnia α ($q_\alpha \equiv 0$ gdy $\alpha < 0$), liczby całkowite $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_n$ są indeksami cząstkowymi zagadnienia (10) (por. [1], str. 30), zaś $h(t)$ jest kolumną $\big(X^+(t)\big)^{-1}\big(a(t)+ib(t)\big)^{-1}c(t)$; $X(z)$ jest macierzą kanoniczną odpowiadającą zagadnieniu jednorodnemu

$$X(z) = [{}^\beta X_\alpha(z)] = \begin{bmatrix} {}^1X_1(z) & {}^2X_1(z) & \dots & {}^nX_1(z) \\ {}^1X_2(z) & {}^2X_2(z) & \dots & {}^nX_2(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ {}^1X_n(z) & {}^2X_n(z) & \dots & {}^nX_n(z) \end{bmatrix} \tag{13}$$

spełniającą warunek

$$X^+(t) = G(t)X^-(t) \quad \text{dla} \quad t \in L \tag{14}$$

oraz związek

$$X_*(z) = X(z)z^\varkappa, \tag{15}$$

w którym $X_*(z) = \overline{X(1/\bar{z})}$ dla $z \in S^+ + S^-$, zaś $z^\varkappa$ oznacza następującą macierz przekątniową

$$z^\varkappa = \begin{bmatrix} z^{\varkappa_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z^{\varkappa_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & z^{\varkappa_n} \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Dowodzi się, że $\det[{}^\beta X_\alpha(z)] \neq 0$ na płaszczyźnie otwartej, oraz że macierze $X^+(t)$ i $X^-(t)$ spełniają warunek Höldera; wynika stąd, że i macierz $\big(X^+(t)\big)^{-1}$, odwrotna względem $X^+(t)$, spełnia warunek Höldera. Dowodzi się następnie, że jeśli spełniony jest warunek (11), to ogólne rozwiązanie zagadnienia (5) wyraża się w zapisie macierzowym następującym wzorem:

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{\eta(z,\tau)\big(X^+(\tau)\big)^{-1}\big(a(\tau)+ib(\tau)\big)^{-1}c(\tau)}{\tau - z}d\tau + X(z)P(z), \tag{17}$$

w którym $\eta(z, \tau)$ jest macierzą przekątniową

$$(18)\qquad \eta(z,\tau) = \begin{bmatrix} 1+z^{\varkappa_1+1}\tau^{-\varkappa_1-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1+z^{\varkappa_2+1}\tau^{-\varkappa_2-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1+z^{\varkappa_n+1}\tau^{-\varkappa_n-1} \end{bmatrix},$$

a $P(z)$ kolumną

$$(19)\qquad P(z) = \begin{bmatrix} P_{\varkappa_1}(z) \\ P_{\varkappa_2}(z) \\ \vdots \\ P_{\varkappa_n}(z) \end{bmatrix},$$

przy czym P_a oznacza wielomian stopnia a ($P_a = 0$, gdy $a < 0$) o dowolnych współczynnikach c_k^a spełniających warunki

$$(20)\qquad \overline{c^a_{\varkappa_a-k}} = c^a_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, \varkappa_a;\ a = 1, 2, \dots, n).$$

W. Żakowski zaproponował autorowi rozwiązanie następującego zagadnienia:

Zagadnienie nieliniowe. *Wyznaczyć kolumnę n funkcji $\Phi_k(z) = u_k + iv_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, holomorficznych w obszarze S^+, których wartości brzegowe $\Phi_k^+(t) = u_k(t) + iv_k(t)$ spełniają w każdym punkcie $t \in L$ układ warunków brzegowych:*

$$(21)\qquad \sum_{k=1}^{n} \big(a_{ak}(t)u_k(t) - b_{ak}(t)v_k(t)\big) = \\ = c_a(t) + F_a\big(t, u_1(t), \dots, u_n(t), v_1(t), \dots, v_n(t)\big) \qquad (a = 1, 2, \dots, n)$$

lub krótko, używając zapisu macierzowego:

$$(22)\qquad a(t)u(t) - b(t)v(t) = c(t) + F\big(t, u(t), v(t)\big),$$

gdzie $F = [F_a]$ jest kolumną.

Przyjmujemy następujące założenia:

1° Funkcje rzeczywiste $a_{\alpha\beta}(t)$, $b_{\alpha\beta}(t)$ i $c_a(t)$, zmiennej zespolonej t, określone na okręgu L, spełniają warunek Höldera

$$(23)\qquad \begin{aligned} |a_{\alpha\beta}(t) - a_{\alpha\beta}(t_1)| &\leqslant k_{ab}|t-t_1|^{h_{ab}}, \\ |b_{\alpha\beta}(t) - b_{\alpha\beta}(t_1)| &\leqslant k_{ab}|t-t_1|^{h_{ab}}, \qquad 0 < h_{ab} < 1, \end{aligned}$$

$$(24)\qquad |c_a(t) - c_a(t_1)| \leqslant k_c|t-t_1|^{h_c}, \qquad 0 < h_c \leqslant 1,$$

gdzie $t, t_1 \in L$; $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$; k_{ab}, k_c są to pewne stałe dodatnie. Ponadto $\det A = \det[a_{\alpha\beta}(t) + ib_{\alpha\beta}(t)] \neq 0$ i $\det B = \det[a_{\alpha\beta}(t) - ib_{\alpha\beta}(t)] \neq 0$ dla $t \in L$.

2° Funkcje rzeczywiste $F_a(t, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)$, $a = 1, 2, \ldots, n$, zmiennej zespolonej t i zmiennych rzeczywistych $u_1, \ldots, u_n$, $v_1, \ldots, v_n$, są określone w dziedzinie

$$(25)\qquad t \in L, \quad |u_\nu| \leqslant R, \quad |v_\nu| \leqslant R \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

spełniają warunek Höldera-Lipschitza

$$(26)\qquad |F_a(t, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n) - F_a(t_1, u_1', \ldots, u_n', v_1', \ldots, v_n')| \leqslant$$
$$\leqslant k_F\Big\{|t-t_1|^{h_F} + \sum_{\nu=1}^{h}(|u_\nu - u_\nu'| + |v_\nu - v_\nu'|)\Big\}$$

oraz ocenę

$$(27)\qquad |F_a(t, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n)| \leqslant M_F\Big\{1 + \sum_{\nu=1}^{n}(|u_\nu| + |v_\nu|)\Big\},$$

gdzie k_F i M_F są to pewne stałe dodatnie, $0 < h_F \leqslant 1$.

Zaznaczymy, że w przypadku szczególnym macierzy przekątniowych $a(t)$ i $b(t)$ powyższe zagadnienie nieliniowe było badane przez W. Pogorzelskiego ([3], str. 128-135).

R o z w i ą z a n i e. Zgodnie z teorią liniowego zagadnienia Riemanna dla układu n funkcji, możemy twierdzić, że jeśli zagadnienie ma rozwiązanie $\Phi(z) = [\Phi_a(z)]$ (którego wartości brzegowe spełniają warunek Höldera), to według (17) ma ono postać

$$(28)\qquad \Phi(z) = X(z)P(z) + \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{\eta(z,\tau)\big(X^+(\tau)\big)^{-1}\big(a(\tau)+ib(\tau)\big)^{-1}c(\tau)}{\tau - z}d\tau +$$
$$+ \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{\eta(z,\tau)\big(X^+(\tau)\big)^{-1}\big(a(\tau)+ib(\tau)\big)^{-1}}{\tau - z} \times$$
$$\times F\left\{\tau, \frac{\varphi_1(\tau)+\overline{\varphi_1(\tau)}}{2}, \ldots, \frac{\varphi_n(\tau)+\overline{\varphi_n(\tau)}}{2}, \frac{\varphi_1(\tau)-\overline{\varphi_1(\tau)}}{2i}, \ldots, \frac{\varphi_n(\tau)-\overline{\varphi_n(\tau)}}{2i}\right\} d\tau$$

dla $z \in S^+ + S^-$, przy czym macierze $X(z)$ i $\eta(z, \tau)$ oraz kolumna $\Phi(z)$ określone są odpowiednio wzorami (13), (18), (7) i (8), $P(z)$ jest kolumną pewnych wielomianów postaci (19), a $\varphi_a(z)$ są to wartości brzegowe rozwiązania:

$$(29)\qquad \varphi_a(t) = \Phi_a^+(t) \quad (a = 1, 2, \ldots, n).$$

Stosując wzory Plemelja do całek typu Cauchy'ego występujących we wzorze (28), wnioskujemy, że funkcje (29) spełniają na okręgu L następujący układ równań całkowych mocno-osobliwych:

$$(30)\qquad \varphi_a(t) = f_a(t) + \int_L \frac{c_a^*(t,\tau)}{\tau - t}\,d\tau + F_a^*\big(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\big) + \\ + \int_L \frac{F_a^{**}\big(t, \tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_n(\tau)\big)}{\tau - t}\,d\tau \qquad (a = 1, 2, \ldots, n),$$

gdzie funkcje $f_a(t)$, $c_a^*(t,\tau)$, $F_a^*\big(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\big)$ i $F_a^{**}\big(t, \tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \ldots, \varphi_n(\tau)\big)$ są określone wzorami:

$$(31)\qquad f_a(t) = \sum_{\beta=1}^{n} \big(\xi_{a\beta}(t) c_\beta(t) + {}^{\beta}X_a^{+}(t) P_\beta(t)\big),$$

przy czym $\xi_{a\beta}(t)$ oznacza iloraz dopełnienia algebraicznego elementu $A_{\beta a}(t)$ przez $\det[A_{a\beta}(t)]$,

$$(32)\qquad c_a^*(t,\tau) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{1 \leqslant j,r,s,\beta \leqslant n} {}^{\beta}X_a^{+}(t)\,\eta_{\beta r}(t,\tau)\,{}^{s}x_r^{+}(\tau)\,\xi_{sj}(\tau) c_j(\tau),$$

gdzie ${}^{s}x_r^{+}(t)$ oznacza iloraz dopełnienia algebraicznego elementu ${}^{s}X_r^{+}(t)$ przez $\det[{}^{s}X_r^{+}(t)]$,

$$(33)\qquad F_a^*\big(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\big) = \sum_{\beta=1}^{n} \xi_{a\beta}(t) \times \\ \times F_\beta\left(t, \frac{\varphi_1(t) + \overline{\varphi_1(t)}}{2}, \ldots, \frac{\varphi_n(t) + \overline{\varphi_n(t)}}{2}, \frac{\varphi_1(t) - \overline{\varphi_1(t)}}{2i}, \ldots, \frac{\varphi_n(t) - \overline{\varphi_n(t)}}{2i}\right),$$

wreszcie

$$(34)\qquad F_a^{**}\big(t, \tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_n(\tau)\big) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \sum_{1 \leqslant j,r,s,\beta \leqslant n} {}^{\beta}X_a^{+}(t)\,\eta_{\beta r}(t,\tau)\,{}^{s}x_r^{+}(\tau)\,\xi_{sj}(\tau) \times \\ \times F_j\left(\tau, \frac{\varphi_1(\tau) + \overline{\varphi_1(\tau)}}{2}, \ldots, \frac{\varphi_n(\tau) + \overline{\varphi_n(\tau)}}{2}, \frac{\varphi_1(\tau) - \overline{\varphi_1(\tau)}}{2i}, \ldots, \frac{\varphi_n(\tau) - \overline{\varphi_n(\tau)}}{2i}\right).$$

Zbadamy teraz istnienie rozwiązań układu równań całkowych (30) o niewiadomych funkcjach $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ w dziedzinie $t \in L$.

Rozważmy przestrzeń funkcyjną Λ, której punktami są wszystkie układy n funkcji zespolonych ciągłych $U = \big(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\big)$ określonych dla $t \in L$.

Określamy: normę $\|U\|$ punktu U:

(35) $$\|U\| = \sum_{a=1}^{n} \sup_{t \in L} |\varphi_a(t)|,$$

sumę dwóch punktów $U = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ i $V = (\Phi_1(t), \ldots, \Phi_n(t))$:

(36) $$U+V = (\varphi_1(t)+\Phi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)+\Phi_n(t)),$$

iloczyn punktu U przez liczbę λ:

(37) $$\lambda U = (\lambda\varphi_1(t), \ldots, \lambda\varphi_n(t)),$$

oraz odległość $\delta(U, V)$ punktów U i V:

(38) $$\delta(U, V) = \|U-V\|.$$

Tak określona przestrzeń Λ jest przestrzenią Banacha.

W przestrzeni Λ rozważmy zbiór E złożony ze wszystkich tych punktów $U = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$, dla których funkcje $\varphi_a(t)$, $a = 1, 2, \ldots, n$, spełniają następujące nierówności

(39) $$|\varphi_a(t)| \leqslant R, \qquad |\varphi_a(t)-\varphi_a(t_1)| \leqslant \varkappa |t-t_1|^h, .$$

gdzie h jest liczbą ustaloną, spełniającą warunek:

(40) $$0 < h < h_0 = \min(h_{ab}/2, h_c, h_F),$$

przy czym R, h_{ab}, h_c i h_F są to stałe występujące w założeniach 1° i 2°, a współczynnik $\varkappa$ jest dowolną stałą dodatnią.

Zbiór E jest oczywiście zamknięty i wypukły.

Przekształcimy teraz zbiór E za pomocą następujących związków:

(41) $$\psi_a(t) = f_a(t) + \int_L \frac{c_a^*(t, \tau)}{\tau - t}\, d\tau + F_a^*(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) + \\ + \int_L \frac{F_a^{**}(t, \tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_n(\tau))}{\tau - t}\, d\tau \qquad (a = 1, 2, \ldots, n),$$

których postać wynika z postaci układu równań (30).

Znajdziemy warunki wystarczające na to, aby przekształcenie (41) przyporządkowywało każdemu punktowi $(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$ zbioru E, punkt $(\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t))$ tegoż zbioru.

Na podstawie lematu udowodnionego w pracy [4] wnioskujemy, że wartości brzegowe ${}^{\beta}X_a^+(t)$ elementów macierzy kanonicznej (13) spełniają warunek Höldera z wykładnikiem

(42) $$h_x = \tfrac{1}{2} h_{ab}.$$

Podamy teraz pewne oszacowania funkcji (31), (32), (33) i (34). Korzystając z (23), (24), (40) i (42) otrzymujemy:

$$|f_a(t)| \leqslant A_1 + A_2 M_p, \tag{43}$$

$$|f_a(t) - f_a(t_1)| \leqslant (B_1 + B_2 M_p + B_3 k_p)|t - t_1|^h, \tag{44}$$

$$|c_a^*(t, \tau)| \leqslant A_3, \tag{45}$$

$$|c_a^*(t, \tau) - c_a^*(t_1, \tau_1)| \leqslant B_4(|t - t_1|^{h_0} + |\tau - \tau_1|^h), \tag{46}$$

gdzie

$$M_p = \max_{1 \leqslant a \leqslant n} \sup_{t \in L} |P_a(t)|, \quad k_p = \max_{1 \leqslant a \leqslant n} \sup_{t, t_1 \in L} \frac{|P_a(t) - P_a(t_1)|}{|t - t_1|^h}. \tag{47}$$

Ponadto, na mocy (26), (27), (39), (42) i (47), mamy:

$$\left|F_a^*\big(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\big)\right| \leqslant A_4 M_F (1 + 2nR), \tag{48}$$

$$\begin{aligned}\left|F_a^*\big(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\big) - F_a^*\big(t_1, \varphi_1(t_1), \ldots, \varphi_n(t_1)\big)\right| &\leqslant \\ \leqslant (B_5 k_F + B_6 k_F \varkappa + B_7 M_F + B_8 M_F R)|t - t_1|^h&,\end{aligned} \tag{49}$$

$$\left|F_a^{**}\big(t, \tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_n(\tau)\big)\right| \leqslant A_5 M_F + A_6 M_F R, \tag{50}$$

$$\begin{aligned}\left|F_a^{**}\big(t, \tau, \varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_n(\tau)\big) - F_a^{**}\big(t_1, \tau_1, \varphi_1(\tau_1), \ldots, \varphi_n(\tau_1)\big)\right| &\leqslant \\ \leqslant (B_9 k_F + B_{10} k_F \varkappa + B_{11} M_F + B_{12} M_F R)(|t - t_1|^{h_0} + |\tau - \tau_1|^h)&,\end{aligned} \tag{51}$$

przy czym stałe dodatnie A_i, $1 \leqslant i \leqslant 6$ oraz B_i, $1 \leqslant i \leqslant 12$, występujące w nierównościach (43)-(46) i (48)-(51) są niezależne od punktu $\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)\big)$ zbioru E oraz od funkcji F_a i P_a, $a = 1, 2, \ldots, n$.

Korzystając z oszacowań (43)-(46) i (48)-(51) oraz opierając się na uogólnionym twierdzeniu Priwałowa ([3], str. 14), wnioskujemy, że składowe (41) punktu przekształconego spełniają następujące nierówności:

$$|\psi_a(t)| \leqslant D_1 + A_2 M_p + D_2 M_F + D_3 M_F R + D_4 k_F + D_5 k_F \varkappa, \tag{52}$$

$$\begin{aligned}|\psi_a(t) - \psi_a(t_1)| &\leqslant \\ \leqslant (D_6 + B_2 M_p + B_3 k_p + D_7 k_F + D_8 k_F \varkappa + D_9 M_F + D_{10} M_F R)|t - t_1|^h&,\end{aligned} \tag{53}$$

przy czym stałe dodatnie D_i, $1 \leqslant i \leqslant 10$, występujące w nierównościach (52) i (53) nie zależą od punktu $\big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)\big)$ zbioru E oraz od funkcji F_a i P_a, $a = 1, 2, \ldots, n$.

Tak więc, związki (41) będą przekształcały zbiór E w siebie, jeśli spełnione będą następujące nierówności:

$$\begin{gathered} D_1 + A_2 M_p + D_2 M_F + D_3 M_F R + D_4 k_F + D_5 k_F \varkappa \leqslant R, \\ D_6 + B_2 M_p + B_3 k_p + D_7 k_F + D_8 k_F \varkappa + D_9 M_F + D_{10} M_F R \leqslant \varkappa. \end{gathered} \tag{54}$$

Elementarne obliczenia prowadzą do wniosku, że jeśli tylko stałe k_F i M_F są dostatecznie małe, a mianowicie

$$k_F < \frac{1}{D_5 + D_8} \quad \text{oraz} \quad M_F < \frac{1}{D_3 + D_{10}}, \tag{55}$$

to można tak dobrać stałe $R = R_0$, $\varkappa = \varkappa_0$ aby układ (54) był spełniony, np.:

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{(D_1 + A_2 M_p + D_2 M_F + D_4 k_F)(1 - D_8 k_F)}{(1 - D_3 M_F)(1 - D_8 k_F) - D_5 D_{10} k_F M_F} + \\ &\quad + \frac{D_5 k_F (D_6 + B_2 M_p + B_3 k_p + D_7 k_F + D_9 M_F)}{(1 - D_3 M_F)(1 - D_8 k_F) - D_5 D_{10} k_F M_F}, \\ \varkappa_0 &= \frac{(D_6 + B_2 M_p + B_3 k_p + D_7 k_F + D_9 M_F)(1 - D_3 M_F)}{(1 - D_3 M_F)(1 - D_8 k_F) - D_5 D_{10} k_F M_F} + \\ &\quad + \frac{D_{10} M_F (D_1 + A_2 M_p + D_2 M_F + D_4 k_F)}{(1 - D_3 M_F)(1 - D_8 k_F) - D_5 D_{10} k_F M_F}. \end{aligned} \tag{56}$$

Ponieważ funkcje $\psi_a(t)$ spełniają warunki (39), więc są wspólnie ograniczone i jednakowo ciągłe. Zbiór punktów przekształconych jest więc zwarty na mocy twierdzenia Arzeli.

W sposób analogiczny jak w pracy [4] można także dowieść, że przekształcenie (41) jest ciągłe w przestrzeni Λ.

Jeśli spełnione są założenia 1° i 2° a ponadto warunki (55), to na mocy twierdzenia Schaudera ([5], str. 18) układ równań całkowych (30) ma co najmniej jedno rozwiązanie. Jeśli wśród rozwiązań tego układu znajduje się takie $\big(\varphi_1^*(t), \varphi_2^*(t), \ldots, \varphi_n^*(t)\big)$, które spełnia warunek

$$\int_L q(\tau) H(\tau) d\tau = 0, \tag{57}$$

będący odpowiednikiem warunku (11), gdzie $q(t)$ jest macierzą przekątniową określoną wzorem (12) zaś $H(t)$ kolumną

$$\begin{aligned} H(t) &= \big(X^+(t)\big)^{-1} \big(a(t) + ib(t)\big)^{-1} \times \\ &\times \left\{ c(t) + F\left(t, \frac{\varphi_1^*(t) + \overline{\varphi_1^*(t)}}{2}, \ldots, \frac{\varphi_n^*(t) + \overline{\varphi_n^*(t)}}{2}, \frac{\varphi_1^*(t) - \overline{\varphi_1^*(t)}}{2i}, \ldots, \frac{\varphi_n^*(t) - \overline{\varphi_n^*(t)}}{2i}\right)\right\}, \end{aligned} \tag{58}$$

to badane zagadnienie nieliniowe ma co najmniej jedno rozwiązanie dane wzorem (28), gdzie w miejsce $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ należy podstawić $\varphi_1^*(t), \varphi_2^*(t), \ldots, \varphi_n^*(t)$. Możemy więc wypowiedzieć następujące

TWIERDZENIE. *Jeżeli spełnione są założenia* 1° *i* 2°, *warunki* (55), *oraz jeśli wśród rozwiązań układu* (30) *znajdują się takie, które spełniają warunek* (57), *to nieliniowe zagadnienie Riemanna z warunkiem brzegowym* (21) *ma co najmniej jedno rozwiązanie.*

Prace cytowane

[1] К. П. Векуа, *Системы сингулярных интегральных уравнений,* Москва 1950.

[2] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения,* Москва 1946.

[3] W. Pogorzelski, *Równania całkowe i ich zastosowania,* t. III, Warszawa 1960.

[4] W. Żakowski, *Uogólnione, ciągłe zagadnienie brzegowe Hilberta dla układu n funkcji,* Biuletyn WAT, 1961.

[5] W. Pogorzelski, *Równania całkowe i ich zastosowania,* t. II, Warszawa 1958.

W. Leksiński (Warszawa)

THE GENERALIZED CONTINUOUS BOUNDARY PROBLEM OF RIEMANN FOR A SYSTEM OF n FUNCTIONS

SUMMARY

The author considers the continuous problem of Riemann for a system of n functions, with the non-linear boundary condition (21). Applying the theory of linear problems, he seeks solutions in the form (28), with unknown functions $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$, which satisfy the Hölder condition. Problem (21) is reduced to the system of the integral highly-singular equations (30). The author proves that it has at least one solution if the assumptions $1^0, 2^0$ and condition (55) are fulfilled, applying Schauder's theorem about the invariant point. Problem (21) has at least one solution if there are solutions of system (30) which satisfy condition (57).
