ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE VIII (1964)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Z. Ciesielski i Z. Semadeni (Poznań)

Przegląd niektórych nowszych metod w teorii potencjału, I

Uogólnione rozwiązania zagadnienia Dirichleta, potencjały i pojemności

Wstęp 148

I. Funkcje nadharmoniczne 149
1.1. Oznaczenia. 1.2. Miary Radona. 1.3. Miary harmoniczne. 1.4. Definicja funkcji nadharmonicznej. 1.5. Rodziny funkcji nadharmonicznych.

II. Metoda Perrona-Wienera-Brelota 155
2.1. Nadharmoniczne majoranty. 2.2. Funkcje rezolutywne. 2.3. Zupełność strukturowa przestrzeni funkcji harmonicznych. 2.4. Równanie przewodnictwa cieplnego. 2.5. Aksjomatyczne ujęcie zagadnienia Dirichleta

III. Zbiory cienkie. Wymiatanie. Punkty regularne 163
3.1. Pojęcie zbioru cienkiego w punkcie. 3.2. Topologia Cartana. 3.3. Zbiory polarne. 3.4. Funkcje quasi nadharmoniczne. 3.5. Ogólne pojęcie wymiatania. 3.6. Kryteria regularności punktów brzegowych

IV. Potencjały 167
4.1. Rozkład Riesza. 4.2. Funkcja Greena. 4.3. Potencjały Greena. 4.4. Potencjały ograniczone a zbiory polarne. 4.5. Wymiatanie masy. 4.6. Twierdzenie Evansa-Kelloga. 4.7. Ciągłość potencjału na nośniku miary. 4.8. Twierdzenie Kiełdysza o punktach regularnych. 4.9. Związek funkcji Greena z rozwiązaniami fundamentalnymi równania ciepła. 4.10. Uogólnienia teorii potencjału

V. Energia i pojemność 178
5.1. Uwagi wstępne. 5.2. Pojęcie energii. 5.3. Definicja potencjału pojemnościowego. 5.4. Monotoniczność masy względem potencjału. 5.5. Zasada równowagi. 5.6. Związek wymiatania z infimum energii. 5.7. Definicja pojemności. 5.8. Związek pojęcia zbioru polarnego z pojemnością i energią. 5.9. Analityczne formuły M. Kaca dotyczące pojemności i potencjału pojemnościowego

Prace cytowane 187

Wstęp

W klasycznym ujęciu przez *funkcję harmoniczną* rozumiemy funkcję u o ciągłych drugich pochodnych cząstkowych, spełniającą równanie Laplace'a

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2} = 0.$$

Pierwsze zagadnienie brzegowe, zwane zagadnieniem Dirichleta, polega na znalezieniu, przy danej funkcji ciągłej f na brzegu ∂U obszaru U, funkcji harmonicznej na U, ciągłej na $\overline{U}$ i przyjmującej zadane wartości $f(z)$ na ∂U. Fizycznie oznacza to znalezienie potencjału w obszarze nie zawierającym ładunków, przy zadanych wartościach na brzegu.

Teoria potencjału jest jedną z wciąż rozwijających się klasycznych dziedzin matematyki. Problemy, które wydawały się całkowicie opracowane, nadal fascynują matematyków; każde dziesięciolecie przynosi nowe pomysły.

Na podkreślenie zasługują dwie cechy tego rozwoju. Przede wszystkim w szerokim zakresie stosowane są metody analizy funkcjonalnej: przestrzenie Hilberta (w związku z całkami energii i zasadą Dirichleta), metody Schaudera, półgrupy operatorów, dystrybucje, struktury liniowe, przestrzenie funkcji ciągłych i miar na przestrzeniach lokalnie zwartych, zbiory wypukłe.

Drugą cechą jest coraz silniejsze powiązanie teorii potencjału z probabilistyką. Związek ten, zauważony przez Kakutaniego [1], otworzył nowe możliwości zarówno w teorii potencjału, jak i w teorii procesów Markowa. Wymienić tu należy nazwiska Dooba, Dynkina, Hunta i Kaca.

Celem tego artukułu jest omówienie niektórych nowych koncepcji, które były dziełem ostatnich kilkunastu lat. Pomyślany jest on jako wstęp do prac bardziej specjalnych; nie chodzi więc ani o ukazanie całokształtu teorii potencjału, ani o szczegółowe wykazy bibliograficzne, a raczej o uwypuklenie i intuicyjne podbudowanie niektórych ważnych pojęć i twierdzeń.

Zakłada się, że czytelnik zna podstawowe pojęcia analizy funkcjonalnej i teorii całki, natomiast nie zakłada się żadnej głębszej znajomości teorii potencjału. Z tego powodu oraz ze względu na konieczność utrzymania ciągłości i kompletności, artykuł zawiera sporo materiału, który można również znaleźć w podręcznikach. Dowody podawane są rzadko, chyba że są łatwe i instruktywne, lub gdy dowód jest ważny a mało znany; natomiast często objaśniona jest szkicowo metoda.

Artykuł podzielony jest na trzy części. Pierwsza z nich obejmuje materiał, który częściowo można zaliczyć do klasycznego: miary harmoniczne, metoda Perrona-Wienera-Brelota, badanie regularności punktów

brzegowych, własności jądra Greena, wymiatanie masy, energia i jej związek z pojemnością. Sposób przedstawienia tego materiału opiera się na pracach matematyków francuskich: Brelota, Cartana, Choqueta i innych. Rozumowanie odbiega więc od tradycyjnego, co spowodowane jest bądź to chęcią nowocześniejszego ujęcia i uwypuklenia istoty pewnych dowodów, bądź też tym, aby argumenty tu użyte można było bez większych zmian stosować w znacznie ogólniejszych wypadkach: w przestrzeniach Greena, dla ogólniejszych typów równań eliptycznych czy parabolicznych. Część druga omawiać będzie rozmaite abstrakcyjne pojęcia brzegu wprowadzone przez Choqueta, Martina i Szyłowa. Część trzecia wreszcie poświęcona będzie metodom probabilistycznym.

Tematy poruszane w tym artykule były wielokrotnie dyskutowane z profesorami H. Bauerem, J. L. Doobem, R. Getoorem, M. Kacem, L. Lumer-Naïm, R. Ranga Rao i S. J. Taylorem, od których nauczyliśmy się podstaw nowoczesnej teorii potencjału i którym składamy w tym miejscu serdeczne podziękowanie.

Literatura z teorii potencjału jest ogromna. Najwięcej materiału można znaleźć w skrypcie Brelota [1] (tam można znaleźć wiele dowodów opuszczonych tutaj). Ponadto duże zestawy bibliograficzne podane są w artykule Angera [1], [2], w książce Tsuji [1] oraz w pracy Ohtsuka [1]. Z licznych książek, w których omawiane są pewne zagadnienia teorii potencjału, wymienimy: Ahlfors i Sario [1], Choquet [1], Courant [1], Courant i Hilbert [1], Dynkin [1] i [2], Epstein [1], Gelfand i Szyłow [1], Günter [1], Heins [1], Kellog [1], Krzyżański [1], Leja [1], Maurin [1], Miranda [1], Pietrowski [2], Rado [1], L. Schwartz [1], Sobolew [1], Tichonow i Samarski [1], de la Vallée Poussin [1].

I. Funkcje nadharmoniczne

§ 1.1. Oznaczenia. Symbole $\cup$, $\cap$, $\setminus$ oznaczać będą sumę, przekrój i różnicę zbiorów. Punkty N-wymiarowej przestrzeni euklidesowej R^N oznaczane będą literami $x, y, z, \ldots$, a odległość symbolem $|x-y|$. Nadto

$\Delta = \{x \in R^2 \colon |x| < 1\}$ — wnętrze koła jednostkowego,

$\partial A = \bar{A} \cap \overline{R^N \setminus A}$ — brzeg zbioru A.

$\mathscr{G}(U)$ = rodzina wszystkich zbiorów otwartych zawartych w U,

$\mathscr{G}_c(U)$ = rodzina wszystkich zbiorów otwartych, których domknięcie jest zwarte i zawarte w U,

$\mathscr{H}(U)$ = klasa funkcji harmonicznych na U $\big($dla $U \in \mathscr{G}(R^N)\big)$,

$\mathscr{HB}(U)$ = klasa funkcji harmonicznych ograniczonych na U,

$\mathscr{HC}(U)$ = klasa funkcji harmonicznych na U mających ciągłe przedłużenie na $\bar{U}$ $\big($dla $U \in \mathscr{G}_c(R^N)\big)$.

Przestrzenie $\mathscr{H}\mathscr{B}(U)$ i $\mathscr{H}\mathscr{C}(U)$ są przestrzeniami Banacha z normą

$$\|u\| = \sup\{|u(x)|: x \in U\}.$$

Dla $u \in \mathscr{H}\mathscr{C}(U)$ mamy również $\|u\| = \sup\{|u(x)|: x \in \partial U\}$ (na mocy zasady maksimum). Przestrzenie te są częściowo uporządkowane, nierówność $u_1 \geqslant u_2$ oznacza, że $u_1(x) \geqslant u_2(x)$ dla każdego $x \in U$.

Pozostałe symbole są zdefiniowane w tekście, a mianowicie $\mathscr{C}(X)$, $\mathscr{M}(X)$, δ_x, $\|\mu\|$ w § 1.2, H_f, $\mathscr{R}(U)$, μ_x^V w § 1.3 i § 2.2, $\mathscr{H}^{\uparrow}(U)$ i u_V w § 1.4, $\operatorname{reg} u$ w § 3.4, B_v^E i R_v^E w § 3.5, $\partial_r U$ w § 3.6, $h(x)$, $h_y(x)$, $G_y(x) = G^U(x, y)$ w § 4.2, G_μ w § 4.3, (μ, ν), $\mathscr{E}^+$, $\mathscr{E}$, $\| \|_2$ w § 5.2, v_K i μ_K w § 5.3, $\varkappa(A)$ w § 5.7.

§ 1.2. Miary Radona. Załóżmy, że X jest przestrzenią topologiczną zwartą. Oznaczmy przez $\mathscr{C}(X)$ przestrzeń Banacha funkcji rzeczywistych ciągłych na X, z normą

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|: x \in X\}$$

i częściowym porządkiem: $f \geqslant g$, gdy $f(x) \geqslant g(x)$ dla każdego $x \in X$. *Miarą Radona* na X nazywamy każdą skończoną, regularną, σ-addytywną funkcję zbioru, określoną na ciele podzbiorów borelowskich przestrzeni X. (Regularność nieujemnej miary μ oznacza, że dla dowolnego zbioru borelowskiego A oraz dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją: zbiór otwarty G i zbiór domknięty F takie, że $F \subset A \subset G$ oraz $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$; jeżeli miara μ nie jest nieujemna, to warunek regularności zakładamy dla μ_+ i μ_- osobno, gdzie $\mu = \mu_+ - \mu_-$ jest rozkładem Jordana. Jeżeli przestrzeń X jest metryzowalna, to warunek regularności jest zbędny, bo każda miara borelowska jest regularna.)

Mówimy, że miara μ jest *skoncentrowana* na podzbiorze borelowskim A przestrzeni X, jeżeli μ znika poza A, tzn. $\mu(B) = 0$ dla $B \subset X \setminus A$. *Nośnikiem miary* μ nazywa się najmniejszy zbiór domknięty F taki, że μ jest skoncentrowana na F (istnienie takiego zbioru wynika z regularności miary).

Na mocy twierdzenia reprezentacyjnego Riesza istnieje jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy miarami Radona na X a funkcjonałami liniowymi na $\mathscr{C}(X)$, dana wzorem

$$\mu(f) = \int_X f(x)\mu(dx) \tag{1.1}$$

dla $f \in \mathscr{C}(X)$. Litera μ po prawej stronie wzoru oznacza funkcję zbioru, po lewej funkcjonał na $\mathscr{C}(X)$. Ponadto miara μ jest nieujemna wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiedni funkcjonał jest nieujemny, to znaczy, gdy $\mu(f) \geqslant 0$ dla każdego $f \geqslant 0$. Normą miary Radona nazywamy liczbę

$$\|\mu\| = \|\mu_+\| + \|\mu_-\| = \operatorname*{Var}_X \mu = \sup\{\mu(f): f \in \mathscr{C}(X), \|f\| \leqslant 1\}.$$

Miarę μ będziemy nazywać *miarą probabilistyczną*, jeżeli $\mu \geqslant 0$ oraz $\|\mu\| = \mu(X) = 1$. Miarę probabilistyczną skoncentrowaną na zbiorze jednopunktowym $\{x\}$, gdzie $x \in X$, nazywać będziemy *miarą Diraca* i oznaczać przez δ_x. Innymi słowy,

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad x \in A, \\ 0 & \text{gdy} \quad x \notin A \end{cases}$$

oraz

$$\delta_x(f) = f(x) \quad \text{dla} \quad f \in \mathscr{C}(X).$$

Zbiór wszystkich miar probabilistycznych Radona na X oznaczać będziemy symbolem $\mathscr{M}(X)$. Jest to zbiór wypukły, tzn. jeżeli $\mu_1 \in \mathscr{M}(X)$, $\mu_2 \in \mathscr{M}(X)$ i $0 \leqslant t \leqslant 1$, to $t\mu_1 + (1-t)\mu_2 \in \mathscr{M}(X)$.

Zbiór ten będzie rozpatrywany jako przestrzeń topologiczna ze słabą topologią indukowaną przez przestrzeń sprzężoną do $\mathscr{C}(X)$; innymi słowy, bazą otoczeń miary μ_0 są wszystkie zbiory postaci

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{\mu : |\mu(f_i) - \mu_0(f_i)| < \varepsilon\},$$

gdzie $f_1, \ldots, f_n$ jest dowolnym skończonym układem funkcji z $\mathscr{C}(X)$ i $\varepsilon > 0$. Wiadomo, że zbiór $\mathscr{M}(X)$ jest zwarty w tej topologii. Ciąg $(\mu_n) \subset \mathscr{M}(X)$ jest zbieżny w tej topologii do μ_0 wtedy i tylko, gdy $\mu_n(f) \to \mu_0(f)$ dla każdego $f \in \mathscr{C}(X)$. Zbieżność ta znana jest jako słaba zbieżność miar prawdopodobieństwa.

Punkt a zbioru wypukłego K nazywa się *punktem ekstremalnym*, jeżeli nie może być przedstawiony w postaci $a = ta_1 + (1-t)a_2$, gdzie $0 < t < 1$, $a_1 \in K$, $a_2 \in K$, $a_1 \neq a_2$. Wiadomo, że na to, aby miara μ była punktem ekstremalnym zbioru $\mathscr{M}(X)$, potrzeba i wystarcza, aby $\mu = \delta_x$ dla pewnego $x \in X$.

Jeżeli X jest lokalnie zwarte, to przez nieujemną miarę Radona na X rozumiemy dowolną regularną lokalnie skończoną miarę borelowską na X (lokalna skończoność równoważna jest temu, że miara jest skończona na każdym zbiorze zwartym). Innymi słowy, jest to miara wyznaczona wzorem (1.1) przez funkcjonał liniowy i nieujemny, określony na przestrzeni $\mathscr{C}_{00}(X)$ funkcji ciągłych na X o zwartych nośnikach.

Konieczna jest tu pewna ostrożność, jeżeli bowiem $U \in \mathscr{G}_c(R^N)$, to miara Radona na U może być nieskończona (U traktowane jest jako przestrzeń lokalnie zwarta), natomiast miara Radona na $\overline{U}$ skoncentrowana na U, musi być skończona.

Rodzina $\mathfrak{A}$ funkcji rzeczywistych na X nazywa się *rodziną filtrującą w górę*, jeżeli dla dowolnych f, $g \in \mathfrak{A}$ istnieje $h \in \mathfrak{A}$ takie, że $f \leqslant h$ i $g \leqslant h$. Następujące twierdzenie jest ważnym uogólnieniem twierdzenia o całko-

waniu ciągów monotonicznych: *jeżeli* $\{f_a\}$ *jest rodziną filtrującą w górę funkcji półciągłych z dołu na przestrzeni lokalnie zwartej* X, *to*

$$\int_X \sup_a f_a(x)\mu(dx) = \sup_a \int_X f_a(x)\mu(dx); \tag{1.2}$$

jeżeli jedno z tych wyrażeń jest skończone, to drugie musi być też skończone. Dualnie definiuje się rodziny *filtrujące w dół*, dla których zachodzi analogiczne twierdzenie: *jeżeli* $\{f_a\}$ *jest rodziną filtrującą w dół funkcji półciągłych z góry na przestrzeni lokalnie zwartej* X, *to*

$$\int_X \inf_a f_a(x)\mu(dx) = \inf_a \int_X f_a(x)\mu(dx). \tag{1.3}$$

§ 1.3. Miary harmoniczne. Zbiór V nazywa się *zbiorem regularnym*, jeżeli $V \in \mathscr{G}_c(R^N)$ oraz dla dowolnej funkcji $f \in \mathscr{C}(\partial V)$ istnieje funkcja $H_f \in \mathscr{H}\mathscr{C}(V)$ taka, że $H_f(x) = f(x)$ dla $x \in \partial V$, tzn. jeżeli zagadnienie Dirichleta ma rozwiązanie przy dowolnym obłożeniu ciągłym na ∂V; wiadomo, że takie rozwiązanie jest jednoznacznie wyznaczone przez f. $\mathscr{R}(U)$ oznaczać będzie rodzinę wszystkich zbiorów regularnych V takich, że $\overline{V} \subset U$.

Jeżeli $V \in \mathscr{R}(R^N)$, to odwzorowanie $f \to H_f$ jest operacją izotoniczną, liniową i izometryczną z $\mathscr{C}(\partial V)$ na $\mathscr{H}\mathscr{C}(V)$, tzn. $f \geqslant g$ jest równoważne temu, że $H_f \geqslant H_g$, nadto

$$H_{f+g} = H_f + H_g \quad \text{oraz} \quad \|H_f\| = \|f\| \quad \text{dla} \quad f, g \in \mathscr{C}(\partial V).$$

Dla dowolnego, ustalonego $x \in V$, wyrażenie $H_f(x)$ jest funkcjonałem liniowym na przestrzeni $\mathscr{C}(\partial V)$, zatem (patrz § 1.2) istnieje dokładnie jedna miara Radona μ_x^V na ∂V taka, że

$$H_f(x) = \int_{\partial V} f(z)\mu_x^V(dz) = \mu_x^V(f) \tag{1.4}$$

dla dowolnego $f \in \mathscr{C}(\partial V)$. Ponieważ $H_f \geqslant 0$ dla $f \geqslant 0$, miara μ_x^V musi być nieujemna; ponieważ funkcja 1 należy do $\mathscr{H}\mathscr{C}(V)$, musi być nadto

$$\|\mu_x^V\| = \mu_x^V(\partial V) = \int_{\partial V} 1\,\mu_x^V(dz) = 1,$$

co oznacza, że μ_x^V jest miarą probabilistyczną. Nazywa się ona *miarą harmoniczną punktu* x.

Wyrażenie $\mu_x^V(A)$ rozważane przy ustalonym x jest miarą borelowską; dowodzi się dość łatwo, że przy ustalonym A jest to funkcja harmoniczna zmiennej x. Uzasadnimy później, że $\mu_x^V(A)$ może być traktowane jako uogólnione rozwiązanie zagadnienia Dirichleta przy (nieciągłym) obłożeniu $f = \chi_A$ na brzegu ∂V, gdzie χ_A oznacza funkcję charakterystyczną zbioru A.

Typowymi zbiorami regularnymi w R^N są kule (względnie koła, gdy $N = 2$). Wówczas miary harmoniczne są absolutnie ciągłe względem miary powierzchniowej Lebesgue'a i gęstościami ich są odpowiednie jądra Poissona, tzn. jeżeli V jest kulą o środku y_0 i promieniu ϱ, to

$$\int_{\partial V} f(z)\mu_x^V(dz) = \frac{1}{\omega_N \varrho} \int_{\partial V} f(z) \frac{\varrho^2 - |x-y_0|^2}{|x-z|^N} \sigma(dz),$$

gdzie σ jest miarą powierzchniową na ∂V, a ω_N jest powierzchnią sfery jednostkowej, tzn.

$$\sigma(\partial V) = \varrho^{N-1}\omega_N, \qquad \omega_N = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}N)}, \qquad N \geqslant 2. \tag{1.5}$$

Wzór (1.4) można więc uważać za uogólnienie wzoru Poissona; jest on słuszny bez żadnych założeń o gładkości brzegu.

Z jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Dirichleta wynika, że funkcja u ciągła na U jest harmoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$u(x) = \int_{\partial V} u(z)\mu_x^V(dz) \tag{1.6}$$

dla każdego $V \in \mathscr{R}(U)$ i $x \in V$.

Stosując (1.6) do szczególnego przypadku $u(x) = \mu_x^U(A)$ otrzymujemy

$$\int_{\partial V} \mu_z^U(A)\mu_x^V(dz) = \mu_x^U(A) \tag{1.7}$$

dla dowolnego $U \in \mathscr{R}(R^N)$, $V \in \mathscr{R}(U)$ i $x \in V$. Jest to podstawowe równanie wiążące miary harmoniczne odpowiadające różnym obszarom.

Z zasady minimum wynika, że jeżeli nieujemna funkcja harmoniczna $u(x) = \mu_x^V(A)$ przyjmuje wartość 0 dla pewnego $x \in V$, to $\mu_y^V(A) = 0$ dla każdego $y \in V$. Oznacza to, że miary harmoniczne są absolutnie ciągłe jedna względem drugiej i możemy mówić „zbiór miary harmonicznej zero" rozumiejąc przez to, że $\mu_x^V(A) = 0$ dla pewnego (a stąd dla każdego) $x \in V$.

Ciągłość funkcji (1.4) na brzegu obszaru oznacza, że jeżeli $z \in \partial V$, $x \in V$ i $x \to z$, to

$$H_f(x) = \mu_x^V(f) \to f(z) = \delta_z(f). \tag{1.8}$$

Ponieważ warunek (1.8) spełniony jest dla dowolnego $f \in \mathscr{C}(\partial V)$, oznacza to, że μ_x^V dąży do δ_z w słabej topologii zbioru $\mathscr{M}(\partial V)$ (patrz § 1.2) Miary δ_z $(z \in \partial V)$ można więc uważać za graniczny przypadek miar harmonicznych.

§ 1.4. Definicja funkcji nadharmonicznej. W dalszym ciągu U oznacza ustalony zbiór z $\mathscr{G}(R^N)$. Funkcja v określona na U nazywa się *funkcją nadharmoniczną*, jeżeli:

(i) $-\infty < v(x) \leqslant \infty$ dla $x \in U$,

(ii) v jest półciągła z dołu, tzn. dla dowolnego $x \in U$ zachodzi nierówność [1]

$$v(x) \leqslant \liminf_{y \to x} v(y), \tag{1.9}$$

(iii) dla dowolnego $V \in \mathscr{R}(U)$ i dowolnej funkcji $u \in \mathscr{H}\mathscr{C}(V)$ warunek $v(y) \geqslant u(y)$ dla $y \in \partial V$ pociąga $v(x) \geqslant u(x)$ dla $x \in V$, co jest równoważne temu, że

$$v(x) \geqslant \int_{\partial V} v(y) \mu_x^V(dy) \tag{1.10}$$

dla każdego $V \in \mathscr{R}(U)$ i $x \in V$.

(iv) zbiór $\{x: v(x) < \infty\}$ jest gęsty w U.

Na mocy (i) oraz (ii) funkcja nadharmoniczna jest ograniczona z dołu na każdym zbiorze zwartym. Funkcja v nazywa się *funkcją podharmoniczną*, jeżeli funkcja $-v$ jest nadharmoniczna. Klasę wszystkich funkcji nadharmonicznych na U oznaczać będziemy symbolem $\mathscr{H}^{\uparrow}(U)$. Dla funkcji nadharmonicznych obowiązuje zasada minimum, dla funkcji podharmonicznych — zasada maximum.

Zwróćmy uwagę, że nierówność (1.10) mówi, że funkcja nadharmoniczna leży powyżej swej średniej „harmonicznej" $\mu_x^V(v)$, która może być brana po dowolnie małej kuli, natomiast nierówność (1.9) daje szacowanie z przeciwnej strony. Wynika stąd, że jakkolwiek funkcja nadharmoniczna może mieć gęsty zbiór punktów nieciągłości, to jednakże nieciągłości te mają specjalny charakter, między innymi z (1.9) i (1.10) otrzymujemy równość

$$v(x) = \liminf_{y \to x} v(y). \tag{1.11}$$

Jeżeli u jest funkcją nadharmoniczną w U oraz $V \in \mathscr{R}(U)$, to funkcja

$$u_V(x) = \begin{cases} u(x) & \text{dla} \quad x \in U \setminus V, \\ \int_{\partial V} u(z) \mu_x^V(dz) & \text{dla} \quad x \in V \end{cases} \tag{1.12}$$

jest również nadharmoniczna (całka ta jest skończona dla każdego $x \in V$).

§ 1.5. Rodziny funkcji nadharmonicznych. Jeżeli $v_1, \ldots, v_n \in \mathscr{H}^{\uparrow}(U)$, to $\min(v_1, \ldots, v_n) \in \mathscr{H}^{\uparrow}(U)$, natomiast $\max(v_1, \ldots, v_n)$ nie musi być funkcją nadharmoniczną. Należy nadto oczekiwać, że ani supremum, ani infimum

---

[1] W definicji limsup i liminf (przy $y \to x$) zakładamy (w przeciwieństwie do matematyków francuskich), że $y \neq x$.

nieskończonej rodziny funkcji z $\mathscr{H}^{\uparrow}(U)$ nie musi należeć do $\mathscr{H}^{\uparrow}(U)$, bowiem (1.9) nie zachowuje się przy braniu infimum, a (1.10) nie zachowuje się przy braniu supremum. Jednakże supremum rodziny filtrującej w górę (patrz § 1.2) funkcji z $\mathscr{H}^{\uparrow}(U)$ należy do $\mathscr{H}^{\uparrow}(U)$, o ile tylko warunek (iv) jest spełniony. Twierdzenie o zachowaniu się infimum rodziny funkcji nadharmonicznych wymaga wprowadzenia dodatkowych pojęć i będzie omówione w § 3.4.

Jeżeli $\mathfrak{F}$ jest dowolną (niepustą) rodziną funkcji nadharmonicznych na U, spełniających następujące warunki:

(1.13) jeżeli $u \in \mathfrak{F}$ i $v \in \mathfrak{F}$, to $\min(u, v) \in \mathfrak{F}$,

(1.14) jeżeli $u \in \mathfrak{F}$ i $V \in \mathscr{R}(U)$, to $u_V \in \mathfrak{F}$,

to funkcja $u_0(x) = \inf\{u(x)\colon u \in \mathfrak{F}\}$ jest harmoniczna w każdej składowej zbioru U, w której $u_0(x) > -\infty$. Twierdzenia tego dowodzi się łatwo, korzystając z faktu, że $\mathfrak{F}$ jest rodziną filtrującą w dół oraz z (1.3).

Omówny teraz pewien prosty, ale bardzo ważny przykład, którego różnorodną interpretację omawiać będziemy kilkakrotnie.

Oznaczmy przez w_0 funkcję określoną w kole jednostkowym Δ jako infimum wszystkich nieujemnych funkcji nadharmonicznych w Δ, przyjmujących w punkcie 0 wartość nie mniejszą niż 1, tzn.

(1.15) $$w_0(x) = \inf\{u(x)\colon u \in \mathscr{H}^{\uparrow}(\Delta),\ u \geqslant 0,\ u(0) \geqslant 1\}.$$

Wówczas $w_0(0) = 1$ i $w_0(x) = 0$ dla $x \neq 0$ (aby to uzasadnić, wystarczy zauważyć, że funkcje $u_n(x) = -n^{-1}\log|x|$ oraz $u_0(x) = 1$ są nadharmoniczne w Δ). Funkcja w_0 nie jest nadharmoniczna w Δ, bo nie jest półciągła z dołu, jakkolwiek jest to infimum pewnej rodziny funkcji nadharmonicznych. Do sprawy tej wrócimy w § 3.4.

Literatura

§ 1.2. N. Dunford i J. T. Schwartz [1], M. A. Naimark [1], Z. Semadeni i P. Zbijewski [1].

§ 1.4. T. Rado [1].

II. Metoda Perrona-Wienera-Brelota

§ 2.1. Nadharmoniczne majoranty. Celem tego rozdziału jest wprowadzenie pojęcia uogólnionego rozwiązania zagadnienia Dirichleta. Uogólnienie to dotyczy dwóch kwestii: obszaru, dla którego dane zagadnienie jest rozpatrywane (nie zakłada się regularności) oraz obłożenia na brzegu, o którym nie zakłada się, że jest ciągłe.

Znanych jest kilka metod definiowania uogólnionych rozwiązań. Najprostszą jest chyba metoda nadharmonicznych majorant, pocho-

dząca od Perrona [1]; Wiener używał aproksymacji obszaru od wewnątrz przez obszary regularne. Istotny postęp zawdzięczamy w tej dziedzinie Brelotowi, który w szeregu prac doprowadził te koncepcje do dzisiejszej postaci. Utarło się łączyć metody poszukiwań uogólnionych rozwiązań z tymi trzema nazwiskami i metodę przedstawioną tutaj nazywa się metodą PWB.

Załóżmy, że U jest ustalonym zbiorem z $\mathscr{G}_c(R^N)$, a f funkcją o wartościach rzeczywistych określoną na U, z dopuszczalnymi wartościami $+\infty$ i $-\infty$. Oznaczmy przez Φ_f klasę wszystkich funkcji v nadharmonicznych i ograniczonych z dołu na U, spełniających następujący warunek:

$$\liminf_{y\to z} v(y) \geqslant f(z) \quad \text{dla każdego } z\in\partial U. \tag{2.1}$$

Wprowadzamy również dualną klasę Ψ_f funkcji podharmonicznych, ograniczonych z góry na U i spełniających warunek

$$\limsup_{y\to z} w(y) \leqslant f(z) \quad \text{dla każdego } z\in\partial U. \tag{2.2}$$

Załóżmy, że obie klasy są niepuste (jest to np. spełnione wtedy, gdy f jest funkcją ograniczoną). Oznaczmy

$$\bar{H}_f(x) = \inf\{v(x)\colon v\in\Phi_f\}, \qquad \underline{H}_f(x) = \sup\{w(x)\colon w\in\Psi_f\}.$$

Ponieważ warunki (1.13) i (1.14) są spełnione, $\bar{H}_f$ i $\underline{H}_f$ są funkcjami harmonicznymi na U, nadto z warunków (2.1), (2.2) i z zasady minimum wynika, że $\bar{H}_f \geqslant \underline{H}_f$. Stosujemy tu zasadę minimum w następującej postaci: ponieważ funkcja $u = \bar{H}_f - \underline{H}_f$ jest harmoniczna oraz $\liminf_{x\to z} u(x) \geqslant 0$ dla każdego $z\in\partial U$, to $u(x)\geqslant 0$ dla $x\in U$.

Jeżeli klasa Φ_f jest pusta, a U jest obszarem (tzn. zbiorem otwartym i spójnym), to definiujemy $\bar{H}_f = +\infty$ dla $x\in U$. Aby objąć również ten przypadek w jednolitej definicji funkcji $\bar{H}_f$, wprowadza się pojęcie funkcji *hiperharmonicznej*, czyli funkcji nadharmonicznej w sensie szerszym. Tak nazywamy każdą funkcję spełniającą warunki (i), (ii) i (iii) wymienione w § 1.4. Funkcja hiperharmoniczna jest nadharmoniczna w każdej składowej, w której nie jest identycznie równa $+\infty$. Mianowicie, z nierówności (1.10) wynika, że jeżeli $v(x) < \infty$ dla pewnego x, to $v(y) < \infty$ w zbiorze gęstym w U.

§ 2.2. Funkcje rezolutywne. Funkcja f określona na ∂U nazywa się *funkcją rezolutywną*, jeżeli obie klasy Φ_f i Ψ_f są niepuste oraz $\bar{H}_f(x) = \underline{H}_f(x)$ dla każdego $x\in U$. Jeżeli warunek ten jest spełniony, to funkcję tę oznaczamy przez $H_f(x)$ i nazywamy *uogólnionym rozwiązaniem zagadnienia Dirichleta* przy obłożeniu f. Ponieważ dla dowolnej funkcji $f\in\mathscr{C}(\partial U)$, dla której istnieje zwykłe rozwiązanie zagadnienia Dirichleta, rozwiązanie uogólnione pokrywa się ze zwykłym, możemy używać tego

samego symbolu. Funkcja H_f nie musi być ciągła na $\overline{U}$ nawet, gdy funkcja f jest ciągła.

Rozważmy następujący przykład: $U = \Delta \setminus \{0\}$ (koło bez środka), $\partial U = \partial\Delta \cup \{0\}$, $f(x) = 0$ dla $x \in \partial\Delta$, $f(0) = 1$. Wówczas $H_f(x) = 0$ dla $x \in U$ (porównaj z (1.15)) i punkt $x_0 = 0$ jest punktem nieciągłości uogólnionego rozwiązania.

Fundamentalne twierdzenie Wienera orzeka, że każda funkcja ciągła jest rezolutywna, tzn. jeżeli $f \in \mathscr{C}(\partial U)$, to $\overline{H}_f = \underline{H}_f$. Naszkicujemy teraz najprostszy ze znanych dowodów tego twierdzenia, który ma jeszcze tę zaletę, że można go stosować w bardzo ogólnych przypadkach.

Oznaczmy przez E zbiór funkcji rezolutywnych z $\mathscr{C}(\partial U)$, przez E_0 zbiór wszystkich funkcji z $\mathscr{C}(\partial U)$, które mogą być rozszerzone do funkcji ciągłych na $\overline{U}$ i nadharmonicznych na U, wreszcie

$$E_1 = \{f_1 - f_2 \colon f_1 \in E_0, f_2 \in E_0\}.$$

Stwierdzamy łatwo następujące fakty: 1° E jest podprzestrzenią liniową domkniętą przestrzeni $\mathscr{C}(\partial U)$. 2° $E_0 \subset E_1 \subset E$, mianowicie jeżeli $f \in E_0$, to f można przedłużyć do funkcji u ciągłej na $\overline{U}$ i nadharmonicznej na U, skąd $u \in \Phi_f$ i $u \geqslant \overline{H}_f$. Z drugiej strony, dla dowolnego $z \in \partial U$ mamy

$$\limsup_{x \to z} \overline{H}_f(x) \leqslant \limsup_{x \to z} u(x) = u(z) = f(z),$$

skąd $\overline{H}_f \in \Psi_f$ i $\overline{H}_f \leqslant \underline{H}_f$. Pokazaliśmy więc, że $f \in E_0$ pociąga $\overline{H}_f = \underline{H}_f$, tzn. $f \in E$. 3° E_1 jest podprzestrzenią liniową. 4° E_1 jest podstrukturą przestrzeni $\mathscr{C}(\partial U)$, tzn. jeżeli $f \in E_1$ i $g \in E_1$, to

$$\max(f, g) = \tfrac{1}{2}(f + g + |f - g|) \in E_1.$$

Wystarczy w tym celu wykazać, że $f \in E_1$ pociąga $|f| \in E_1$, a to wynika z definicji E_1 i z identyczności

$$|f_1 - f_2| = f_1 + f_2 - 2\min(f_1, f_2),$$

a także z faktu, że zarówno suma, jak i minimum funkcji nadharmonicznych jest funkcją nadharmoniczną. 5° E_0 separuje punkty zbioru ∂U, tzn. jeżeli $z_1 \in \partial U$, $z_2 \in \partial U$, $z_1 \neq z_2$, to istnieje $f \in E_0$ takie, że $f(z_1) \neq f(z_2)$. Otóż już funkcje liniowe separują R^N, a każda funkcja liniowa jest harmoniczna, więc jej obcięcie należy do E_0.

Zatem E_1 jest liniową podstrukturą przestrzeni $\mathscr{C}(\partial U)$ separującą ∂U i na mocy strukturowej wersji twierdzenia Stone'a-Weierstrassa E_1 jest gęste w $\mathscr{C}(\partial U)$, skąd $E = \mathscr{C}(\partial U)$.

Wiemy już zatem, że dla każdej funkcji ciągłej $f \in \mathscr{C}(\partial U)$ istnieje jednoznacznie określone uogólnione rozwiązanie $H_f \in \mathscr{HB}(U)$. Wyznacza to operator liniowy z $\mathscr{C}(\partial U)$ do $\mathscr{HB}(U)$. Możemy obecnie powtórzyć rozumowanie przeprowadzone w § 1.3 i wzór (1.4) definiuje nam miary harmoniczne μ_x^U dla dowolnego zbioru $U \in \mathscr{G}_c(R^N)$ niekoniecznie regular-

nego. Pozwala to nam również scharakteryzować funkcje rezolutywne, mianowicie funkcja f określona na ∂U jest rezolutywna wtedy i tylko wtedy, gdy jest całkowalna względem każdej miary harmonicznej μ_x^U; jeżeli warunek ten jest spełniony, to wzór (1.4) daje uogólnione rozwiązanie (Brelot, 1939). Twierdzenia tego dowodzi się korzystając z metody Daniella definiowania całki $\int f d\mu$, mianowicie całkę dowolnej funkcji f można otrzymać, wychodząc z klasy funkcji ciągłych, przez dwukrotne przejście do granicy z monotonicznymi ciągami. Ze względu na twierdzenia Harnacka odpowiednie ciągi uogólnionych rozwiązań są również zbieżne.

Jeżeli U jest obszarem, to z zasady minimum wynika, że jeżeli funkcje harmoniczne $\overline{H}_f$ i $\underline{H}_f$ są równe w chociaż jednym punkcie, to są równe wszędzie. Opierając się na tym wnioskujemy, że jeżeli funkcja f określona na ∂U jest całkowalna względem jednej miary μ_x^U, to jest również całkowalna względem każdej innej miary harmonicznej.

Można podać inne metody definiowania uogólnionego rozwiązania H_f. Metoda Wienera polega na aproksymowaniu od wewnątrz dowolnego obszaru obszarami regularnymi.

Wszystkie metody prowadzą do tego samego wyniku, o ile tylko spełniona jest zasada minimum. Zachodzi bowiem następujące twierdzenie (Kiełdysz, 1941):

Niech U będzie obszarem ograniczonym, a L_f dowolnym odwzorowaniem przestrzeni $\mathscr{C}(\partial U)$ w $\mathscr{H}(U)$ spełniającym następujące warunki: 1° jeżeli $f \geqslant g$, to $L_f \geqslant L_g$ i na odwrót, 2° jeżeli dla funkcji f istnieje zwykłe rozwiązanie zagadnienia Dirichleta (tzn. jeżeli funkcja H_f jest ciągła na $\overline{U}$), to $H_f = L_f$. Wówczas $L_f = H_f$ dla każdej funkcji $f \in \mathscr{C}(\partial U)$.

§ 2.3. Zupełność strukturowa przestrzeni funkcji harmonicznych. Przestrzeń $\mathscr{HB}(U)$ funkcji harmonicznych i ograniczonych na zbiorze otwartym i ograniczonym U jest *strukturą liniową* przy naturalnej definicji częściowego porządku: $u_1 \geqslant u_2$, gdy $u_1(x) \geqslant u_2(x)$ dla $x \in U$. Zdanie to kryje w sobie głęboką treść i jest kluczem do zrozumienia metody Perrona i jej uogólnień. Oznacza ono, że dla dowolnych dwóch funkcji $u_1 \in \mathscr{HB}(U)$ i $u_2 \in \mathscr{HB}(U)$ istnieje najmniejsza funkcja $u \in \mathscr{HB}(U)$ taka, że $u \geqslant u_1$ i $u \geqslant u_2$; będziemy ją oznaczać symbolem $u_1 \vee u_2$. Należy wyraźnie jednak rozróżniać $u_1 \vee u_2$ (supremum w przestrzeni $\mathscr{HB}(U)$) od funkcji podharmonicznej

$$v(x) = \max[u_1(x), u_2(x)], \tag{2.3}$$

która jest równa supremum pary u_1, u_2 w przestrzeni wszystkich funkcji ciągłych na U. Podprzestrzeń, która jest strukturą w częściowym porządku indukowanym przez całą przestrzeń, nie musi być podstrukturą, tzn. supremum relatywne (ze względu na podprzestrzeń) nie musi pokrywać się z supremum ze względu na całą przestrzeń. Dobrą ilustrację stanowi tutaj podprzestrzeń przestrzeni $\mathscr{C}(\langle 0, 1\rangle)$ złożona z funkcji li-

niowych na $\langle 0, 1\rangle$; dla dowolnych dwóch funkcji liniowych u_1 i u_2 na $\langle 0, 1\rangle$ istnieje najmniejsza funkcja liniowa majoryzująca te dwie dane, otrzymana przez liniową interpolację wartości $\max[u_1(0), u_2(0)]$ oraz $\max[u_1(1), u_2(1)]$, natomiast funkcja (2.3) jest łamaną, niekoniecznie liniową.

Przypuśćmy, że u_1 i u_2 są dowolnymi funkcjami z $\mathscr{HB}(U)$ i że U jest obszarem ograniczonym o dostatecznie gładkim brzegu. Istnieją wówczas dla prawie każdego $z \in \partial U$ granice kątowe $u_1(z)$ i $u_2(z)$ i funkcja $u_1 \vee u_2$ wyraża się wzorem

$$(u_1 \vee u_2)(x) = \int_{\partial U} \max[u_1(z), u_2(z)]\mu_x^U(dz)$$

Supremum $u_1 \vee u_2$ w strukturze $\mathscr{HB}(U)$ odpowiada punktowemu supremum na brzegu.

Następująca konstrukcja pozwala wyznaczyć funkcję $u_1 \vee u_2$ dla dowolnych $u_1 \in \mathscr{HB}(U)$, $u_2 \in \mathscr{HB}(U)$ bez żadnych założeń o brzegu. Oznaczmy $w(x) = \inf\{v(x)\colon v \in F\}$, gdzie F jest klasą wszystkich funkcji nadharmonicznych majoryzujących u_1 i u_2 jednocześnie. F jest klasą niepustą, u_1 i u_2 bowiem są wspólnie ograniczone. Ponieważ warunki (1.13) i (1.14) są w tym wypadku spełnione, funkcja w jest harmoniczna; jest to szukana funkcja $u_1 \vee u_2$.

Dokładnie ta sama metoda pozwala udowodnić istnienie $u_1 \vee u_2$ dla dowolnej pary u_1, u_2 funkcji harmonicznych, o ile istnieje chociaż jedna funkcja nadharmoniczna majoryzująca u_1 i u_2 jednocześnie. Funkcja taka może jednak nie istnieć. Przestrzeń $\mathscr{H}(U)$ nie jest strukturą liniową, nawet gdy U jest kołem jednostkowym Δ. Najłatwiej to uzasadnić w sposób następujący. Gdyby $\mathscr{H}(\Delta)$ była strukturą liniową, to każda funkcja harmoniczna na Δ byłaby różnicą dwóch funkcji harmonicznych nieujemnych. Funkcje harmoniczne dodatnie mają jednak skończone granice kątowe prawie wszędzie na brzegu $\partial\Delta$, mianowicie jeżeli $0 < u \in \mathscr{H}(\Delta)$, to $u = -\log|f|$, gdzie $f = \exp(-u - iv)$ jest funkcją holomorficzną ograniczoną, która ma granice kątowe różne od zera prawie wszędzie (Leja [1], str. 398 i 408). Z drugiej jednak strony istnieje funkcja holomorficzna $f = u + iv$ nie mająca granic kątowych w zbiorze miary dodatniej (Leja [1], str. 400), zatem albo jej część rzeczywista, albo urojoną nie może być przedstawiona jako różnica dwóch funkcji harmonicznych nieujemnych.

Przestrzeń $\mathscr{HB}(U)$ jest nie tylko strukturą liniową, ale jest nawet strukturą warunkowo zupełną, tzn. każdy zbiór ograniczony w $\mathscr{HB}(U)$ ma supremum w $\mathscr{HB}(U)$. Mianowicie, jeżeli $\{u_\alpha\}$ jest dowolną rodziną funkcji harmonicznych oraz istnieje funkcja harmoniczna u taka, że $u_\alpha \leqslant u$ dla każdego α, to istnieje też najmniejsza funkcja harmoniczna o tej własności. Dowód tego można przeprowadzić bezpośrednio (jak

w wypadku dwóch funkcji), albo korzystając z faktu udowodnionego dla skończonej liczby funkcji i twierdzeń Harnacka o zbieżności monotonicznych ciągów funkcji harmonicznych (ciąg pozaskończony monotoniczny, złożony z różnych funkcji harmonicznych, musi być przeliczalny).

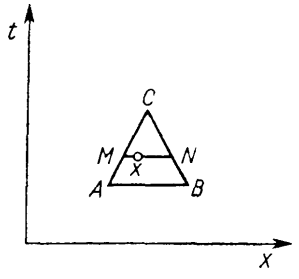
Podobnie można wykazać, że *jeżeli* $\{v_a\}$ *jest dowolną rodziną funkcji nadharmonicznych i istnieje funkcja* **podharmoniczna** *w taka, że* $w \leqslant v_a$ *dla każdego* a, *to istnieje największa funkcja* **harmoniczna** u *taka, że* $u \leqslant v_a$ *dla każdego* a.

Twierdzenia takie są słuszne również dla obszarów nieograniczonych.

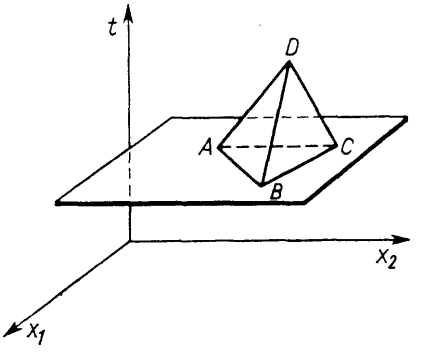
§ 2.4. Równanie przewodnictwa cieplnego. Równanie

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

opisuje temperaturę ciała jednorodnego w punkcie x i w chwili t; jest najprostszym równaniem parabolicznym i w tradycyjnym ujęciu było oddzielane od teorii równań eliptycznych. Sternberg (1929) pierwszy zwrócił uwagę na to, że zagadnienie Dirichleta, czyli pierwszy problem brzegowy, może być rozwiązywane dla równania ciepła zupełnie analogicznie. Każdy punkt $(x_1, \ldots, x_N, t) \in R^{N+1}$ posiada N współrzędnych przestrzennych oraz współrzędną czasową. Dla równania Laplace'a najprostszymi obszarami regularnymi są kule, tutaj podobną rolę odgrywają otwarte sympleksy $(N+1)$-wymiarowe, takie że ich N-wymiarowe podstawy są prostopadłe do osi czasowej, a wierzchołki przeciwległe tej podstawie mają współrzędną czasową większą od współrzędnej czasowej podstawy.



Rys. 1



Rys. 2

Rysunek 1 przedstawia sympleks tego rodzaju dla R^2 (tzn. dla jednowymiarowego równania ciepła $u''_{xx} = u'_t$), a rysunek 2 dla R^3 (tzn. dla dwuwymiarowego równania ciepła). W każdym przypadku wierzchołek sympleksu leży powyżej jego podstawy. Kierunkowość czasu związana z fizycznym znaczeniem równania odgrywa tu istotną rolę.

Dla takiego sympleksu V można wprowadzić pojęcie *miary parabolicznej* ν_x^V punktu $x \in V$ w sposób analogiczny do miary harmonicznej. Miara ν_x^V jest absolutnie ciągła względem miary powierzchniowej, zatem

$$\nu_x^V(dy) = \varphi_x(y)dy$$

i jeżeli $f \in C(\partial V)$, to funkcja

$$u(x) = \int_{\partial V} f(z)\varphi_x(z)dz$$

jest rozwiązaniem równania $\Delta u = u_t'$ w sympleksie V, ciągłym na brzegu i takim, że $u(z) = f(z)$ dla $z \in \partial V$. Funkcja φ_x zeruje się powyżej punktu x (na części MCN brzegu na rysunku 1), skąd wynika, że miary ν_x^V nie muszą być absolutnie ciągłe jedna względem drugiej.

Metoda PWB może być przeprowadzona dla równania ciepła dla dowolnego zbioru U otwartego i ograniczonego w R^{N+1} i każda funkcja ciągła na ∂U ma uogólnione rozwiązanie, które może być wyrażone za pomocą uogólnionych miar parabolicznych; rozumowania te prowadzi się analogicznie do sposobu opisanego w 2.1. Zachodzą jednak pewne istotne różnice.

Przede wszystkim obszary o bardzo prostej strukturze geometrycznej mogą nie być regularne (np. sympleksy nie są regularne, gdy odwrócimy je wierzchołkiem w dół). Twierdzenie Harnacka nie jest prawdziwe w tym samym sformułowaniu, co dla równania Laplace'a, zachodzi jednakże następujące twierdzenie:

Jeżeli $\{u_a\}$ jest rodziną filtrującą w górę rozwiązań równania $\Delta u = u_t'$ oraz funkcja $u(x, t) = \sup u_a(x, t)$ jest skończona w zbiorze gęstym, to jest skończona i ciągła wszędzie, a także jest rozwiązaniem tego równania.

Twierdzenie to umożliwia przeprowadzenie dowodu rezolutywności funkcji ciągłych przy metodzie PWB dla równania ciepła, nieraz jednak dowody komplikują się i dlatego używanie tej metody wymaga pewnej ostrożności.

§ 2.5. Aksjomatyczne ujęcie zagadnienia Dirichleta. Widzieliśmy, że metoda PWB może być stosowana nie tylko do równania Laplace'a $\Delta u = 0$, lecz również do innych równań.

Uogólnienia dotyczą nie tylko ogólniejszej klasy równań (eliptycznych lub parabolicznych), lecz idą również w innych kierunkach, np. obszary w U zastępuje się przez przestrzenie Greena. *Przestrzeń Greena* jest uogólnieniem powierzchni Riemanna typu hiperbolicznego do większej ilości wymiarów. Definicja ulega modyfikacji o tyle, że zamiast odwzorowań konforemnych dla $N = 2$ rozpatruje się izometrie dla $N \geqslant 3$ (niekoniecznie zachowujące orientację). Zastąpienie odwzorowania konforemnego przez izometrię podyktowane jest tym, że każdy homeomor-

fizm φ obszaru $V \subset R^N$ na obszar $W \subset R^N$ zachowuje laplasjan wtedy i tylko wtedy, gdy jest izometrią (patrz Gehring i Haahti [1]), natomiast na płaszczyźnie każde odwzorowanie konforemne zachowuje laplasjan.

Wynika stąd, że znalezienie prostego systemu aksjomatycznego wystarczającego na sformułowanie i rozwiązanie zagadnienia Dirichleta byłoby rzeczą pożyteczną.

Dla każdego rozpatrywanego typu równań różniczkowych wystarczyłoby sprawdzić, czy są spełnione aksjomaty i to gwarantowałoby możliwość rozwinięcia teorii bez konieczności żmudnego powtarzania wszystkich kroków.

Najbardziej rozwinięty jest system Brelota ([2], [8], [9]), który stosuje się do dość szerokiej klasy równań eliptycznych. Doob [1] podał system aksjomatyczny obejmujący również równanie ciepła, bardziej jednakże skomplikowany. Najlepszym wydaje się obecnie układ aksjomatów H. Bauera [1], który jest modyfikacją systemu Brelota i obejmuje również równanie ciepła.

Naszkicujemy tutaj główną koncepcję aksjomatyki Bauera. Dana jest przestrzeń lokalnie zwarta X oraz, dla każdego zbioru otwartego $U \subset X$, dana jest klasa $\mathscr{H}(U)$ funkcji zwanych harmonicznymi. Przyjmuje się następujące aksjomaty:

(I) *$\mathscr{H}(U)$ jest podzbiorem liniowym przestrzeni $\mathscr{C}(U)$; jeżeli U_1 jest podzbiorem otwartym zbioru U oraz $u \in \mathscr{H}(U)$, to funkcja obcięta $u \mid U_1$ należy do $\mathscr{H}(U_1)$; funkcja lokalnie harmoniczna jest harmoniczna, tzn. jeżeli dla każdego $x \in U$ istnieje otoczenie G_x tego punktu takie, że $u|G_x \in \mathscr{H}(G_x)$, to $u \in \mathscr{H}(U)$.*

(II) *Zbiory regularne stanowią bazę otoczeń w X.*

(Zbiór V nazywa się regularny, jeżeli jest otwarty, relatywnie zwarty i ma tę własność, że istnieje operator liniowy, izometryczny i izotoniczny $f \to H_f$ przeprowadzający $\mathscr{C}(\partial V)$ na $\mathscr{H}\mathscr{C}(V)$, taki że $H_f(x) = f(x)$ dla $x \in \partial V$).

Aksjomaty (I) i (II) pozwalają zdefiniować miary harmoniczne μ_x^V dla V regularnych, funkcje nadharmoniczne (dokładnie tak samo jak w § 1.4) oraz udowodnić zasadę minimum w następującej postaci: jeżeli $v \in \mathscr{H}^{\uparrow}(U)$, zbiór U jest otwarty i relatywnie zwarty i $\liminf\limits_{x \to z} v(x) \geqslant 0$ dla $z \in \partial U$, to $v \geqslant 0$.

(III) *Jeżeli $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ i $x_1 \neq x_2$, to istnieje funkcja $v \in \mathscr{H}^{\uparrow}(X)$ taka, że $v(x_1) \neq v(x_2)$.*

(IV) *Jeżeli $\{u_a\}_{a \in A}$ jest dowolną niepustą filtrującą w górę rodziną funkcji harmonicznych na U oraz*

$$u(x) = \sup\{u_a(x) \colon a \in A\} < \infty$$

dla $x \in U$, to $u \in \mathscr{H}(U)$.

Jest to znacznie osłabiona forma twierdzenia Harnacka. Komplikacja pochodzi stąd, że jeżeli u jest rozwiązaniem równania ciepła, $U \subset R^{N+1}$, $u \geqslant 0$ oraz $u(x_0) = 0$ w punkcie wewnętrznym obszaru U, to funkcja u nie musi być identycznie równa zeru.

Aksjomaty (I)-(IV) pozwalają zdefiniować uogólnione rozwiązania, udowodnić, że każda funkcja ciągła jest rezolutywna, wprowadzić miary harmoniczne dla dowolnych zbiorów otwartych relatywnie zwartych oraz (przy dodatkowym założeniu, że X jest przestrzenią metryczną ośrodkową) udowodnić twierdzenie, że rezolutywność funkcji f określonej na ∂U jest równoważna całkowalności f względem każdej miary harmonicznej μ_x^U (jakkolwiek miary harmoniczne nie muszą być wzajemnie absolutnie ciągłe). Można również wprowadzić pojęcie punktu regularnego, pojęcie wymiatania, bariery itd. (patrz rozdział III). Niektóre twierdzenia z teorii równania Laplace'a są fałszywe w tej ogólności, np. twierdzenie Evansa-Kelloga (§ 4.6) nie zachodzi dla równania ciepła.

Rzecz oczywista, że to bardzo ogólne podejście zostało okupione skomplikowaniem niektórych dowodów, które są proste, jeżeli jest się w posiadaniu silnej zasady minimum dla rozwiązań równania $\Delta u = 0$, jednakże dowody podane przez Bauera nie korzystają z żadnych głębszych środków (wykorzystuje się własności funkcji półciągłych i miar Radona na przestrzeniach lokalnie zwartych).

Literatura

§ 2.1 i § 2.2. M. Brelot [3], [4], [5]; F. Leja [1]; M. W. Kiełdysz [1]; O. Perron [1]; R. Remak [1]; N. Wiener [1], [2]. Twierdzenie Stone'a-Weierstrassa i całkę Daniella można znaleźć np. w książkach L. H. Loomis [1], M. A. Naimark [1].

§ 2.3. M. Brelot [2].

§ 2.4. J. L. Doob [3]; P. Hartman i A. Wintner [1]; M. Krzyżański [1]; I. G. Pietrowski [2]; W. Sternberg [1].

§ 2.5. H. Bauer [1]; M. Brelot [2], [8], [9], [10]; M. Brelot i G. Choquet [1]; J. L. Doob [1], [2], R. M. Hervé [1].

III. Zbiory cienkie. Wymiatanie. Punkty regularne

§ 3.1. Pojęcie zbioru cienkiego w punkcie. Zbiór $E \subset R^N$ nazywa się *cienki* (ang. *thin*, franc. *effilé*, niem. *dünn*) w punkcie y, jeżeli albo y nie jest punktem skupienia zbioru E, albo istnieje funkcja u nadharmoniczna w pewnym otoczeniu punktu y i taka, że

$$u(y) < \liminf_{x \to y,\, x \in E} u(x). \tag{3.1}$$

Aby lepiej zrozumieć tę definicję, porównajmy (1.11) i (3.1). Istnieją funkcje nadharmoniczne nieciągłe w y; dla takich funkcji mamy

$$u(y) = \liminf_{x \to y} u(x) < \limsup_{x \to y} u(x),$$

toteż jeżeli dopuścimy nie wszystkie możliwe ciągi $x_n \to y$, lecz tylko pewne z nich, należące do zbioru E, to otrzymamy ostrą nierówność (3.1); takie zbiory E nazywamy *cienkimi* w y. Jeżeli obszar U ma brzeg dostatecznie gładki, to zarówno U, jak i $R^N \setminus U$ nie są cienkie w żadnym punkcie brzegu ∂U.

Z równości (1.11) wynika, że zbiór nie może być cienki w swoim punkcie wewnętrznym. Suma dwóch zbiorów cienkich w y jest cienka w y. Każdy podzbiór zbioru cienkiego w y jest cienki w y. Dowodzi się, że jeżeli y jest punktem skupienia zbioru E, to (3.1) jest równoważne istnieniu funkcji v nadharmonicznej w otoczeniu punktu y, takiej, że

$$v(y) < \infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \to y, x \in E} v(x) = \infty.$$

Jeżeli E jest zbiorem domkniętym zawartym w obszarze ograniczonym W oraz $y \in \partial E$, to E jest cienki w y wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje funkcja nadharmoniczna i dodatnia w $W \setminus E$, dążąca do 0 przy x zmierzającym do y.

§ 3.2. Topologia Cartana. Oznaczmy przez $\mathfrak{A}$ rodzinę wszystkich zbiorów A takich, że $R^N \setminus A$ jest cienkie w każdym punkcie zbioru A. Stwierdzamy łatwo następujące fakty: 1° każdy zbiór otwarty należy do $\mathfrak{A}$, 2° suma dowolnej ilości zbiorów z $\mathfrak{A}$ należy do $\mathfrak{A}$, 3° przekrój skończonej ilości zbiorów z $\mathfrak{A}$ należy do $\mathfrak{A}$. Wynika stąd, że $\mathfrak{A}$ jest rodziną zbiorów otwartych w pewnej topologii, zwaną *topologią Cartana* (franc. *topologie fine*). Innymi słowy, otoczeniem punktu x jest dowolny zbiór A taki, że $x \in A$ oraz $R^N \setminus A$ jest cienkie w x.

Jest to topologia silniejsza od zwykłej, zarazem jest to najsłabsza topologia, w której każda funkcja nadharmoniczna jest ciągła (Cartan). Punkt y należy do domknięcia zbioru E w tej topologii wtedy i tylko wtedy, gdy E nie jest cienkie w y, a zatem z (3.1) wynika, że jest to topologia kompletnie regularna.

§ 3.3. Zbiory polarne. Zbiór E nazywa się *zbiorem polarnym* jeżeli jest cienki w każdym swoim punkcie. Dowodzi się, że zbiór E jest polarny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $x \in E$ istnieje funkcja v nadharmoniczna w pewnym otoczeniu V tego punktu i taka, że $v(y) = \infty$ dla każdego $y \in E \cap V$.

Definicja podana tu ma charakter lokalny i nie zależy od obszaru, w którym rozważamy funkcje nadharmoniczne; równoważna jest jednak analogicznej definicji globalnej. Dowodzi się mianowicie, że jeżeli E jest zbiorem polarnym i $E \subset R^N$, $N \geqslant 3$, to istnieje funkcja w nadharmoniczna na R^N i taka, że $w(x) = \infty$ dla $x \in E$; dla dowolnego ustalonego punktu $x_0 \notin E$ można dobrać funkcję w tak, że $w(x_0) < \infty$.

Zbiory polarne mają następujące własności: 1° każdy zbiór polarny jest brzegowy, 2° każdy zbiór przeliczalny jest polarny, 3° każdy pod-

zbiór zbioru polarnego jest polarny, 4° suma przeliczalnej liczby zbiorów polarnych jest zbiorem polarnym, 5° jeżeli A jest zbiorem polarnym i domkniętym, a u jest funkcją nadharmoniczną i ograniczoną z dołu na $U \setminus A$, to u ma (jednoznaczne) rozszerzenie do funkcji nadharmonicznej na U (w szczególności jeżeli u jest funkcją harmoniczną i ograniczoną na $U \setminus A$, to u ma przedłużenie do funkcji harmonicznej na U).

Zbiory polarne odgrywają w teorii potencjału rolę podobną do roli zbiorów miary zero i zbiorów pierwszej kategorii Baire'a w teorii funkcji rzeczywistych. Jeśli jakiś warunek zachodzi wszędzie z wyjątkiem pewnego zbioru polarnego, to mówimy, że zachodzi on *quasi wszędzie*.

Pokażemy jeszcze, że jeżeli A jest zbiorem polarnym, a U dowolnym obszarem ograniczonym, to zbiór $A \cap \partial U$ ma miarę harmoniczną zero. Istotnie, niech v będzie funkcją nadharmoniczną na R^N, nieujemną i taką, że $v(y) = \infty$ dla $y \in A$. Istnieje wówczas punkt x należący do U taki, że $v(x) < \infty$ i z nierówności (1.10), która jest prawdziwa nie tylko dla obszarów regularnych, ale i dla dowolnych obszarów ograniczonych, otrzymujemy nierówności

$$0 \leqslant \int_{A \cap \partial U} v(z)\, \mu_x^U(dz) \leqslant \int_{\partial U} v(z)\, \mu_x^U(dz) \leqslant v(x) < \infty,$$

skąd wynika, że $\mu_x^U(A \cap \partial U) = 0$.

Opierając się na tym można łatwo udowodnić, że każdy zbiór polarny jest miary Lebesgue'a zero.

§ 3.4. Funkcje quasi nadharmoniczne. Funkcja u nazywa się *funkcją quasi nadharmoniczną* na U jeżeli jest równa quasi wszędzie pewnej funkcji nadharmonicznej na U, która jest w tym wypadku wyznaczona jednoznacznie przez funkcję u i równa

$$\operatorname{reg} u(x) = \liminf_{y \to x} u(y) \tag{3.2}$$

dla $x \in U$. Proces przejścia od u do $\operatorname{reg} u$ nazywa się *regularyzacją dolną* funkcji u. Na przykład, funkcja w_0 zdefiniowana wzorem (1.15) jest quasi nadharmoniczna na Δ, a $\operatorname{reg} w_0 = 0$.

Bardzo ważną rolę w teorii potencjału odgrywa następujące twierdzenie Cartana:

Jeżeli $\mathfrak{F}$ jest dowolną rodziną funkcji nadharmonicznych lokalnie ograniczonych z dołu na zbiorze otwartym U, to funkcja

$$u(x) = \inf \{v(x) \colon v \in \mathfrak{F}\}$$

jest quasi nadharmoniczna na U.

Z twierdzenia tego będziemy często korzystać.

§ 3.5. Ogólne pojęcie wymiatania. Opiszemy teraz pewien bardzo ważny schemat postępowania, którego dwa przypadki szczególne (wymiatanie miary i szukanie potencjału pojemnościowego) opiszemy w rozdziale IV i V.

Załóżmy, że $U \in \mathscr{G}(R^N)$ dla $N \geqslant 3$ lub $U \in \mathscr{G}_c(R^2)$. Rozpatrzmy ustaloną funkcję v nadharmoniczną i nieujemną na U oraz ustalony zbiór E zawarty w U. Oznaczmy

$$\mathfrak{F} = \{u \in \mathscr{H}^{\uparrow}(U)\colon\ u \geqslant 0,\quad u(y) \geqslant v(y) \text{ dla } y \in E\},$$

$$R_v^E(x) = \inf\{u(x)\colon\ u \in \mathfrak{F}\}.$$

Ponieważ rodzina $\mathfrak{F}$ spełnia warunki (1.13) i (1.14) na zbiorze $U \setminus \bar{E}$, funkcja R_v^E jest harmoniczna na $U \setminus \bar{E}$. Na mocy twierdzenia Cartana (§ 3.4), R_v^E jest funkcją quasi nadharmoniczną na U, a zatem funkcja zregularyzowana

$$B_v^E(x) = \liminf_{y \to x} R_v^E(y) = \operatorname{reg} R_v^E(x)$$

jest nadharmoniczna; nazywa się ona *funkcją ekstremizowaną* funkcji v względem $U \setminus E$ lub też *funkcją wymieconą* względem zbioru E. Jest to największa funkcja nadharmoniczna spełniająca następujące warunki:

(a) $$0 \leqslant B_v^E \leqslant R_v^E \leqslant v \text{ na } U,$$

(b) B_v^E jest harmoniczna na $U \setminus \bar{E}$ oraz $B_v^E = v$ quasi wszędzie na E.

Zauważmy, że B_v^E zależy jedynie od wartości funkcji v na zbiorze E; ponadto zależy ona w sposób monotoniczny od E, tzn. $F \subset E$ pociąga $B_v^F \leqslant B_v^E$. Jeżeli $V \in \mathscr{G}_c(U)$, to

$$R_v^{U \setminus V}(x) = \begin{cases} v(x) & \text{dla} \quad x \in U \setminus V, \\ \int\limits_{\partial V} v(z)\,\mu_x^V(dz) & \text{dla} \quad x \in V; \end{cases} \tag{3.3}$$

jeżeli ponadto $V \in \mathscr{R}(U)$, to $R_v^{U \setminus V}(x) = B_v^{U \setminus V}(x)$ dla każdego $x \in U$. Wzór ten wskazuje na związek uogólnionych rozwiązań z pojęciem wymiatania; historycznie odpowiada to podejściu Poincarégo.

§ 3.6. Kryteria regularności punktów brzegowych. Punkt z leżący na brzegu ∂U zbioru $U \in \mathscr{G}_c(R^N)$ nazywa się *punktem regularnym*, jeżeli warunek

$$\lim_{x \to z,\, x \in U} H_f(x) = f(z) \tag{3.4}$$

jest spełniony dla dowolnej funkcji $f \in \mathscr{C}(\partial U)$, w przeciwnym wypadku punkt z nazywa się *punktem nieregularnym*. Tak więc zbiór U jest regular-

ny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego punkt brzegowy jest regularny. Zbiór punktów regularnych brzegu ∂U oznaczać będziemy symbolem $\partial_r U$. Z uwagi na (1.8) możemy powiedzieć, że $z \in \partial_r U$ wtedy i tylko wtedy, gdy warunek $x \to z$ pociąga zbieżność $\mu_x^U \to \delta_z$ w słabej topologii zbioru $\mathscr{M}(\partial U)$ omawianej w § 1.2. Klasyczne przykłady Zaremby i Lebesgue'a pokazują, że rozmaite ostrza mogą być nieregularne. Ponieważ badanie regularności punktów ma podstawowe znaczenie w teorii zagadnienia Dirichleta, opracowano szereg kryteriów regularności. Oto niektóre z nich.

1. *Punkt $z \in \partial U$ jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje bariera tego punktu*; *barierą* punktu $z \in \partial U$ nazywamy każdą funkcję w nadharmoniczną i dodatnią na U oraz taką, że $\lim\limits_{x \to z} w(x) = 0$. Konieczność tego warunku można wzmocnić żądając, aby funkcja ta miała ciągłe rozszerzenie na $\overline{U}$ (patrz § 4.8).

2. *Punkt $z \in \partial U$ jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy dopełnienie zbioru U nie jest cienkie w tym punkcie.*

3. *Punkt $z \in \partial U$ jest regularny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej funkcji u nadharmonicznej w pewnym zbiorze otwartym W zawierającym U zachodzi równość*

$$u(z) = B_u^{W \setminus U}(z).$$

Literatura

§ 3.1. M. Brelot [6], M. Othsuka [2].
§ 3.2. L. Naim [1].
§ 3.3. H. Bauer [2], M. Brelot [3], R. M. Hervé [1].
§ 3.4. H. Cartan [1].
§ 3.6. H. Bauer [1], M. Brelot [2], B. Epstein [1], O. D. Kellog [1].

IV. Potencjały

§ 4.1. Rozkład Riesza. W całym tym rozdziale zakładać będziemy, że U jest dowolnym obszarem w R^N przy $N \geqslant 3$ lub obszarem ograniczonym przy $N = 2$.

Funkcja v określona na U nazywa się *potencjałem*, jeżeli jest nadharmoniczna, nieujemna oraz funkcja 0 jest jej największą harmoniczną minorantą (w sensie omówionym w § 2.3), tzn. v jest potencjałem, gdy $v \in \mathscr{H}^{\uparrow}(U)$, $v \geqslant 0$ oraz warunki $u \in \mathscr{H}(U)$, $0 \leqslant u \leqslant v$ pociągają $u = 0$. W § 4.3 uzasadnimy, że jest to naturalne uogólnienie pojęcia potencjału grawitacyjnego. Z definicji tej wynika natychmiast, że jeżeli w jest nadharmoniczna, v jest potencjałem i $0 \leqslant w \leqslant v$, to w jest też potencjałem.

Z rozważań § 2.3 wynika łatwo następujące twierdzenie F. Riesza: *Jeżeli funkcja nadharmoniczna na U ma chociaż jedną harmoniczną minorantę* (w szczególności jeżeli jest ograniczona z dołu na U), *to może być przedstawiona jednoznacznie w postaci*

$$v = v_{\mathrm{har}} + v_{\mathrm{pot}}, \tag{4.1}$$

gdzie v_{har} jest funkcją harmoniczną, a v_{pot} potencjałem; v_{har} jest w tym przypadku największą harmoniczną minorantą funkcji v (²).

§ 4.2. Funkcja Greena. *Rozwiązaniem fundamentalnym* równania Laplace'a nazywamy funkcję

$$h(x) = \begin{cases} -\log|x| & \text{dla } N = 2 \text{ (potencjał logarytmiczny)}, \\ \dfrac{1}{|x|^{N-2}} & \text{dla } N \geqslant 3 \text{ (potencjał newtonowski)}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Jest to funkcja nadharmoniczna na R^N ($N \geqslant 2$) i zarazem jest to potencjał na zbiorze Δ dla $N = 2$ i na R^N dla $N \geqslant 3$ (jedynym potencjałem na R^2 jest potencjał zerowy).

Załóżmy, że y jest ustalonym punktem zbioru U. Zastosujemy twierdzenie (4.1) o rozkładzie do funkcji $h_y(x) = h(x-y)$, rozpatrywanej jako funkcja nadharmoniczna ograniczona z dołu na U. Potencjałowy składnik rozkładu $h_y = (h_y)_{\mathrm{har}} + (h_y)_{\mathrm{pot}}$, tzn. rozkładu (4.1) funkcji podstawowej przesuniętej do punktu $y \in U$, nazywa się *funkcją Greena obszaru U z biegunem w punkcie y*; oznaczana jest ona przez $G_y^U(x)$.

Załóżmy, że U jest obszarem ograniczonym i oznaczmy przez H_f uogólnione rozwiązanie przy obłożeniu (ciągłym) $f(z) = h_y(z)$ dla $z \in \partial U$. Wówczas $h_y - H_f$ jest funkcją nadharmoniczną i nieujemną na U, nadto $h_y(x) - H_f(x) \to 0$, gdy $x \to z$ ($x \in U$) oraz $z \in \partial_r U$. Można więc powiedzieć, że $h_y - H_f$ zeruje się quasi wszędzie na ∂U, skąd wynika, że $h_y - H_f$ jest potencjałem, a zatem $h_y = H_f + (h_y - H_f)$ jest rozkładem (4.1) funkcji h_y. Wynika stąd podstawowy wzór

$$G_y^U(x) = h_y(x) - \int_{\partial U} h_y(z)\,\mu_x^U(dz) = h_y(x) - F(x, y). \tag{4.3}$$

Opierając się na równości $h_y(x) = h_x(y)$ i na wzorze (4.3) można dowieść, że $G_y^U(x) = G_x^U(y)$(³); ze względu na tę symetrię używa się również zapisu $G^U(x, y)$ i mówi się o *jądrze Greena*. Literę U w dalszym ciągu będziemy opuszczać wtedy, gdy nie będzie wątpliwości jaki obszar jest

---

(²) Sformułowanie tego twierdzenia przypomina twierdzenie o rozkładzie miary na część absolutnie ciągłą i osobliwą; oba te twierdzenia są szczególnymi przypadkami ogólnych twierdzeń o rozkładach w strukturach liniowych zupełnych.

(³) $F(x, y)$ jest najmniejszą funkcją harmoniczną zmiennej x nie większą od $h(x-y)$ oraz $F(y, x) \leqslant h(x-y)$, zatem $F(x, y) \geqslant F(y, x)$.

rozważany. Jeżeli przyjąć $G_y(x) = 0$ dla $y \in \partial_r U$, to z (4.3) wynika, że G_y jest funkcją ciągłą w każdym punkcie regularnym i jest ona wspólną barierą dla wszystkich punktów z $\partial_r U$, natomiast jest nieciągła w każdym punkcie nieregularnym, tzn. dla dowolnego $y \in U$ warunek

$$\limsup_{x \to z} G^U(x, y) > 0 \tag{4.4}$$

jest warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by punkt $z \in \partial U$ był nieregularny.

Jeżeli $V \in \mathscr{G}_c(U)$, to między funkcjami Greena obu zbiorów zachodzi nierówność $G^V(x, y) \leqslant G^U(x, y)$ dla $x, y \in V$ oraz związek

$$G^V(x, y) = G^U(x, y) - \int_{\partial V} G^U(x, z)\mu_y^V(dz) \quad \text{dla} \quad x, y \in V. \tag{4.5}$$

Wynika stąd następująca reguła zamiany wskaźników

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} G^U(x, z)\mu_y^V(dz) &= G^U(x, y) - G^V(x, y) = \\ &= G^U(y, x) - G^V(y, x) = \int_{\partial V} G^U(y, z)\mu_x^V(dz) \end{aligned} \tag{4.6}$$

dla $V \in \mathscr{G}_c(U)$, $x \in V$, $y \in V$.

Udowodnimy jeszcze, że jeżeli $V \in \mathscr{G}_c(U)$, to

$$\int_{\partial V} G^U(x, z)\mu_y^V(dz) = G^U(x, y) \quad \text{dla} \quad x \in U \setminus V, \ y \in V. \tag{4.7}$$

Gdy $x \notin \overline{V}$, to funkcja G_x^U jest harmoniczna na $\overline{V}$ i (4.7) wynika z (1.6). Ustalamy teraz $x \in \partial V$ i $y \in V$, stosujemy (4.6), lemat Fatou i korzystamy z półciągłości funkcji $G_z^U(x)$. Wówczas

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} G^U(x, z)\mu_y^V(dz) &\leqslant \int_{\partial V} \liminf_{t \in V, t \to x} G^U(z, t)\mu_y^V(dz) \leqslant \\ &\leqslant \liminf_{t \in V, t \to x} \int_{\partial V} G^U(z, y)\mu_t^V(dz) \leqslant \|\mu_t^V\| \sup_{z \in \partial V} G^U(z, y) < \infty. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że funkcja G_x^U jest rezolutywna na ∂V (patrz § 2.2) i istnieje uogólnione rozwiązanie $u(t) = \int_{\partial V} G^U(z, x)\mu_t^V(dz)$ dla $t \in V$, oraz $t \to z$ pociąga $u(t) \to G_x^U(z)$ dla dowolnego $z \in \partial_r V \setminus \{x\}$; zatem $u(t) = G_x^U(t)$ dla każdego $t \in V$, w szczególności $u(y) = G_x^U(y)$.

Jeżeli $V_n \in \mathscr{G}_c(U)$, $V_n \subset V_{n+1}$ dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$, to

$$G^U(x, y) = \lim_{n \to \infty} G^{V_n}(x, y). \tag{4.8}$$

§ 4.3. Potencjały Greena. Z elektrostatycznego punktu widzenia funkcja Greena obszaru trójwymiarowego jest potencjałem ładunku punktowego umieszczonego w punkcie y przy uziemieniu brzegu obszaru U. Jeżeli natomiast potencjał jest wyznaczony przez pewien rozkład ładunków stałego znaku, to

$$u(x) = \sum G(x, y_i) q_i + \int G(x, y) \varrho_\sigma(y) \sigma(dy) + \\ + \iint G(x, y) \varrho_S(y) S(dy) + \iiint G(x, y) \varrho_\tau(y) dy,$$

gdzie poszczególne składniki odpowiadają ładunkom punktowym, rozkładowi krzywoliniowemu o gęstości ϱ_σ, rozkładowi powierzchniowemu o gęstości ϱ_S oraz rozkładowi przestrzennemu o gęstości ϱ_τ. Z matematycznego punktu widzenia *ładunek jest miarą Radona*, podobnie jak masa jest nieujemną miarą Radona, jest to bowiem niewątpliwie funkcja zbioru, a przeliczalna addytywność jest postulatem zgodnym z faktami doświadczalnymi. Traktowanie takie obejmuje w sposób jednolity i elegancki wymienione powyżej miary, jakkolwiek pewne miary (np. miary osobliwe konstruowane za pomocą zbioru Cantora) mogą nie mieć interpretacji fizycznej. Należy tu podkreślić, że ujęcie to nie obejmuje potencjałów dipolowych, takich jak potencjał warstwy podwójnej, których wyjaśnienie wymaga teorii dystrybucji.

W dalszym ciągu przez *masę* rozumieć będziemy dowolną nieujemną miarę Radona μ na obszarze U (zgodnie z umową przyjętą w § 1.2, masa może przyjmować wartości nieskończone). Zakładać będziemy ponadto, że w rozpatrywanym obszarze istnieje funkcja Greena $G(x, y)$. Wyrażenie

$$v(x) = G_\mu(x) = \int_U G(x, y) \mu(dy) \tag{4.9}$$

nazywa się *potencjałem Greena masy* μ na obszarze U. Jeżeli masa μ jest skoncentrowana na pewnym zbiorze zwartym zawartym w U, to G_μ jest funkcją nadharmoniczną i należy do najmniejszego domkniętego ideału strukturowego zawierającego funkcje G_y ($y \in U$), a więc jest potencjałem w sensie definicji z § 4.1 (można to pokazać stosując twierdzenia o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki). Jeżeli masa μ nie jest skoncentrowana na pewnym podzbiorze zwartym obszaru U, to przedstawiamy U w postaci $U = \bigcup_n F_n$, gdzie F_n są zbiorami zwartymi. Wówczas

$$G_\mu(x) = \lim_{n\to\infty} G_{\mu_n}(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{F_n} G(x, y) \mu(dy),$$

gdzie $\mu_n(E) = \mu(E \cap F_n)$. W ten sposób przedstawiamy G_μ jako granicę rosnącego ciągu potencjałów, skąd wynika, że G_μ jest również potencjałem, o ile tylko $G_\mu(x) < \infty$ chociaż w jednym punkcie $x \in U$. W ten sposób

wzór (4.9) przyporządkowuje pewnym masom potencjały. Odwrotne twierdzenie jest również prawdziwe, mianowicie *każdy potencjał jest potencjałem Greena pewnej masy μ i masa ta jest wyznaczona jednoznacznie przez swój potencjał.*

Głębokie to twierdzenie pochodzi od F. Riesza, a jego najelegantszy i najnaturalniejszy dowód daje teoria dystrybucji. Poniżej naszkicujemy dowód tego twierdzenia uwypuklając stronę rachunkową, a pomijając szereg trudności technicznych.

Punktem wyjścia jest uwaga, że jeżeli v jest funkcją o ciągłych drugich pochodnych cząstkowych, to warunek

$$\Delta v \leqslant 0 \tag{4.10}$$

jest konieczny i dostateczny na to, by v była funkcją nadharmoniczną. Jeżeli v jest funkcją nieróżniczkowalną, to można rozpatrywać Δv jako dystrybucję; głównym punktem dowodu twierdzenia Riesza jest pokazanie, że dla dowolnej funkcji nadharmonicznej spełniona jest dystrybucyjna nierówność (4.10) oraz że każda dystrybucja spełniająca warunek (4.10) jest równoważna funkcji nadharmonicznej.

Pierwszym krokiem dowodu twierdzenia Riesza jest więc dowód nierówności $\Delta v \leqslant 0$ dla $v \in \mathscr{H}^{\uparrow}(U)$; dowodzi się jej aproksymując lokalnie funkcję v funkcjami nadharmonicznymi nieskończenie różniczkowalnymi (za pomocą splotu z funkcjami nieskończenie różniczkowalnymi aproksymującymi funkcję Diraca). Korzysta się następnie ze znanego w teorii dystrybucji faktu, że dystrybucje nieujemne są miarami Radona. Oznacza to, że $-\Delta v$ jest pewną masą.

Najprostszy przypadek mamy wówczas, gdy v jest funkcją Greena z biegunem w punkcie y; można łatwo wykazać że laplasjan funkcji Greena jest miarą atomową skoncentrowaną w biegunie, a mianowicie

$$\Delta_x G_y(x) = -\tilde{\omega}_N \delta_y \tag{4.11}$$

gdzie $-\tilde{\omega}_N$ jest strumieniem rozwiązania fundamentalnego (4.2), tzn.

$$\tilde{\omega}_N = -\int_S \frac{\partial h}{\partial n}\, d\sigma = \begin{cases} 2\pi & \text{dla} \quad N = 2, \\ (N-2)\omega_N & \text{dla} \quad N \geqslant 3, \end{cases} \tag{4.12}$$

gdzie ω_N oznacza powierzchnię sfery jednostkowej S w R^N daną wzorem (1.5). Ujęcie takie pozwala zdefiniować funkcję Greena $G_y(x)$ jako najmniejszą nieujemną funkcję nadharmoniczną spełniającą równanie $\Delta v = -\tilde{\omega}_N \delta_y$.

Z drugiej strony wiemy, że funkcja Greena G_y jest potencjałem Greena miary δ_y; można więc oczekiwać, że masa μ, o której mówi twierdzenie Riesza, jest proporcjonalna do masy $-\Delta v$ i że współczynnikiem proporcjonalności jest stała $\tilde{\omega}_N$. Definiujemy więc masę μ wzorem

$$\Delta v = -\tilde{\omega}_N \mu. \tag{4.13}$$

Zauważmy tutaj, że podstawiając $N = 3$, $U = R^3$ dostajemy $\Delta v = -4\pi\mu$, co jest dystrybucyjną formą równania Poissona dotyczącego związku potencjału z ładunkiem.

Pozostaje do wykazania, że masa μ określona wzorem (4.13) ma żądane własności, tzn. że $v = G_\mu$. Załóżmy dla uproszczenia, że $N \geqslant 3$ oraz $U = R^N$; wówczas $G_y(x) = h(x-y)$ i wzór (4.9) można zapisać za pomocą splotu

$$G_\mu(x) = \int_{R^N} h(x-y)\mu(dy) = (h*\mu)(x). \tag{4.14}$$

Ponieważ miara Diraca δ skoncentrowana w zerze jest jednością w algebrze splotowej, możemy przeprowadzić formalny rachunek

$$\Delta v = \delta*\Delta v = \left(-\frac{1}{\tilde{\omega}_N}\Delta h\right)*\Delta v = \Delta h*\mu = \Delta(h*\mu) = \Delta G_\mu,$$

skąd $\Delta(v-G_\mu) = 0$. Dowodzi się teraz, że jeżeli funkcja $v-G_\mu$ ma dystrybucyjny laplasjan równy 0, to $v-G_\mu$ jest funkcją harmoniczną, skąd już łatwo wynika równość $v = G_\mu$.

Zbierając poprzednie rozważania możemy twierdzenie Riesza wypowiedzieć w następującej formie: *istnieje jedno-jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy potencjałami na zbiorze U a tymi miarami Radona określonymi na U, dla których $G_\mu \not\equiv \infty$.* Odpowiedniość ta dana jest wzorami (4.9) i (4.13). Jednoznaczności masy μ dowodzi się podobnie, mianowicie jeśli $G_\mu = G_\nu$, to

$$-\tilde{\omega}_N\mu = -\tilde{\omega}_N\delta*\mu = \Delta h*\mu = \Delta G_\mu = \Delta G_\nu = -\tilde{\omega}_N\nu.$$

Z równości (4.13) wynika, że *dopełnienie nośnika miary μ jest największym zbiorem otwartym, na którym G_μ jest funkcją harmoniczną.*

Rozwiązania fundamentalne równania Laplace'a w R^N określone są z dokładnością do czynnika stałego. Zazwyczaj określa się je wzorem (4.2), gdzie wspomniany czynnik jest równy 1. Bardziej naturalny dobór tego czynnika stałego podyktowany jest wzorem (4.11) i niektórzy autorzy (np. Courant i Hilbert [1]) przyjmują, że funkcja Greena równa jest funkcji G określonej powyżej podzielonej przez $\tilde{\omega}_N$, skąd wynika, że jej laplasjan jest równy dokładnie $-\delta_y$. Dyskutując teorię potencjału z punktu widzenia procesów Markowa i półgrup operatorów (Dynkin [2], str. 584 i 587) przyjmuje się, że funkcja Greena równa jest $(2/\tilde{\omega}_N)G(x, y)$; ale jednocześnie operator Laplace'a Δ zastępuje się przez $\frac{1}{2}\Delta$.

Należy zwrócić uwagę na jeszcze jeden szczegół: określenie „dystrybucja jest miarą" rozumieliśmy w sensie Schwartza [1], mianowicie dystrybucja T będąca funkcjonałem T: $D \to R$ jest identyfikowana z miarą μ, jeżeli $T(\varphi) = \int\varphi(x)\mu(dx)$ dla $\varphi \in D$. Natomiast Gelfand i Szyłow [1] oraz Dynkin [2] rozumieją zdanie „dystrybucja jest miarą"

w innym sensie, np. w ich ujęciu dystrybucja Diraca nie jest miarą, lecz pochodną miary, co lepiej odpowiada klasycznemu ujęciu równania Poissona.

§ 4.4. Potencjały ograniczone a zbiory polarne. Chociaż potencjał pojedynczego ładunku jest funkcją nieograniczoną, to potencjał ładunku rozłożonego powierzchniowo może być ograniczony.

W wielu rozważaniach korzysta się z następującego twierdzenia:

Jeżeli ν jest nieujemną miarą Radona na U i potencjał G_ν jest ograniczony na U, to ν znika na każdym zbiorze polarnym.

Istotnie, załóżmy, że E jest zbiorem polarnym oraz $G_\nu(x) \leqslant M$ dla $x \in U$. Istnieje wówczas miara Radona μ na U taka, że $G_\mu(x) = \infty$ dla $x \in E$ (patrz § 3.3 i § 4.1). Załóżmy najpierw, że $\mu(U) < \infty$. Oznaczmy

$$A_a = \{x \in U\colon G_\mu(x) > a\},$$

gdzie $a > 0$. Wówczas A_a jest zbiorem otwartym i $E \subset A_a$, skąd

$$0 \leqslant \nu(E) \leqslant \nu(A_a) \leqslant \frac{1}{a}\int_{A_a} G_\mu d\nu \leqslant \frac{1}{a}\int_U G_\mu d\nu$$

$$= \frac{1}{a}\int_U G_\nu d\mu \leqslant \frac{M\mu(U)}{a}.$$

Przechodząc do granicy przy $a \to \infty$ otrzymujemy $\nu(E) = 0$. Założenie $\mu(U) < \infty$ można ominąć rozbijając odpowiednio zbiór E na sumę $\bigcup E_n$ i rozbijając odpowiadające potencjały.

§ 4.5. Wymiatanie masy. Jeżeli $v = G_\mu$ jest potencjałem na U oraz $E \subset U$, to funkcja wymiecona B_v^E (patrz § 2.5) jest potencjałem, jest bowiem nadharmoniczna i $0 \leqslant B_v^E \leqslant v$. Wynika stąd, że $B_v^E = G_{\mu'}$ dla pewnej miary μ' skoncentrowanej na $\bar{E}$. Mówimy, że miara μ' powstaje przez *wymiecenie* (franc. *balayage*) miary μ względem zbioru E.

Załóżmy, że $V \in \mathscr{G}_c(U)$ oraz że ν jest miarą Radona na U. Oznaczmy przez ν' miarę powstałą przez wymiecenie miary ν względem $U \setminus V$. Wówczas

$$(4.15)\qquad G_{\nu'}^U(x) \overset{\mathrm{df}}{=} B_{G_\nu^U}^{U\setminus V}(x) = \int_{\partial V} G(x,z)\int_V \mu_y^V(dz)\nu(dy) + \int_{U\setminus V} G(x,y)\nu(dy).$$

Mianowicie, jeżeli $x \in V$, to korzystamy z (3.3), (4.6) i przestawiamy kolejność całkowania, jeżeli $x \in U \setminus V$, korzystamy z (4.7).

Z wzoru (4.15) wynikają ważne wnioski:

Miara ν' jest postaci $\nu'(A) = \nu_0'(A) + \nu(A \setminus V)$, gdzie ν_0' jest skoncentrowana na ∂V i absolutnie ciągła względem miar harmonicznych, nadto

$$(4.16)\qquad \nu'(A) = \int_V \mu_t^V(A)\nu(dt) + \nu(A \setminus V).$$

Ten ostatni wzór wynika z (4.15) oraz z tego, że jeżeli $G_{\mu_1} = G_{\mu_2}$, to $\mu_1 = \mu_2$ (jednoznaczność reprezentacji Riesza, § 4.3). Zauważamy, że ν_0' nie zależy od U; ta niezmienniczość pojęcia wymiatania jest istotna w wielu rozważaniach. Możemy zatem przyjąć, że $U = R^N$ dla $N \geqslant 3$ oraz $U = \{x \in R^2\colon |x-y| < r\}$ dla $N = 2$. Z drugiej strony jednak, masa umieszczona poza V nie ulega zmianie przy wymiataniu.

Szczególnie ważny wniosek otrzymujemy podstawiając $\nu = \delta_y$ we wzorze (4.16), mianowicie:

Miara harmoniczna μ_y^V powstaje przez wymiecenie miary Diraca względem zbioru $U \setminus V$, tzn. $\delta_y' = \mu_y^V$ dla $y \in V$.

Jest to rozwinięcie idei Poincarégo; w interpretacji fizycznej równość $\delta_y' = \mu_y^V$ oznacza, że ładunek rozłożony na powierzchni ∂V w taki sposób jak miara harmoniczna μ_y^V daje potencjał na $U \setminus V$ taki sam, jak ładunek punktowy umieszczony w punkcie y.

Ze wzoru (4.16) wynika również, że całkowita wielkość ładunku zostaje zachowana przy wymiataniu, tzn. $\nu(V) = \nu_0'(\partial V)$.

Najprostszy przykład wymiatania otrzymujemy rozpatrując funkcję

$$\varphi_s(x) = \min[h(x), s],$$

która powstaje przez obcięcie rozwiązania podstawowego (4.2) na wysokości s, gdzie s jest pewną liczbą dodatnią. Jest to potencjał masy równomiernie rozłożonej na powierzchni kuli $h(x) = s$, tzn. masy powstałej przez wymiecenie miary Diraca δ_0 ze środka na powierzchnię kuli.

Metoda wymiatania pozwala zdefiniować miary harmoniczne dla dowolnego obszaru ograniczonego, a tym samym, za pomocą wzoru (1.4), pozwala zdefiniować uogólnione rozwiązania.

§ 4.6. Twierdzenie Evansa-Kelloga. Z porównania wzorów (3.3), (4.3) i (4.4) wynika, że jeżeli $W = R^N$ i $N \geqslant 3$ lub $W = \Delta$ i $N = 2$ oraz $U \in \mathscr{G}_c(W)$, to dla $y \in U$

$$(4.17)\qquad h_y(x) - B_{h_y}^{W \setminus U}(x) = \begin{cases} G_y^U(x) & \text{dla} \quad x \in U, \\ 0 & \text{dla} \quad x \in W \setminus U \text{ oraz } x \in \partial_r U, \\ \neq 0 & \text{dla} \quad x \in \partial U \setminus \partial_r U. \end{cases}$$

Funkcja ta jest podharmoniczna na $W \setminus \{y\}$ (jakkolwiek nie jest ani nadharmoniczna, ani podharmoniczna na W). Wynika stąd, że

$$(4.18)\qquad \partial U \setminus \partial_r U = \{z\colon B_{h_y}^{W \setminus U}(z) < R_{h_y}^{W \setminus U}(z)\},$$

a zatem rozważania z § 3.3 i § 3.5 prowadzą do bardzo ważnego twierdzenia Evansa i Kelloga:

Zbiór punktów nieregularnych brzegu dowolnego obszaru ograniczonego jest zbiorem polarnym, a zatem $\partial U \setminus \partial_r U$ jest zbiorem o mierze harmonicznej zero.

Wynika stąd w szczególności, że we wzorze (1.4) wystarczy całkować po zbiorze $\partial_r U$.

§ 4.7. Ciągłość potencjału na nośniku miary. Wśród wielu twierdzeń o potencjałach Greena jednym z najważniejszych jest następujące twierdzenie Evansa i Vasilesco (1933).

Załóżmy, że μ jest miarą Radona o zwartym nośniku K, $K \subset U$ oraz załóżmy, że funkcja powstająca przez obcięcie potencjału G_μ do zbioru K, tzn. funkcja

$$y(x) = \int_K G^U(x, y)\mu(dy), \qquad x \in K,$$

jest ciągła na K. Wówczas potencjał G_μ jest ciągły na U.

Zauważmy, że G_μ jest funkcją harmoniczną na $U \setminus K$, zatem w twierdzeniu chodzi o to, że w tym przypadku warunki $x \to y$, $x \in U \setminus K$, $y \in K$ pociągają $G_\mu(x) \to G_\mu(y)$.

§ 4.8. Twierdzenie Kiełdysza o punktach regularnych. Kiełdysz (1941) podał dowód następującego ważnego twierdzenia:

Jeżeli z_0 jest punktem regularnym brzegu obszaru ograniczonego $U \subset R^N$, to istnieje funkcja u harmoniczna na U, ciągła na $\overline{U}$ i taka, że $u(z_0) = 0$ oraz $u(z) > 0$ dla $z \in \overline{U} \setminus \{z_0\}$.

Twierdzenie to oczywiście charakteryzuje punkty regularne, gdyż taka funkcja u jest barierą punktu z_0. Oryginalny dowód Kiełdysza używa silnych środków analitycznych. Brelot [3] podał prosty i naturalny dowód tego twierdzenia oparty na własnościach potencjałów. Poniżej podajemy ten dowód w nieco zmodyfikowanej formie. Składa się on z następujących dwóch lematów.

LEMAT 1. *Jeżeli z_0 jest dowolnym punktem przestrzeni metrycznej zwartej X, a H jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni $\mathscr{C}(X)$ taką, że dla dowolnego otoczenia W punktu z_0 i dowolnych liczb $\alpha > \beta > \gamma > 0$ istnieje funkcja $f \in H$ taka, że $0 \leqslant f(x) \leqslant \alpha$ dla $x \in X$, $f(z_0) > \beta$ i $f(x) < \gamma$ dla $x \in X \setminus W$, to istnieje $f_0 \in H$ takie, że $f_0(z_0) = 1$ oraz $0 \leqslant f_0(x) < 1$ dla $x \in X$, $x \neq z_0$.*

LEMAT 2. *Załóżmy, że $z_0 \in \partial_r U$, $V = \{x \in R^N\colon |x - z_0| < \varrho\}$, $\overline{U} \subset V$, $W \in \mathscr{R}(V)$, $z_0 \in W$, $\alpha > \beta > \gamma > 0$. Wówczas istnieje funkcja w ciągła na $\overline{V}$, nadharmoniczna na V, harmoniczna na U i taka, że $0 \leqslant w(x) \leqslant \alpha$ dla $x \in \overline{V}$, $w(x) \leqslant \gamma$ dla $x \in V \setminus W$ oraz $w(z_0) > \beta$.*

Dowód lematu 1 jest łatwy, natomiast dowód lematu 2 jest bardzo pomysłowy i w ładny sposób stosuje pojęcie wymiatania, dlatego podamy go ze szczegółami.

Oznaczmy $u_\lambda(x) = \lambda G^V(x, z_0)$, gdzie λ jest stałą dodatnią i tak małą, że $u_\lambda(x) < \gamma$ dla $x \in V \setminus W$; funkcja u_λ może być przedstawiona w postaci $\lambda h(x - z_0) + c$, gdzie h jest rozwiązaniem fundamentalnym (4.2),

a c jest odpowiednią stałą. Oznaczamy przez W_0 kulę, w której $u_\lambda(z) > \alpha$. Dokonujemy teraz dwukrotnego wymiatania: pierwszy raz wymiatamy u_λ względem $V \setminus W_0$ (oznacza to ucięcie wykresu funkcji na wysokości α), drugi raz wymiatamy funkcję otrzymaną w pierwszym wymieceniu względem zbioru $V \setminus U$. Za pomocą symboli zapisujemy to następująco:

$$v_1(x) = \begin{cases} u_\lambda(x) & \text{dla} \quad x \in \overline{V} \setminus W_0, \\ \alpha & \text{dla} \quad x \in W_0, \end{cases}$$

$$v_2(x) = \begin{cases} v_1(x) & \text{dla} \quad x \in \overline{V} \setminus U, \\ \int\limits_{\partial U} v_1(y) \mu_x^U(dy) & \text{dla} \quad x \in U, \end{cases}$$

oraz $v_3(x) = \liminf\limits_{y \to x} v_2(y)$ dla $x \in \overline{V}$. Oczywiście $v_3(z_0) = \alpha$, $0 \leqslant v_3(x) \leqslant \alpha$ dla $x \in \overline{V}$, $v_3(x) < \gamma$ dla $x \in \overline{V} \setminus W$, oraz $v_3(x) = 0$ dla $x \in \partial V$. Na mocy (4.16), v_3 jest potencjałem Greena pewnej miary ν skoncentrowanej na $\partial U \cup \partial W_0$.

Ponieważ $v_3(z_0) = \int G^V(z_0, y)\nu(dy) < \infty$, istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$(4.19) \qquad \nu(E) < \delta \quad \text{pociąga} \quad \int\limits_E G^V(z_0, y)\nu(dy) < \alpha - \beta.$$

Na mocy rozważań § 4.5 i § 4.6 miara ν znika na $\partial U \setminus \partial_r U$, istnieje zatem zbiór otwarty A taki, że $\partial U \setminus \partial_r U \subset A$, $z_0 \notin A$, $\overline{A} \subset V$ oraz $\nu(A) < \delta$. Oznaczmy

$$v_4(x) = \int\limits_{V \setminus A} G^V(x, y)\nu(dy) = \int\limits_V G^V(x, y)\lambda_1(dy),$$

$$v_5(x) = \int\limits_A G^V(x, y)\nu(dy) = \int\limits_V G^V(x, y)\lambda_2(dy),$$

gdzie $\lambda_1(B) = \nu(B \setminus A)$, $\lambda_2(B) = \nu(A \cap B)$. Jedynymi punktami nieciągłości funkcji v_3 mogą być punkty nieregularne brzegu ∂U, zatem funkcja obcięta $v_3 | V \setminus A$ jest ciągła (na $V \setminus A$). Ponieważ $v_3 = v_4 + v_5$ i funkcje v_4 i v_5 są półciągłe z dołu (jako potencjały), funkcja $v_4 | V \setminus A$ jest ciągła na $V \setminus A$. Ponieważ miara λ_1 jest skoncentrowana na $V \setminus A$, na mocy twierdzenia Evansa i Vasilesco (§ 4.7) wnioskujemy, że v_4 jest funkcją ciągłą na V. Nadto $0 \leqslant v_4(x) \leqslant v_3(x) \leqslant \alpha$ dla $x \in V$, $v_4(x) = 0$ dla $x \in \partial V$ (wynika stąd ciągłość na $\overline{V}$), $v_4(x) < \gamma$ dla $x \in \overline{V} \setminus W$; z (4.19) wynika, że $\beta < \alpha - v_5(z_0) = v_3(z_0) - v_5(z_0) = v_4(z_0)$, zatem funkcja $w = v_4$ ma żądane własności.

§ 4.9. Związek funkcji Greena z rozwiązaniami fundamentalnymi równania ciepła. Używając metod probabilistycznych Hunt [1] udowodnił następujące głębokie twierdzenie:

Niech $U \in \mathcal{G}(R^N)$, $N \geqslant 3$. *Istnieje funkcja* $p_t(x, y)$ *określona dla* $x \in U$, $y \in U$, $t > 0$, *ciągła ze względu na każdą z tych zmiennych z osobna, taka, że* $p_t(x, y)$ *jest, przy każdym ustalonym* $y \in U$, *rozwiązaniem fundamentalnym równania ciepła*

$$\frac{\partial p_t(x, y)}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta_x p_t(x, y) \tag{4.20}$$

na obszarze $U \times (0, \infty)$, *i spełniająca ponadto następujące warunki*:

$$p_t(x, y) = p_t(y, x) \quad \textit{dla} \quad x \in U,\ y \in U,\ t > 0, \tag{4.21}$$

$$G^U(x, y) = \tfrac{1}{2}\tilde{\omega}_N \int_0^\infty p_t(x, y)\,dt \quad \textit{dla} \quad x \in U,\ y \in U, \tag{4.22}$$

gdzie stała $\tilde{\omega}_N$ *dana jest wzorem* (4.12),

$$\int_U p_t(x, y)\,dx \leqslant 1 \quad \textit{dla} \quad y \in U,\ t > 0, \tag{4.23}$$

$$\int_U p_t(x, z) p_s(z, y)\,dz = p_{t+s}(x, y) \quad \textit{dla} \quad x, y \in U,\ s > 0,\ t > 0. \tag{4.24}$$

Dla obszarów dostatecznie gładkich $p_t(x, y)$ *jest ciągła ze względu na trzy zmienne jednocześnie.*

§ 4.10. Uogólnienia teorii potencjału. Uogólnienia te można prowadzić w dwóch kierunkach, zależnie od tego, którą z dwóch równoważnych definicji potencjału przyjmuje się za punkt wyjścia.

Możemy przyjąć formalną definicję potencjału z § 4.1 i udowodnić twierdzenie o rozkładzie; do tego potrzebne jest twierdzenie o zupełności strukturowej przestrzeni rozwiązań (warunek ten spełniony jest dla dość znacznej klasy równań cząstkowych, obejmującej równanie przewodnictwa cieplnego, patrz § 2.5).

Przy drugim ujęciu rozpatrujemy przestrzeń lokalnie zwartą U i pewne ustalone jądro $\Phi(x, y)$ określone na $U \times U$, półciągłe z dołu i spełniające nierówność $-\infty < \Phi(x, y) \leqslant \infty$. Potencjał miary $\mu \geqslant 0$ określamy wzorem

$$\Phi_\mu(x) = \int_U \Phi(x, y)\,\mu(dy).$$

Zbiór $\{x\colon \int \Phi_+(x, y)\,\mu(dy) < \infty,\ \int \Phi_-(x, y)\,\mu(dy) < \infty\}$ nazywa się *dziedziną potencjału* Φ_μ. Głównym zagadnieniem jest badanie warunków, jakie musi spełniać jądro Φ, aby pewne twierdzenia o potencjałach Greena, jak dodatniość formy kwadratowej

$$(\mu, \mu)_\Phi = \iint_{UU} \Phi(x, y)\,\mu(dx)\,\mu(dy),$$

zasada wymiatania, zasada równowagi itd., były słuszne również w tym przypadku.

Własności te formułuje się w formie pewnych postulatów (często w różnych wariantach); okazuje się, że zachodzą między nimi różne implikacje.

Po dokonaniu takiej analizy wybiera się pewne z tych własności i przyjmuje się je za aksjomaty ogólnej teorii potencjału. Zaletą tego rodzaju ogólnych teorii jest możliwość stosowania ich do rozmaitych typów równań różniczkowych, o ile tylko spełnione są wyjściowe aksjomaty.

Literatura

§ 4.1. H. Bauer [2], M. Brelot [2].
§ 4.2. L. V. Ahlfors i L. Sario [1], M. Brelot i G. Choquet [1], E. B. Dynkin [2], O. D. Kellog [1].
§ 4.3. O. Frostman [1], T. Rado [1], F. Riesz [1], L. Schwartz [1], [2].
§ 4.5. H. Cartan [2], B. Epstein [1], M. Kac [1], Ch.-J. de la Vallée Poussin [1].
§ 4.6. M. Brelot [7].
§ 4.7. F. Vasilesco [2].
§ 4.8. M. Brelot [3], M. W. Kieldysz [1].
§ 4.9. E. B. Dynkin [2], rozdz. XIV, G. A. Hunt [1].
§ 4.10. H. Bauer [2], M. Brelot [2], B. Fuglede [1], R. M. Hervé [1], M. Ohtsuka [1].

V. Energia i pojemność

§ 5.1. Uwagi wstępne. Wiadomo z elektrostatyki, że jeżeli q jest wielkością ładunku punktowego w punkcie x pola o potencjale v, to energia wyraża się wzorem $qv(x)$. Jeżeli ν jest miarą nieujemną wyznaczającą rozkład ładunku w polu o potencjale G_μ, to energia równa jest $\int G_\mu d\nu$. Ten sam wzór przyjmujemy dla $\mu = \nu$, choć doświadczalne zrealizowanie takiej energii może nie być możliwe.

Zanim wprowadzimy formalną definicję pojemności, rozpatrzymy następujący przykład. Załóżmy, że U jest obszarem regularnym w R^3, V jest podobszarem regularnym i takim, że zbiór $U \setminus \overline{V}$ jest też regularny; załóżmy dalej, że $\overline{V}$ jest przewodnikiem, $U \setminus \overline{V}$ izolatorem o stałej dielektrycznej 1, brzeg ∂U jest uziemiony (potencjał równy zero), a μ jest pewnym ładunkiem dodatnim rozmieszczonym na $\overline{V}$ w taki sposób, że układ znajduje się w stanie równowagi. Potencjał $v = G_\mu$ tego ładunku nazywamy *potencjałem pojemnościowym*.

Ładunek μ nie może być rozmieszczony dowolnie, bowiem potencjał pojemnościowy musi mieć stałą wartość v_0 na przewodniku $\overline{V}$. Ponieważ $\Delta v = 0$ na V, cały ładunek skoncentrowany jest na brzegu ∂V przewodnika. Nadto v jest funkcją harmoniczną na $U \setminus \overline{V}$ i jest rozwiązaniem

zagadnienia Dirichleta przy obłożeniu $v(z) = 0$ dla $z \in \partial U$ oraz $v(z) = v_0$ dla $z \in \partial V$. Innymi słowy, potencjał pojemnościowy powstaje przez wymiecenie funkcji nadharmonicznej $v_0 = \text{const}$ względem zbioru V.

Zgodnie z elektrostatyczną definicją określamy *pojemność* zbioru $\bar{V}$ wzorem

$$\varkappa(\bar{V}) = \frac{\mu(\bar{V})}{v_0}. \tag{5.1}$$

Jest to funkcja zbioru; zależy ona nie tylko od V, ale też i od U, jest to bowiem w istocie pojemność kondensatora o okładkach ∂U, ∂V. Ponieważ całkowity ładunek $\mu(\bar{V}) = \mu(\partial V) = \|\mu\|$ jest proporcjonalny do potencjału przewodnika v_0, możemy przyjąć $v_0 = 1$.

Z rozważań tych wynika, że aby znaleźć pojemność, należy dokonać wymiecenia funkcji identycznie równej 1 względem rozpatrywanego zbioru i całkowity ładunek odpowiadający otrzymanemu potencjałowi równy jest pojemności.

Rozpatrzmy teraz inny przypadek, w pewnym sensie przeciwstawny. Ile wynosi pojemność zbioru jednopunktowego? Oprzemy się na wzorze (5.1); ponieważ potencjał ładunku punktowego jest nieskończony w tym punkcie, formalne podstawienie $v_0 = \infty$ prowadzi do wniosku, że pojemność zbioru jednopunktowego wynosi 0.

§ 5.2. Pojęcie energii. Załóżmy, że $U \in \mathcal{G}(R^N)$ i $N \geqslant 3$. Jeżeli μ i ν są masami na U, to wyrażenie

$$\begin{aligned}(\mu, \nu) = (\nu, \mu) &= \iint_{UU} G^U(x, y)\mu(dx)\nu(dy) = \\ &= \int_U G_\nu(x)\mu(dx) = \int_U G_\mu(x)\nu(dx)\end{aligned} \tag{5.2}$$

nazywa się *energią wzajemną układu mas* μ i ν, a wyrażenie

$$(\mu, \mu) = \iint_{UU} G(x, y)\mu(dx)\mu(dy) = \int_U G_\mu(x)\mu(dx) \tag{5.3}$$

nazywa się *energią masy* μ.

Równość $(\mu, \nu) = (\nu, \mu)$, która jest bezpośrednią konsekwencją symetryczności funkcji Greena, nazywa się *zasadą wzajemności*; zamiana całki $\int G_\mu d\nu$ na $\int G_\nu d\mu$ jest typowym chwytem w dowodach. Dla przykładu udowodnimy, że

$$\textit{jeżeli } G_\mu(x) \leqslant G_\nu(x) \textit{ dla } x \in U, \textit{ to } (\mu, \mu) \leqslant (\nu, \nu). \tag{5.4}$$

Istotnie,

$$(\mu, \mu) = \int_U G_\mu d\mu \leqslant \int_U G_\nu d\mu = \int_U G_\mu d\nu \leqslant \int_U G_\nu d\nu = (\nu, \nu).$$

Dla miar Diraca mamy oczywistą równość

$$(\delta_x, \delta_y) = G^U(x, y), \tag{5.5}$$

w szczególności $(\delta_x, \delta_x) = \infty$, tzn. miara Diraca ma nieskończoną energię.

Oznaczmy $\|\mu\|_2 = \sqrt{(\mu, \mu)}$ oraz $\mathscr{E}^+ = \{\mu\colon \mu \geqslant 0, \|\mu\|_2 < \infty\}$. Dla dowolnych $\mu, \nu \in \mathscr{E}^+$ zachodzi nierówność

$$(\mu, \nu) \leqslant \|\mu\|_2 \|\nu\|_2. \tag{5.6}$$

Dowód tej nierówności oprzemy na wzorach (4.22) i (4.24). Mianowicie

$$\begin{aligned}
(\mu, \nu) &= \frac{\tilde{\omega}_N}{2} \int_{t=0}^{\infty} \int_U \int_U p_t(x, y)\mu(dx)\nu(dy)dt = \\
&= \frac{\tilde{\omega}_N}{2} \int_0^{\infty} \int_U \int_U \int_U p_{t/2}(x, z)p_{t/2}(y, z)\mu(dx)\nu(dy)dz\,dt = \\
&= \frac{\tilde{\omega}_N}{2} \int_0^{\infty} \int_U \Big[\int_U p_{t/2}(x, z)\mu(dx)\Big]\Big[\int_U p_{t/2}(y, z)\nu(dy)\Big]dz\,dt = \\
&\leqslant \left\{\frac{\tilde{\omega}_N}{2} \int_0^{\infty} \int_U \Big[\int_U p_{t/2}(x, z)\mu(dx)\Big]^2 dz\,dt\right\}^{1/2} \times \\
&\qquad \times \left\{\frac{\tilde{\omega}_N}{2} \int_0^{\infty} \int_U \Big[\int_U p_{t/2}(y, z)\nu(dy)\Big]^2 dz\,dt\right\}^{1/2} = \|\mu\|_2 \|\nu\|_2.
\end{aligned}$$

Oznaczmy $\mathscr{E} = \{\mu\colon \mu_+ \in \mathscr{E}^+, \mu_- \in \mathscr{E}^+\}$. Jeżeli $\mu \in \mathscr{E}$ i $\nu \in \mathscr{E}$, to na mocy (5.6) wyrażenie

$$(\mu, \nu) = (\mu_+, \nu_+) + (\mu_-, \nu_-) - (\mu_+, \nu_-) - (\mu_-, \nu_+) \tag{5.7}$$

jest skończone. Definiujemy zatem (μ, ν) dla dowolnych $\mu, \nu \in \mathscr{E}$ wzorem (5.7). Ponieważ z (5.6) wynika, że

$$(\nu, \nu) = \|\nu_+\|_2^2 + \|\nu_-\|_2^2 - 2(\nu_+, \nu_-) \geqslant (\|\nu_+\|_2 - \|\nu_-\|_2)^2 \geqslant 0 \tag{5.8}$$

dla dowolnego $\nu \in \mathscr{E}$, więc za pomocą (5.8) uogólnia się nierówność (5.6) do dowolnych $\mu, \nu \in \mathscr{E}$. Widać zatem, że zdefiniowane w ten sposób wyrażenie (μ, ν) jest iloczynem skalarnym na $\mathscr{E}$ (analizując powyższe nierówności można stwierdzić, że $(\mu, \mu) = 0$ pociąga $\mu = 0$ dla dowolnego $\mu \in \mathscr{E}$). Przestrzeń $\mathscr{E}$ z normą $\| \ \|_2$ nie jest wprawdzie zupełna, ale do wielu zagadnień można w niej stosować technikę przestrzeni Hilberta.

§ 5.3. Definicja potencjału pojemnościowego. Załóżmy, że U jest obszarem mającym funkcję Greena (np. obszarem ograniczonym na płaszczyźnie lub dowolnym obszarem w R^N, $N \geqslant 3$). Rozpatrzmy zbiór zwarty K zawarty w U.

Funkcję v_K powstałą przez wymiecenie funkcji identycznie równej 1 względem zbioru K nazywa się *potencjałem pojemnościowym* zbioru K. Innymi słowy $v_K = \operatorname{reg} w_K$, gdzie

$$(5.9) \qquad w_K(x) = \inf\{u(x)\colon\ u \in \mathscr{H}^{\uparrow}(U),\ u \geqslant 0 \text{ na } U,\ u \geqslant 1 \text{ na } K\}.$$

Z własności funkcji wymiecionych (§ 3.5) wynika, że v_K jest funkcją harmoniczną na $U \setminus K$, $0 \leqslant v_K \leqslant 1$, oraz $v_K = 1$ quasi wszędzie na K. Funkcja v_K może być identycznie równa zeru, np. odpowiednio zmodyfikowany przykład z § 1.5 pokazuje, że jeżeli K jest zbiorem jednopunktowym, to $v_K = 0$.

Wiemy, że v_K jest funkcją nadharmoniczną; pokażemy, że jest ona potencjałem. Ustalamy $x \in K$. Ponieważ istnieje stała c taka, że $cG_x^U(y) \geqslant 1$ na K, więc, na mocy (5.9), otrzymujemy nierówność $v_K(y) \leqslant cG_x(y)$ dla $y \in U$, skąd wynika, że v_K jest potencjałem i $v_K = G_{\mu_K}$, gdzie μ_K jest miarą skoncentrowaną na ∂K. Z elektrostatycznego punktu widzenia μ_K jest ładunkiem w stanie równowagi.

Dowodzi się, że v_K może być również wyrażone wzorem

$$(5.10) \qquad v_K(x) = \sup\{G_\mu(x)\colon\ \mu \geqslant 0,\ \mu(U \setminus K) = 0,\ G_\mu \leqslant 1\}.$$

(Nierówność w jedną stronę jest oczywista; nierówności w drugą stronę dowodzi się stosując wzór (4.8) do zbiorów $V_n \in \mathscr{R}(U)$ takich, że $V_n \subset V_{n+1}$, $K \subset V_1$, $\bigcup V_n = U$ oraz stosując zasadę minimum do zbioru $V_n \setminus K$ i do funkcji $u - G_\mu$, gdzie u i G_μ są funkcjami występującymi w (5.9) i (5.10) odpowiednio.)

Funkcja w_K zdefiniowana wzorem (5.9) jest półciągła z góry i spełnia następujące warunki, w których K_i oznaczają zbiory zwarte:

1° Jeżeli $K_1 \subset K_2$, to $w_{K_1} \leqslant w_{K_2}$.

2° Jeżeli $K_n \supset K_{n+1}$ oraz $K = \bigcap K_n$, *to* $w_K = \lim w_{K_n}$ (tzw. *ciągłość prawostronna*).

3° $w_{K_1 \cup K_2} + w_{K_1 \cap K_2} \leqslant w_{K_1} + w_{K_2}$ (tzw. *mocna subaddytywność*).

Warunki 1° i 3° spełnione są również przez v_K.

§ 5.4. Monotoniczność masy względem potencjału. Zakładamy w dalszym ciągu, że K jest zbiorem zwartym i $K \subseteq U$. Z rozważań § 4.4 wynika, że miara μ_K odpowiadająca potencjałowi pojemnościowemu znika na każdym zbiorze polarnym. Wyprowadzimy stąd pewne wnioski.

1. *Załóżmy, że ν i λ są masami na K; wówczas*

$$(5.11) \qquad \textit{jeżeli } G_\nu(x) \leqslant G_\lambda(x) \textit{ dla } x \in U, \textit{ to } \nu(K) \leqslant \lambda(K),$$

czyli $\|\nu\| \leqslant \|\lambda\|$.

Istotnie, niech $V \in \mathscr{R}(U)$, $K \subset V$ i niech G_μ oznacza potencjał pojemnościowy zbioru $\bar{V}$. Wówczas $G_\mu = 1$ na K, skąd

$$\|\nu\| = \int_K d\nu = \int_K G_\mu d\nu = \int_{\partial V} G_\nu d\mu \leqslant \int_{\partial V} G_\lambda d\mu = \int_K G_\mu d\lambda = \|\lambda\|.$$

2. *Jeżeli ν_n oraz ν są masami na K oraz $G_{\nu_n} \searrow G_\nu$ quasi wszędzie, to* $\|\nu_n\| \searrow \|\nu\|$.

Dowód przebiega podobnie jak w poprzednim przypadku (por. § 4.4).

3. *Jeżeli ν jest nieujemną miarą Radona skoncentrowaną na K i taką, że potencjał G_ν jest ograniczony, to*

$$(\mu_K, \nu) = \|\nu\| \tag{5.12}$$

(*tzn. energia wzajemna rozkładów μ_K i ν jest równa całkowitemu ładunkowi rozkładu ν*).

Istotnie, $G_{\mu_K} = v_K = 1$ quasi wszędzie na K, zatem na mocy § 4.4

$$(\mu_K, \nu) = \int_K v_K d\nu = \int_K d\nu = \|\nu\|.$$

Jeżeli potencjał G_ν jest nieograniczony, to $(\mu_K, \nu) \leqslant \|\nu\|$.

§ 5.5. Zasada równowagi. Udowodnimy teraz, że infimum wartości energii (ν, ν), gdzie ν jest unormowanym ładunkiem na K, osiągnięte jest dla miary proporcjonalnej do rozkładu pojemnościowego μ_K. Z ogólnych zasad fizyki wynika, że minimum energii potencjalnej charakteryzuje stan równowagi trwałej, zatem μ_K jest rozkładem ładunku na przewodniku K w stanie równowagi trwałej, przy uziemieniu brzegu obszaru U i wartości potencjału v_K na K.

Mianowicie, *jeżeli ν jest masą na U oraz $\nu(K) = \mu_K(K)$, to*

$$(\mu_K, \mu_K) \leqslant (\nu, \nu). \tag{5.13}$$

Jeżeli $\mu_K = 0$, to (5.13) jest oczywiste. Załóżmy najpierw, że potencjał G_ν jest ograniczony oraz że $\mu_K \neq 0$. Stosując (5.12) oraz (5.6), otrzymujemy

$$(\mu_K, \mu_K)^2 = \|\mu_K\|^2 \leqslant \|\nu\|^2 = (\mu_K, \nu)^2 \leqslant (\mu_K, \mu_K)(\nu, \nu),$$

skąd wynika (5.13).

Aby usunąć założenie ograniczoności potencjału G_ν, szukamy ciągu zbiorów $V_n \in \mathscr{R}(U)$ takich, że $V_n \supset V_{n+1}$ oraz $\bigcap \bar{V}_n = K$. Wymiatamy ν względem $U \setminus V_n$; wówczas na mocy (4.15)

$$G_{\nu_n'}(x) = \int_{\partial V_n} G(x, z) \int_{V_n} \mu_y^{V_n}(dz)\nu(dy) + \int_{U \setminus V_n} G(x, y)\nu(dy)$$

dla $x \in U$. Stwierdzamy łatwo, że (na mocy § 4.5)

$$G_{\nu_n'} \leqslant G_{\nu_{n+1}'} \leqslant G_\nu, \qquad \nu_n'(\bar{V}_n) = \nu_n'(\partial V_n) = \nu(\bar{V}_n)$$

Nadto każda funkcja $G_{\nu'_n}$ jest ograniczona na U, zatem na mocy pierwszej części dowodu, zastosowanej do $\overline{V}_n$ i (5.4) dostajemy

$$(\mu_K, \mu_K) \leqslant (\mu_{\overline{V}_n}, \mu_{\overline{V}_n}) \leqslant (\lambda_n, \lambda_n) =$$
$$\leqslant \|\mu_{\overline{V}_n}\|^2 [\nu(\overline{V}_n)]^{-2}(\nu'_n, \nu'_n) \leqslant \|\mu_{\overline{V}_n}\|^2 [\nu(\overline{V}_n)]^{-2}(\nu, \nu),$$

gdzie $\lambda_n = \nu'_n \|\mu_{\overline{V}_n}\| [\nu(\overline{V}_n)]^{-1}$. Przechodząc ostatecznie z $n \to \infty$ otrzymujemy z § 5.4 (wniosek 2) że $\|\mu_{\overline{V}_n}\| \searrow \|\mu_K\|$, skąd wynika nierówność (5.13).

Udowodniliśmy, że

$$\|\mu_K\|_2 = \inf\{\|\nu\|_2 \colon \nu \in \mathscr{E}^+,\ \nu(K) = \mu_K(K)\}.$$

Minimum to jest jednoznaczne; przypuśćmy, że $\nu_0 \in \mathscr{E}^+$, $\nu_0(K) = \mu_K(K)$ i $\|\nu_0\|_2 = \|\mu_K\|_2$. Udowodnimy, że $\nu_0 = \mu_K$. Oznaczmy $\nu_1 = \frac{1}{2}(\nu_0 + \mu_K)$, $\nu_2 = \frac{1}{2}(\nu_0 - \mu_K)$. Wówczas $\nu_1(K) = \mu_K(K)$, skąd $\|\nu_1\|_2 \geqslant \|\mu_K\|_2$, jednakże $\|\nu_1\|_2 \leqslant \|\mu_K\|_2$ (z nierówności trójkąta), zatem $\|\nu_1\|_2 = \|\mu_K\|_2$. Stosując identyczność równoległoboku otrzymujemy

$$\|\mu_K\|_2^2 = \tfrac{1}{2}(\|\nu_0\|_2^2 + \|\mu_K\|_2^2) = \|\nu_1\|_2^2 + \|\nu_2\|_2^2 = \|\mu_K\|_2^2 + \|\nu_2\|_2^2,$$

skąd $\|\nu_2\|_2^2 = 0$ i $\nu_0 = \mu_K$.

§ 5.6. Związek wymiatania z infimum energii. Przestrzeń $\langle \mathscr{E}, \| \ \|_2 \rangle$ nie jest zupełna. Zachodzi jednak następujące twierdzenie Cartana:

Przestrzeń $\mathscr{E}^+$ jest zupełna względem metryki $\| \ \|_2$.

Widać, że $\mathscr{E}^+$ jest stożkiem wypukłym w przestrzeni $\mathscr{E}$, tzn. warunki $\mu_1 \in \mathscr{E}^+$, $\mu_2 \in \mathscr{E}^+$, $t_1 \geqslant 0$, $t_2 \geqslant 0$ pociągają $t_1\mu_1 + t_2\mu_2 \in \mathscr{E}^+$. Twierdzenie Cartana orzeka, że $\mathscr{E}^+$ jest domknięte w uzupełnieniu $\overline{\mathscr{E}}$ przestrzeni $\langle \mathscr{E}, \| \ \|_2 \rangle$. Oznaczmy przez F_K zbiór

$$F_K = \{\mu \in \mathscr{E}^+ \colon \mu(U \setminus K) = 0\},$$

tzn. zbiór nieujemnych miar o skończonej energii i skoncentrowanych na K, gdzie K jest zbiorem zwartym i $K \subset U$. Z twierdzenia Cartana wynika, że F_K jest również podzbiorem domkniętym uzupełnienia $\overline{\mathscr{E}}$. Ponieważ F_K jest ponadto zbiorem wypukłym, z twierdzeń o przestrzeniach Hilberta wynika, że dla dowolnej miary $\mu \in \mathscr{E}^+$ istnieje dokładnie jedna miara $\mu' \in F_K$ najbliższa w sensie normy $\| \ \|_2$, tzn. taka, że

$$\|\mu - \mu'\|_2 < \|\mu - \nu\|_2$$

dla dowolnej miary $\nu \in F_K$, $\nu \neq \mu'$. Otóż dowodzi się, że miara μ' jest identyczna z miarą powstałą przez wymiecenie miary μ względem K, tzn.

$$G_{\mu'} = \operatorname{reg} \inf\{G_\lambda \colon G_\lambda \geqslant G_\mu \text{ na } K\}. \tag{5.14}$$

§ 5.7. Definicja pojemności. *Pojemność* zbioru zwartego $K \subset U$ definiuje się jako

$$\varkappa_U(K) = \|\mu_K\| = \mu_K(K), \tag{5.15}$$

gdzie G_{μ_K} jest potencjałem pojemnościowym zbioru K. Jeżeli U jest ustalone, to piszemy krótko $\varkappa$ zamiast $\varkappa_U$. Na mocy (5.10) i (5.11) mamy

$$\varkappa(K) = \sup\{\mu(K)\colon \mu \geqslant 0,\ \mu(U \setminus K) = 0,\ G_\mu \leqslant 1\}.$$

Z rozważań § 5.5 wynika, że jeżeli $\mu'_K = \mu_K \|\mu_K\|^{-1}$, to

$$\varkappa(K) = (\mu_K, \mu_K) = \frac{1}{(\mu'_K, \mu'_K)}, \tag{5.16}$$

tzn. *pojemność jest odwrotnie proporcjonalna do energii stanu równowagi ładunku unormowanego.*

Jeżeli $K \subset U_1 \subset U_2$, to $\varkappa_{U_1}(K) \geqslant \varkappa_{U_2}(K)$. Oznacza to, że jeżeli oddalamy uziemioną odkładkę ∂U kondensatora $(\partial U, K)$, to pojemność maleje.

Pojemność przypomina nieco miarę; dowodzi się, że ma ona następujące własności:

(i) $\varkappa(K) \geqslant 0$, $K_1 \subset K_2$ pociąga $\varkappa(K_1) \leqslant \varkappa(K_2)$,

(ii) dla każdego zbioru zwartego K i $\varepsilon > 0$ istnieje zbiór otwarty V taki, że $K \subset K_1 \subset V$ pociąga $\varkappa(K_1) - \varkappa(K) < \varepsilon$ (ciągłość prawostronna),

(iii) $\varkappa(K_1 \cup K_2) + \varkappa(K_1 \cap K_2) \leqslant \varkappa(K_1) + \varkappa_2(K_2)$ (mocna subaddytywność).

Na razie zdefiniowaliśmy pojemność w klasie zbiorów zwartych. Definicję tę rozszerza się na większą klasę zbiorów w sposób następujący: pojemność zbioru $V \in \mathscr{G}(U)$ definiuje się jako supremum pojemności podzbiorów zwartych: $\varkappa(V) = \sup\{\varkappa(K)\colon K \subseteq V\}$; *pojemność zewnętrzną* dowolnego zbioru A definiuje się jako infimum pojemności nadzbiorów otwartych: $\varkappa^*(A) = \inf\{\varkappa(V)\colon A \subset V\}$; *pojemność wewnętrzną* zbioru A definiuje się jako supremum pojemności podzbiorów zwartych: $\varkappa_*(A) = \sup\{\varkappa(K)\colon K \subset A\}$. Zbiór nazywa się *pojemnościowalny* (franc. *capacitable*), jeżeli $\varkappa^*(A) = \varkappa_*(A)$. Dowodzi się, że *każdy zbiór analityczny, w szczególności każdy zbiór borelowski, jest pojemnościowalny* (Choquet).

Mocna subaddytywność pozostaje nadal prawdziwa dla dowolnych zbiorów pojemnościowalnych; można ją sformułować w bardziej ogólnej postaci wprowadzając funkcję

$$\psi(A_1, \ldots, A_n) = \varkappa^*(A_1) + \ldots + \varkappa^*(A_n) - \varkappa^*(A_1 \cup \ldots \cup A_n),$$

gdzie $A_1, \ldots, A_n$ są dowolnymi podzbiorami obszaru U; wówczas, o ile mamy dwie rodziny zbiorów $A_1, \ldots, A_n$ i $B_1, \ldots, B_n$ takie, że $B_i \subset A_i$ dla $i = 1, \ldots, n$, to $\psi(B_1, \ldots, B_n) \leqslant \psi(A_1, \ldots, A_n)$.

Z mocnej subaddytywności wynika również łatwo, że jeżeli $B \subset A$, to $\varkappa^*(A \setminus B) \geqslant \varkappa^*(A) - \varkappa^*(B)$.

Omówione tu pojęcie pojemności nosi nazwę *pojemności Greena.* Choquet nazywa pojemnością każdą funkcję zbioru spełniającą warunki (i), (ii), (iii) lub pewne warunki jeszcze ogólniejsze.

§ 5.8. Związek pojęcia zbioru polarnego z pojemnością i energią. Zbiór A jest polarny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje potencjał G_μ taki, że $G_\mu(x) = \infty$ dla $x \in A$. Gdybyśmy potraktowali formalnie wzór (5.1) na pojemność, to podstawienie $v_0 = \infty$ prowadziłoby do wniosku, że $\varkappa(A) = 0$. Uściślenie tego rozumowania prowadzi do następującego twierdzenia Cartana:

Zbiór A ma pojemność (zewnętrzną) równą zero wtedy i tylko wtedy, gdy jest polarny.

Ze wzoru (5.16) wynika, że jeżeli K jest zbiorem zwartym, to warunek $\varkappa(K) = 0$ jest równoważny warunkowi $(\mu_K, \mu_K) = \infty$, tzn. K jest zbiorem polarnym wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu_K \notin \mathscr{E}^+$.

Głębokim wynikiem jest następujące twierdzenie:

Zbiór borelowski A jest polarny wtedy i tylko wtedy, gdy każda miara o skończonej energii znika na A, tzn. gdy $\mu \in \mathscr{E}^+$ pociąga $\mu(A) = 0$.

Dostateczność wynika łatwo z powyższych twierdzeń, konieczność można udowodnić opierając się na rozważaniach z § 5.6.

§ 5.9. Analityczne formuły M. Kaca dotyczące pojemności i potencjału pojemnościowego. Stosując teorię ruchów Browna do teorii potencjału, M. Kac uzyskał między innymi wzory na pojemność oraz potencjał pojemnościowy obszarów ograniczonych w R^3. Wyniki te szkicowo można ująć w sposób następujący.

Modyfikujemy definicję funkcji Greena przestrzeni R^3 dzieląc funkcję podstawową (4.2) przez stałą 2π. Rozważamy ustalony zbiór otwarty ograniczony V i wprowadzamy operator $T\colon L^2(V) \to L^2(V)$ zdefiniowany za pomocą całki

$$(Tf)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\overline{V}} \frac{f(y)\,dy}{|x-y|}. \tag{5.17}$$

Temu symetrycznemu operatorowi odpowiada równanie całkowe

$$Tf = \lambda f, \quad f \in L^2(\overline{V}). \tag{5.18}$$

Wiadomo, że T jest operatorem liniowym ograniczonym i dodatnio określonym, a jego wartości własne można ustawić w ciąg $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ malejący do zera. Oznaczmy przez $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ odpowiadający ortonormalny ciąg funkcji własnych.

Dowodzi się, że dla każdego $y \in R^3$ istnieje granica

$$u(y, V) = \lim_{\lambda \searrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda + \lambda_n} (T\varphi_n)(y) \int_{\overline{V}} \varphi_n(x)\,dx. \tag{5.19}$$

Funkcja (5.19) jest potencjałem Greena pewnej masy ν na ∂V, tzn.

$$u(y, V) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial V} \frac{1}{|x-y|}\, \nu(dx), \tag{5.20}$$

nadto jest to funkcja harmoniczna na $R^3 \setminus \overline{V}$, $u(y, V) = 1$ dla $y \in V$ oraz $\lim\limits_{|y| \to \infty} u(y, V) = 0$.

Jednakże u nie musi być potencjałem pojemnościowym zbioru $\overline{V}$, tzn. zbiór $\{y \in \partial V\colon u(y, V) < 1\}$ nie musi być polarny, nawet, gdy V jest wnętrzem swojego domknięcia (Dvoretzky i Erdös). Obszary ograniczone V, takie że $u(y, V)$ jest potencjałem pojemnościowym zbioru V nazywane są obszarami *półklasycznymi*. Na przykład każdy obszar regularny i każdy obszar gwiaździsty są półklasyczne.

Na to, by obszar V był półklasyczny, potrzeba i wystarcza, aby

$$\varkappa(\overline{V}) = \nu(\partial V); \tag{5.21}$$

jeżeli warunek ten jest spełniony, to

$$\varkappa(\overline{V}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \Big(\int_{\overline{V}} \varphi_n(x)\,dx \Big)^2. \tag{5.22}$$

Interesujące jest porównanie wzoru (5.16) ze wzorem

$$\frac{1}{\varkappa(\overline{V})} = \inf \Big\{ \int_{\overline{V}} \int_{\overline{V}} \frac{\varphi(x)\varphi(y)}{2\pi |x-y|}\, dxdy\colon \varphi \in L^2(\overline{V}),\ \int_{\overline{V}} \varphi\, dx = 1 \Big\}, \tag{5.23}$$

który zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy V jest obszarem półklasycznym.

Tymi samymi metodami probabilistycznymi dowodzi się następującego czysto analitycznego kryterium regularności punktów brzegowych: jeżeli V jest obszarem jednospójnym, półklasycznym i mierzalnym w sensie Jordana (co oznacza, że ∂V jest zbiorem o przestrzennej mierze Lebesgue'a zero), to na to, aby punkt $y_0 \in \partial V$ był regularny względem $R^3 \setminus \overline{V}$ potrzeba i wystarcza, by

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda} \int_{\overline{V}} \varphi_n(x)\,dx\ \varphi_n(y_0) = 1. \tag{5.24}$$

Literatura

§ 5.2. H. Cartan [1].
§ 5.3. O. Frostman [1].
§ 5.4. O. Frostman [1].
§ 5.7. G. Choquet [1], [2], [3], J. Deny [1], E. B. Dynkin [1] (appendix), O. Frostman [1], F. Vasilesco [1], Ch.-J. de la Vallée Poussin [1].
§ 5.8. G. Choquet [2], [4].
§ 5.9. M. Kac [1], [2], [3].

Prace cytowane

L. V. Ahlfors i L. Sario: [1] *Riemann Surfaces*, Princeton 1960.

G. Anger: [1], [2]: *Die Entwicklung der Potentialtheorie im Hinblick auf ihre grundlegende Existenzsätze*, Jahresbericht Deutschen Math. Ver. 64 (1961), str. 51-78 i 100-134.

H. Bauer: [1] *Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problems für elliptische und parabolische Differentialgleichungen*, Math. Annalen 146 (1962), str. 1-59.

[2] *Weiterführung einer axiomatischen Potentialtheorie ohne Kern (Existenz von Potentialen)*, Zeits. für Wahrscheilichkeitstheorie und Verwandte Gebiete 1 (1963), str. 197-229.

M. Brelot: [1] *Éléments de la théorie classique du potentiel*, Cours de Sorbonne, Centre de documentation universitaire, Paris 1961.

[2] *Lectures on potential theory*, Tata Inst. Fund. Research, Bombay 1960.

[3] *Sur un théorème de prolongement fonctionnel de Keldych concernant le probblème de Dirichlet*, Journal d'Analyse Math. 8 (1960/61), str. 273-288.

[4] *Familles de Perron et problème de Dirichlet*, Acta Sci. Math. 9 (1939), str. 133-153.

[5] *Points irréguliers et transformations continues en théorie du potential*, Journal de Math. Pure Appl. 19 (1940), str. 319-337.

[6] *Sur les ensembles effilés*, Bull. Sci. Math. 68 (1944), str. 12-36.

[7] *A new proof of the fundamental theorem of Kellog-Evans on the set of irregular points in the Dirichlet problem*, Rend. Circolo Math. Palermo 4 (1955), str. 112-122.

[8] *Le problème de Dirichlet. Axiomatique et frontière de Martin*, Journal de Math. Pure Appl. 35 (1956), 297-335.

[9] *Une axiomatique générale du problème de Dirichlet dans les espaces localement compacts*, Séminaire du théorie du potential 1956/1957, Inst. H. Poincaré, Paris.

[10] *Axiomatique des fonctions harmoniques et surharmoniques dans un espace localement compact*, Séminaire de théorie du potential, 1957/1958, Inst. H. Poincaré, Paris.

M. Brelot i G. Choquet: [1] *Espaces et lignes de Green*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 3 (1952), 199-263.

H. Cartan: [1] *Théorie du potential newtonien, énérgie, capacité, suites de potentiels*, Bull. Soc. Math. France 73 (1945), str. 74-106.

[2] *Théorie générale du balayage en potentiel newtonien*, Ann. Univ. Grenoble, Math. Phys. 22 (1946), str. 221-280.

H. Cartan i J. Deny: [1] *Le princide du maximum en théorie du potentiel et la nation de fonction surharmonique*, Acta. Sci. Math. 12 (1950), str. 81-100.

G. Choquet: [1] *Theory of capacities*, Univ. of Kansas, 1954.

[2] *Theory of capacities*, Ann. Inst. Fourier 5 (1953/54), str. 131-195.

[3] *Forme abstraite du théorème de capacibilité*, Ann. Inst. Fourier 9 (1959), str. 83-89.

[4] *Sur les points d'effilement d'un ensemble, Application à l'étude de la capacité*, Anna. Inst. Fourier 9 (1959), str. 91-101.

R. Courant: [1] *Dirichlet's principle, conformal mappings and minimal surafaces*, New York 1950.

R. Courant i D. Hilbert: [1] *Methoden der mathematischen Physik*, Band 2, Berlin 1937.

J. Deny: [1] *Les potentiels d'énergie finie*, Acta Math. 82 (1950), str. 107-183.

J. L. Doob: [1] *Probability methods applied to the first boundary value problem*, Proc. 3rd Berekeley Symp. on Math. Stat. and Prob., Berkeley 1956, str. 49-80.

[2] *Brownian notion on a Green space*, Tieoria Weriojatnostiej 2 (1957).

[3] *Probability approach to the heat equation*, Trans. Amer. Math. Soc. 80 (1955), str. 216-280.

N. Dunford and J. T. Schwartz, [1] *Linear Operators* I, *General theory*, New York 1958.

E. B. Dynkin (Е. Б. Дынкин): [1] *Theory of Markov processes*, Oxford 1960 (tłumaczenie z ros. wydania 1959).

[2] *Марковские процессы*, Москва 1963.

B. Epestein, [1] *Partial Differential Equations*, New York 1962.

W. Feller i Tamarkin; [1] *Partial differential equations*, Brown University, 1941.

O. Frostman: [1] *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles*, Thèse, Lund 1935.

B. Fuglede: [1] *On the theory of potentials in locally compact spaces*, Acta Math. 103 (1960), str. 139-215.

N. M. Giunter: [1] *Teoria potencjalu*, Warszawa 1957.

F. W. Gehring i H. Haahti: [1] *The transformations which preserve the harmonic functions*, Annales Acad. Sci. Fennice, ser. A, I math. nr 293, (1960).

I. M. Gelfand i G. E. Szyłow (И. М. Гельфанд и Т. Э. Шилов): [1] *Обобщенные функции и действия над ними*, I, Moskwa 1959.

P. Hartman i A. Wintner: [1] *On the solutions of the equation of heat conduction*, Amer. Journal of Math. 72 (1950), str. 367-395.

M. Heins: [1] *Selected Topics in the Classical Theory of Functions of a Complex Variable*, New York 1962.

R. M. Hervé: [1] *Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 12 (1962), str. 415-571.

G. A. Hunt: [1] *Some theorems concerning Brownian motion*, Trans. Amer. Math. Soc. 81 (1956), str. 224-319.

M. Kac: [1] *Potential theory in Three Dimension*, Rockefeller Institute, New York, 1962.

[2] *On some connections between probability theory and differential and integral equations*, Proc. Second Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob., Berkeley 1951, str. 189-215.

[3] *Probability and related topics in physical sciences*, Lectures in Applied Math. vol. 1, London 1959.

S. Kakutani: [1] *Two-dimensional Brownian motion and harmonic functions* Proc. Imp. Acad. Tokyo 20 (1944), 706-714.

O. D. Kellog: [1] *Foundations of the potential theory*, Berlin 1929.

M. W. Kiełdysz (M. B. Келдыш): [1] *On the solubility and stability of Dirichlet's problem*, Uspiechy Mat. Nauk 8 (1941), str. 171-231 (w jęz. ros.).

M. Krzyżański: [1] *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego*, t. I, Warszawa 1957.

F. Leja: [1] *Teoria funkcji analitycznych*, Warszawa 1957.

L. H. Loomis: [1] *Introduction to abstract harmonic analysis*, New York 1953.

K. Maurin: [1] *Metody przestrzeni Hilberta*, Warszawa 1959.

C. Miranda: [1] *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, Berlin 1955.

L. Naim: [1] *Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 7 (1957), str. 183-281.

M. A. Naimark: [1] *Normed Rings*, 1959 (tłum. z ros.).

M. Ohtsuka: [1] *On potentials in locally compact spaces*, Journal Sci. Hiroshima Univ. A-I, 25 (1961), str. 135-352.

[2] *On the thin sets in potential theory*, Semin. Anal. Funct., Inst. Advanced Study, Princeton t. I (1957), str. 302-313.

O. Perron: [1] *Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für* $\Delta u = 0$, Math. Zeits. 18 (1923), str. 42-54.

I. G. Pietrowski: [1] *Równania różniczkowe cząstkowe*, Warszawa 1955.

[2] *Zur erste Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung*, Compositio Math. 1 (1935), str. 383-419.

T. Rado: [1] *Subharmonic functions*, Berlin 1937.

R. Remak: [1] *Über potentialkonvexe Funktionen*, Math. Zeitschrift 20 (1924), str. 126-130.

F. Riesz: [1] *Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel*, Acta Math. 48 (1926), str. 329-343, 54 (1930), str. 321-360.

L. Schwartz: [1], [2] *Théorie des distributions I, II*, Paris 1957, 1959.

Z. Semadeni i P. Zbijewski: [1] *Przestrzenie funkcji ciągłych na kompaktach*, Prace Mat. 3 (1959), str. 17-47.

S. L. Sobolew (С. Л. Соболев): [1] *Уравнения математической физики*, Moskwa 1954.

W. Sternberg: [1] *Über die Differenzialgleichung der Wärmeleitung*, Math. Annalen 101 (1929), str. 394-398.

A. N. Tichonoff i A. A. Samarski: [1] *Równania fizyki matematycznej*, Warszawa 1963.

G. Tautz: [1] *Zur Theorie der ersten Randwertaufgabe*, Math. Nachr. 2 (1949), str. 279-303.

M. Tsuji: [1] *Potential Theory in Modern Function Theory*, Tokyo 1959.

Ch.-J. de la Vallée Poussin: [1] *Extension de la méthode du balayage et problème de Dirichlet*, Annales Inst. H. Poincaré 2 (1932), str. 169-232.

[2] *Le potential logarithmique. Balayage et représentation conforme*, Paris 1949.

F. Vasilesco: [1] *La notion de capacité*, Paris 1937.

[2] *Sur la continuité de potentiel à la travers les masses, et la démonstration d'un lemme de Kellog*, C. R. Paris 200 (1935), str. 1173-1174.

N. Wiener: [1] *The Dirichlet problem*, Journal Math. Phys. 3 (1924), str. 127-146.

[2] *Note on a paper of Perron*, Journal Math. Phys. 4 (1925), str. 21-32.

З. Цесельски и З. Семадени (Познань)

ПЕРЕСМОТР НЕКОТОРЫХ НОВЕЙШИХ МЕТОДОВ В ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА, I.

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ДИРИХЛЕ, ПОТЕНЦИАЛЫ И ЕМКОСТИ

Введение.

I. Надгармонические функции: 1.1. Обозначения. 1.2. Меры Радона. 1.3. Гармонические меры. 1.4. Определение надгармонической функции. 1.5. Семейства надгармонических функций.

II. Метод Перрона-Винера-Брелета: 2.1. Надгармонические мажоранты. 2.2. Резолютивные функции. 2.3. Структурная полнота пространства гармонических функций. 2.4. Уравнение теплопроводности. 2.5. Аксиоматическое представление проблемы Дирихле.

III. Тонкие множества. Выметание. Регулярные точки: 3.1. Понятие тонкого множества в точке. 3.2. Топология Картана. 3.3. Полярные множества. 3.4. Надгармонические функции „квази". 3.5. Общее понятие выметания. 3.6. Критерия регулярности граничных точек.

IV. Потенциалы: 4.1. Распределения Риса. 4.2. Функция Грина. 4.3. Потенциалы Грина. 4.4. Ограниченные потенциалы и полярные пространства. 4.5. Выметание массы. 4.6. Теорема Эванса-Келлога. 4.7. Непрерывность потенциала на носителе меры. 4.8. Теорема Келдыша для регулярных точек. 4.9. Связь функции Грина с фундаментальными решениями уравнения теплопроводности. 4.10. Обобщения теории потенциала.

V. Энергия и емкость: 5.1. Предварительные замечания. 5.2. Понятие энергии. 5.3. Определение емкостного потенциала. 5.4. Монотонность массы относительно потенциала. 5.5. Принцип равновесия. 5.6. Связь выметания с инфимумом энергии. 5.7. Определение емкости. 5.8. Связь между понятиями полярного множества, емкости и энергии. 5.9. Аналитические формулы М. Каца касающиеся емкости и емкостного потенциала.

Цитированные работы.

Z. Ciesielski and Z. Semadeni (Poznań)

SURVEY OF SOME NEW METHODS IN POTENTIAL THEORY, I

GENERALIZED SOLUTIONS OF THE DIRICHLET PROBLEM, POTENTIALS AND CAPACITIES

Introduction.

I. Superharmonic functions: 1.1. Notation. 1.2. Radon measures. 1.3. Harmonic measures. 1.4. Definition of a superharmonic function. 1.5. Families of superharmonic functions.

II. The method of Perron-Wiener-Brelot: 2.1. Superharmonic majorants. 2.2. Resolutive functions. 2.3. Lattice completeness of spaces of harmonic functions. 2.4. Heat equation. 2.5. Axiomatic approach to the Dirichlet problem.

III. Thin sets. Extremization. Regular points. 3.1. Notion of a thin set. 3.2. Fine topology. 3.3. Polar sets. 3.4. Quasi superharmonic functions. 3.5. General notion of balayage. 3.6. Criteria of regularity of boundary points.

IV. Potentials. 4.1. Riesz decomposition. 4.2. Green function. 4.3. Green potentials. 4.4. Bounded potentials and polar sets. 4.5. Balayage of a measure. 4.6. Theorem of Evans-Kellog. 4.7. Continuity of the potential on the carrier of measure. 4.8. Theorem of Keldysh on regular points. 4.9. Connection between the Green function and fundamental solutions of the heat equation. 4.10. Generalizations of the potential theory.

V. Energy and capacity. 5.1. Preliminary remarks. 5.2. Notion of energy. 5.3. Definition of the capacitory potential. 5.4. Monotonicity of mass with respect to the potential. 5.5. Principle of equillibrium. 5.6. Connection between balayage and the infimum of energy. 5.7. Definition of capacity. 5.8. Connection between polar sets, energy and capacity. 5.9. Analityc formulae of M. Kac concerning the capacity and capacitory potential.

References.