ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE VIII (1964)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

T. Styś (Warszawa)

Twierdzenie Hopfa dla pewnego eliptycznego układu równań liniowych drugiego rzędu

W pracy [1] zostało podane pierwsze twierdzenie Hopfa dla liniowego równania eliptycznego drugiego rzędu. Twierdzenie to można uogólnić na układ równań następującej postaci

$$(1)\qquad \sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{a_{ik}\frac{\partial u_h}{\partial x_k}\right\}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial u_h}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{p}C_{jh}u_j=f_h\qquad (h=1,2,\ldots,p)$$

określony w obszarze ograniczonym D.

Zakładamy, że współczynniki $a_{ik}(x)$ $(i,k=1,2,\ldots,n)$ są klasy $C^2(D)$, macierz $C(x)=\big(C_{ij}(x)\big)_{ij=1}^{p}$ spełnia warunek: dla każdego rzeczywistego $\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_p)\neq 0$ i $x\in D$

$$\xi C(x)\xi^*\leqslant 0,\qquad \text{gdzie}\qquad \xi^*=(\xi_i)_{i=1}^{p}\ \text{— kolumna}.$$

Funkcje $b_i(x), f_h(x)$ i macierz $C(x)$ są różniczkowalne w sposób ciągły w D.

Niech $u(x)$ będzie rozwiązaniem układu (1) dwukrotnie różniczkowalnym w sposób ciągły w obszarze D i ciągłym włącznie do brzegu S obszaru D.

Twierdzenie 1. *Jeżeli $(u,f)\geqslant 0$ w obszarze D, to funkcja $R=[u_1^2+u_2^2+\ldots+u_p^2]^{1/2}$ osiąga maksimum na brzegu S obszaru D, jeżeli ponadto osiąga maksimum wewnątrz obszaru D, to jest stała.*

Dowód. Załóżmy, że $R(x)\neq 0$ dla $x\in D$. Przypadek, gdy funkcja R przyjmuje wartość zero w obszarze D, rozpatrzymy oddzielnie. Oznaczmy przez $e(x)$ wektor jednostkowy o kierunku i zwrocie wektora $u(x)$. Wstawiając $u=eR$ do układu (1), otrzymamy równanie, które spełnia funkcja R, mianowicie

$$(2)\qquad \sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{a_{ik}\frac{\partial R}{\partial x_k}\right\}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial R}{\partial x_i}+R\left[eCe^*-\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}\left(\frac{\partial e}{\partial x_i},\frac{\partial e^*}{\partial x_k}\right)\right]=(e,f).$$

Z założenia wynikają nierówności:

$$eCe^* - \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\left(\frac{\partial e}{\partial x_i}, \frac{\partial e^*}{\partial x_k}\right) < 0, \quad \text{oraz} \quad (e, f) \geqslant 0 \quad \text{dla} \quad x \in D,$$

więc do równania (2) stosuje się twierdzenie Hopfa podane w [1].

Pozostaje dowieść twierdzenia w przypadku, gdy funkcja R przyjmuje wartość zero w obszarze D. W tym celu wystarczy dowieść, że jeżeli funkcja R osiąga maksimum w punkcie $x^0 \in D$, to $R(x) = 0$ w każdym punkcie $x \in D$. Dla $R(x^0) = 0$ twierdzenie jest prawdziwe, zatem przyjmujemy $R(x^0) > 0$. Ponieważ funkcja R jest ciągła w obszarze D, więc istnieje taki obszar $D_0 \subset D$, że $x^0 \in D_0$, $R(x) > 0$ dla $x \in D_0$ i na brzegu obszaru D_0 funkcja R przyjmuje wartość zero co najmniej w jednym punkcie. Wobec tego, na podstawie pierwszej części dowodu, funkcja R jest stała w obszarze D_0 i równa $R(x^0)$; ale na brzegu obszaru D_0 funkcja R przybiera wartość zero, zatem $R(x^0) = 0$, skąd wynika, że $R \equiv 0$ w D.

Jeżeli macierz C jest ujemnie określona w obszarze D i $f \equiv 0$ w D, to do rozwiązań układu (1) stosuje się zasada maksimum A. W. Bicadze, której dowód w przypadku płaskim podany jest w pracy [2]. W pracy [3] rozpatruje się zasadę ekstremum dla układów równań, w których występują pochodne wszystkich funkcji niewiadomych. Ponadto podany jest dowód zasady ekstremum dla układu (1), z której wynika pierwsza część twierdzenia Hopfa, w przypadku $f \equiv 0$ i $\eta C \eta^* < 0$.

Zakładając dodatkowo, że zbiory regularne względem zagadnienia Dirichleta dla układu (1) stanowią bazę otoczeń i opierając się na twierdzeniu 1, można dowieść pierwszego twierdzenia Harnacka. O. A. Olejnik [4] podaje dowód twierdzenia, że każdy obszar regularny względem zagadnienia Dirichleta dla równania Laplace'a jest też regularny dla ogólnego równania eliptycznego. Twierdzenie o istnieniu regularnego rozwiązania zagadnienia Dirichleta dla eliptycznych układów równań i obszarów wypukłych można znaleźć w pracy [5].

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli ciąg $\{u^m(x)\}$ rozwiązań układu* (1) *dwukrotnie różniczkowalnych w sposób ciągły w obszarze ograniczonym D i ciągłych włącznie do brzegu S obszaru D jest jednostajnie zbieżny na S do $\varphi(x)$, to jest jednostajnie zbieżny w D, a granica tego ciągu jest rozwiązaniem układu* (1), *dwukrotnie różniczkowalnym w sposób ciągły w obszarze D, ciągłym w domknięciu $\bar{D}$ obszaru D i spełniającym warunek brzegowy $u(x) = \varphi(x)$ $(x \in S)$.*

Dowód. Funkcja $R^{qr} = [(u_1^q - u_1^r)^2 + (u_2^q - u_2^r)^2 + \ldots + (u_p^q - u_p^r)^2]^{1/2}$ osiąga maksimum na brzegu S obszaru D, ponieważ wektor $u^{qr} = u^q - u^r$ $(q, r = 1, 2, \ldots, p)$ jest rozwiązaniem układu (1). Z założenia ciąg $\{u^m(x)\}$ jest jednostajnie zbieżny na S, a zatem do każdej liczby $\varepsilon > 0$ można dobrać takie N, że dla $q, r \geqslant N$, $x \in S$

$$|u_h^q - u_h^r| < \varepsilon \quad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

skąd wynika nierówność: $R^{qr} < \varepsilon$ dla $x \in D \cup S$ $q, r \geqslant N$, wobec czego ciąg $\{u^m(x)\}$ jest jednostajnie zbieżny w D. Pozostaje dowieść, że funkcja $u(x) = \lim\limits_{m\to\infty} u^m(x)$ jest rozwiązaniem układu (1) dwukrotnie różniczkowalnym w sposób ciągły w D. Dowód wystarczy przeprowadzić dla pewnego otoczenia dowolnego punktu $x_a \in D$. Oznaczmy przez D_a obszar zawierający punkt x_a i leżący wraz z brzegiem S_a w obszarze D. Niech $\bar{u}(x)$ będzie rozwiązaniem zagadnienia Dirichleta dla układu (1) w obszarze D_a spełniającym warunek brzegowy $\bar{u}(x) = u(x)$ dla $x \in S_a$. Z jednostajnej zbieżności ciągu $\{u^m(x)\}$ w obszarze D mamy

$$(3) \qquad |u_h^m(x) - \bar{u}_h(x)| < \varepsilon \quad \text{dla} \quad x \in S_a,\ m \geqslant N\ (h = 1, 2, \ldots, p).$$

Na podstawie twierdzenia Hopfa nierówność (3) jest spełniona również dla $x \in D_a$; wobec tego $\bar{u}(x) = \lim\limits_{m\to\infty} u^m(x)$, a więc $\bar{u}(x) \equiv u(x)$ w D.

Prace cytowane

[1] M. Krzyżański, *Równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu*, Część pierwsza, Warszawa 1957.

[2] А. В. Бицадзе, *Об эллиптических системах дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка*, ДАН 112, № 6 (1957), 983-986.

[3] В. Я. Скоробогатько, *Исследование по качественной теорий дифференциальных уравнений с частными производными*, Издательство Львовского Университета 1961, str. 69-86.

[4] О. А. Олейник, *О задаче Дирихле для уравнений эллиптического типа*, Математический Сборник, 24 (1949), str. 3-14.

[5] Я. Б. Лопатиньский, *Условия существования решения первой граничной задачи для системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа*, Доповіді АН УРСР I (1956), str. 5-9.

Т. Стысь (Варшава)

ТЕОРЕМА ХОПФА ДЛЯ НЕКОТОРОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

РЕЗЮМЕ

В этой работе обобщается теорему Хопфа представленную в [1] на эллиптическую систему вида:

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{a_{ik}\frac{\partial u_h}{\partial x_k}\right\} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u_h}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{p} C_{jh} u_j = f_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, p).$$

Кроме того доказывается первая теорема Гарнака о решениях этой системы.

T. Styś (Warszawa)

HOPF'S THEOREM FOR A CERTAIN ELLIPTIC SYSTEM OF THE SECOND-ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

SUMMARY

The author proves Hopf's theorem for the following elliptic system of differential equations:

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{a_{ik}\frac{\partial u_h}{\partial x_k}\right\} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u_h}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{p} C_{jh} u_j = f_h \qquad (h = 1, 2, \ldots, p)$$

The paper also contains a proof of first Harnack's theorem for the solutions of the above system.