ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE VIII (1964)

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

M. Kalecki (Warszawa)

O pewnych sumach rozciągniętych na liczby pierwsze lub czynniki pierwsze

1. Niech $\pi(N)$ oznacza liczbę liczb pierwszych $p \leqslant N$, a $S(N)$ ich sumę. Twierdzenie o liczbach pierwszych Hadamarda de la Vallée-Poussina mówi, że

$$\pi(N) = \frac{N}{\log N}\big(1+o(1)\big). \tag{1}$$

E. Landau wyprowadził stąd wniosek (por. [2], tom 1, str. 226), że

$$S(N) = \frac{1+o(1)}{2}\cdot\frac{N^2}{\log N}. \tag{2}$$

Wyprowadzimy teraz ze wzoru (1) następujące twierdzenie, ogólniejsze niż wynik Landaua:

Twierdzenie 1. *Niech będzie dana funkcja $f(x)$, określona dla $x > 0$, o następujących własnościach:*

(a) $f(x) > 0$,

(b) *$f(x)$ jest funkcją niemalejącą,*

(c) *dla każdego $u > 0$ istnieje granica $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(ux)/f(x)\big) = \varphi(u)$,*

wówczas

$$S_f(N) = \sum_{p\leqslant N} f(p) = \frac{1+o(1)}{s+1}\, f(N)\frac{N}{\log N},$$

gdzie $s = \log\varphi(e) \geqslant 0$ (e podstawa logarytmu naturalnego)(1).

Lemat 1. *Zachodzi tożsamość $\varphi(u) = u^s$, gdzie $s \geqslant 0$.*

Dowód. Funkcja φ jest funkcją multyplikatywną, gdyż

$$\frac{f(u_1u_2x)}{f(x)} = \frac{f(u_1u_2x)}{f(u_2x)}\cdot\frac{f(u_2x)}{f(x)},$$

(1) W czasie druku tej pracy doc. A. Schinzel zwrócił mi uwagę na to, że twierdzenie 1 w przypadku szczególnym znajduje się już w pracy: E. Landau, *Sur les valeurs moyennes de certaines fonctions arithmetiques*, Bull. Acad. Roy. Belgique, Cl. Sci., 1911, str. 443-472.

skąd

$$\varphi(u_1 u_2) = \varphi(u_1)\varphi(u_2).$$

Następnie, wobec własności (b) funkcji f, mamy $\varphi(u) \geqslant 1$ dla $u \geqslant 1$. Stąd i z multyplikatywności $\varphi(u)$ wynika, że funkcja ta jest niemalejąca; korzystając jeszcze raz z multyplikatywności otrzymujemy (por. [1], str. 48) $\varphi(u) = u^c$, c stała $\geqslant 0$. Przyjmując $u = e$ znajdujemy $c = \log\varphi(e) = s \geqslant 0$.

LEMAT 2. *Iloraz* $\dfrac{f(ux)}{f(x)}$ *jest zbieżny jednostajnie do* u^s *w przedziale* $\langle a, b\rangle$, *gdzie* $a > 0$, *gdy* $x \to \infty$.

Dowód. Podzielmy przedział $\langle a, b\rangle$ na równe części o długości η. Oznaczmy $a + j\eta$ przez u_j. Dla każdego u_j możemy wyznaczyć takie x_j, że, gdy $x \geqslant x_j$,

$$\left|\frac{f(xu_j)}{f(x)} - u_j^s\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

gdzie ε jest dowolną liczbą dodatnią. Oznaczmy największe x_j (zależne oczywiście od η) przez x_η. Zatem, dla $x \geqslant x_\eta$

$$\left|\frac{f(xu_j)}{f(x)} - u_j^s\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wobec własności (b) funkcji f, dla u z przedziału $\langle u_j, u_{j+1}\rangle$, mamy

$$\frac{f(xu_j)}{f(x)} \leqslant \frac{f(xu)}{f(x)} \leqslant \frac{f(xu_{j+1})}{f(x)},$$

a zatem

$$\left(\frac{f(xu_j)}{f(x)} - u_j^s\right) + (u_j^s - u^s) \leqslant \frac{f(xu)}{f(x)} - u^s \leqslant \left(\frac{f(xu_{j+1})}{f(x)} - u_{j+1}^s\right) + (u_{j+1}^s - u_j^s),$$

skąd, dla $x \geqslant x_\eta$,

$$-\frac{\varepsilon}{2} - (u_{j+1}^s - u_j^s) < \frac{f(xu)}{f(x)} - u^s < \frac{\varepsilon}{2} + (u_{j+1}^s - u_j^s).$$

Przyjmując teraz na η wielkość dostatecznie małą, a mianowicie taką by $u_{j+1}^s - u_j^s < \varepsilon/2$, otrzymamy

$$\left|\frac{f(xu)}{f(x)} - u^s\right| < \varepsilon$$

dla $x \geqslant x_\eta$ i dla każdego u z przedziału $\langle a, b\rangle$.

LEMAT 3. *Zachodzi następująca asymptotyczna równość*

$$S_f(N)-S_f\left(\frac{N}{2}\right)=\frac{2^{s+1}-1+o(1)}{2^{s+1}(s+1)}f(N)\frac{N}{\log N}.$$

Dowód. Dla danej liczby pierwszej p, $N/2\leqslant p\leqslant N$, mamy w myśl wzoru (1)

$$\frac{\pi(p)}{\pi(N)}=\frac{p}{N}\cdot\frac{\log N}{\log p}\big(1+o(1)\big).$$

Ponieważ

$$\frac{\log p}{\log N}=\frac{\log N-q}{\log N},\quad \text{gdzie}\quad 0\leqslant q\leqslant\log 2,$$

otrzymujemy

$$\frac{\pi(p)}{\pi(N)}=\frac{p}{N}\big(1+o(1)\big). \tag{4}$$

Z faktu, że $\pi(x)$ jest funkcją niemalejącą oraz z równania (4) wynika, że funkcja π ma własności postulowane wyżej dla funkcji f. Wobec tego, w myśl lematu 2, wyrażenie $o(1)$ we wzorze (4) jest zbieżne do zera jednostajnie ze względu na p, gdy $N\to\infty$ i $N/2\leqslant p\leqslant N$.

Następnie, na mocy własności (c) funkcji f oraz lematu 2, mamy dla p z przedziału $\langle N/2, N\rangle$

$$\frac{f(p)}{f(N)}=\left(\frac{p}{N}\right)^s\big(1+o(1)\big)$$

i w myśl wzoru (4)

$$\frac{f(p)}{f(N)}=\left(\frac{\pi(p)}{\pi(N)}\right)^s\big(1+o(1)\big), \tag{5}$$

gdzie wyrażenie $o(1)$ należy rozumieć jak wyżej. Stąd

$$\begin{aligned} S_f(N)-S_f\left(\frac{N}{2}\right) &= f(N)\big(1+o(1)\big)\sum_{N/2\leqslant p\leqslant N}\left(\frac{\pi(p)}{\pi(N)}\right)^s = \\ &= f(N)\pi(N)\big(1+o(1)\big)\sum_{N/2\leqslant p\leqslant N}\left(\frac{\pi(p)}{\pi(N)}\right)^s\frac{1}{\pi(N)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Ponieważ $\pi(p)$ przebiega liczby naturalne w przedziale $\langle\pi(N/2),\pi(N)\rangle$, mamy

$$\sum_{N/2\leqslant p\leqslant N}\left(\frac{\pi(p)-1}{\pi(N)}\right)^s\frac{1}{\pi(N)}\leqslant\int_{\pi(N/2)/\pi(N)}^{1}y^s\,dy\leqslant\sum_{N/2\leqslant p\leqslant N}\left(\frac{\pi(p)}{\pi(N)}\right)^s\frac{1}{\pi(N)}.$$

Wynika stąd, że

$$\sum_{N/2\leqslant p\leqslant N}\left(\frac{\pi(p)}{\pi(N)}\right)^s\frac{1}{\pi(N)}=\int\limits_{\pi(N/2)/\pi(N)}^{1}y^s\,dy+o(1)=\frac{2^{s+1}-1+o(1)}{2^{s+1}(s+1)}.$$

Korzystając ze wzoru (1), napiszemy wzór (6) w postaci

$$S_f(N)-S_f\left(\frac{N}{2}\right)=\frac{2^{s+1}-1+o(1)}{2^{s+1}(s+1)}f(N)\frac{N}{\log N},\qquad \text{c. b. d. o.}$$

Dowód twierdzenia. Dla każdego k mamy

$$S_f(N)-S_f\left(\frac{N}{2^k}\right)=\sum_{j=0}^{k-1}\left(S_f\left(\frac{N}{2^j}\right)-S_f\left(\frac{N}{2^{j+1}}\right)\right). \tag{7}$$

Obierzmy dowolne $\varepsilon>0$ i ustalmy k tak, aby

$$\frac{1}{2^k}=r\varepsilon,\qquad \text{gdzie}\qquad 0<r<1. \tag{8}$$

Na mocy lematu 3 i własności (c) funkcji f mamy dla $j<k$:

$$S_f\left(\frac{N}{2^j}\right)-S_f\left(\frac{N}{2^{j+1}}\right)=\frac{2^{s+1}-1+o(1)}{2^{s+1}(s+1)}f\left(\frac{N}{2^j}\right)\frac{N}{2^j}\cdot\frac{1}{\log(N/2^j)}=$$

$$=\frac{2^{s+1}-1}{2^{s+1}(s+1)}\cdot\frac{f(N)}{2^{js}}\cdot\frac{N+o(N)}{2^j\log N}.$$

Wobec tego

$$\sum_{j=0}^{k-1}\left(S_f\left(\frac{N}{2^j}\right)-S_f\left(\frac{N}{2^{j+1}}\right)\right)=\frac{1-(1/2^k)^{s+1}}{s+1}f(N)\frac{N+o(N)}{\log N}.$$

Wzór (7) napisać zatem można w postaci

$$S_f(N)=S_f\left(\frac{N}{2^k}\right)+\frac{1-(1/2^k)^{s+1}}{s+1}f(N)\frac{N+o(N)}{\log N}. \tag{9}$$

Dalej mamy

$$S_f\left(\frac{N}{2^k}\right)=q\pi\left(\frac{N}{2^k}\right)f(N),\qquad \text{gdzie } 0<q<1,$$

skąd na podstawie wzoru (1)

$$S_f\left(\frac{N}{2^k}\right)=q\frac{N}{2^k\log N}f(N)\big(1+o(1)\big)=qr\varepsilon\frac{N}{\log N}f(N)\big(1+o(1)\big).$$

Otrzymujemy ostatecznie ze wzoru (8) i (9)

$$S_f(N)=\left(qr\varepsilon+\frac{1-(r\varepsilon)^{s+1}}{s+1}\right)f(N)\frac{N}{\log N}\big(1+o(1)\big)$$

skąd, ze względu na dowolność ε oraz warunki $0 < r < 1$ i $0 < q < 1$, wynika

$$S_f(N) = \frac{1+o(1)}{s+1} f(N) \frac{N}{\log N}, \qquad \text{c. b. d. o.}$$

2. Udowodnimy teraz (opierając się na wzorze (2)) twierdzenie o sumie czynników pierwszych liczb $\leqslant N$.

TWIERDZENIE 2. *Zachodzą wzory*

$$s_1(N) = \sum_{n=2}^{N} \sum_{p|n} p = \frac{\pi^2+o(1)}{12} \cdot \frac{N^2}{\log N}, \tag{10}$$

$$s_2(N) = \sum_{n=2}^{N} \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{p^a|n} p = \frac{\pi^2+o(1)}{12} \cdot \frac{N^2}{\log N}. \tag{11}$$

Dowód. Dla dowodu wzoru (10) połóżmy $\sum_k = \sum_{p \leqslant N/(k+1)} \left[\frac{N}{p}\right] p$ i zauważmy, że dla liczb pierwszych p w przedziale $\left(\frac{N}{j+1}, \frac{N}{j}\right\rangle$ wartość $\left[\frac{N}{p}\right]$ wynosi j. Przy dowolnym naturalnym k, mamy

$$s_1(N) = \sum\nolimits_k + \sum_{N/(k+1)<p\leqslant N} \left[\frac{N}{p}\right] p = \sum\nolimits_k + \sum_{j=1}^{k} j \sum_{N/(j+1)<p\leqslant N/j} p =$$

$$= \sum\nolimits_k + \sum_{j=1}^{k} j\left(S\left(\frac{N}{j}\right) - S\left(\frac{N}{j+1}\right)\right) = \sum\nolimits_k + \sum_{j=1}^{k} S\left(\frac{N}{j}\right) - kS\left(\frac{N}{k+1}\right).$$

Obierzmy teraz dowolne $\varepsilon > 0$ i ustalmy k tak, aby $1/k < \varepsilon$. Na mocy wzorów (1) i (2), mamy

$$0 < \sum\nolimits_k \leqslant \sum_{p\leqslant N/(k+1)} N = N\pi\left(\frac{N}{k+1}\right) = \frac{1+o(1)}{k+1} \cdot \frac{N^2}{\log\big(N/(k+1)\big)} = \tag{12}$$

$$= \frac{1+o(1)}{k+1} \cdot \frac{N^2}{\log N} < \big(\varepsilon + o(1)\big) \frac{N^2}{\log N},$$

$$0 < \sum_{j=1}^{k} S\left(\frac{N}{j}\right) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1+o(1)}{2} \cdot \frac{N^2}{j^2 \log(N/j)} = \frac{1+o(1)}{2} \cdot \frac{N^2}{\log N} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j^2}, \tag{13}$$

$$0 < kS\left(\frac{N}{k+1}\right) = k\frac{1+o(1)}{2} \cdot \frac{N^2}{(k+1)^2 \log\big(N/(k+1)\big)} = \tag{14}$$

$$= \frac{k+o(1)}{2(k+1)^2} \cdot \frac{N^2}{\log N} < \left(\frac{\varepsilon}{2} + o(1)\right) \frac{N^2}{\log N}.$$

Dalej, ponieważ $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}=\frac{\pi^2}{6}$, mamy

$$\frac{\pi^2}{6}>\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j^2}=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{1}{j^2}>\frac{\pi^2}{6}-\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{1}{j(j-1)}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{k}>\frac{\pi^2}{6}-\varepsilon.$$

Nierówności (12), (13) i (14) dają

$$\left|s_1(N)-\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{N^2}{\log N}\right|<\big(2\varepsilon+o(1)\big)\frac{N^2}{\log N}.$$

Ze względu na dowolność ε wynika stąd, że

$$s_1(N)-\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{N^2}{\log N}=o(1)\frac{N^2}{\log N},$$

co dowodzi wzoru (10).

Dla dowodu wzoru (11) zauważmy, że

$$0<s_2(N)-s_1(N)=\sum_{n=2}^{N}\sum_{a=2}^{\infty}\sum_{p^a|n}p=\sum_{p\leqslant N}p\sum_{a=2}^{\infty}\left[\frac{N}{p^a}\right]<$$

$$<\sum_{p\leqslant N}\sum_{a=2}^{\infty}\frac{N}{p^{a-1}}=\sum_{p\leqslant N}\frac{N}{p-1}.$$

Jak wiadomo, $\sum_{p\leqslant N}1/p=O(\log\log N)$. Mamy więc

$$0<s_2(N)-s_1(N)<O(N\log\log N)=o\left(\frac{N^2}{\log N}\right).$$

Stąd i ze wzoru (10) wynika wzór (11).

3. Wreszcie dowiedziemy twierdzenia o sumie najmniejszych dzielników pierwszych liczb $\leqslant N$ i sumie takich dzielników nie przekraczających jednocześnie k-tej liczby pierwszej p_k, gdy $k\leqslant\log N$.

TWIERDZENIE 3. *Niech $\delta(n)$ oznacza najmniejszy dzielnik pierwszy liczby n, a*

$$\delta(n,p_k)=\begin{cases}\delta(n), & gdy\quad \delta(n)\leqslant p_k,\\ 0, & gdy\quad \delta(n)>p_k.\end{cases}$$

Zachodzą wzory

$$\sum_{n\leqslant N}\delta(n)=\frac{1+o(1)}{2}\cdot\frac{N^2}{\log N}, \tag{15}$$

$$\sum_{n\leqslant N}\delta(n,p_k)=\big(N+o(N)\big)\left(1+\sum_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{j-1}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\right),\quad \textit{jeśli } k\leqslant\log N. \tag{16}$$

Dowód. Dla dowodu wzoru (15) zauważmy, że jeśli n jest liczbą pierwszą, to $\delta(n) = n$; jeśli n jest liczbą złożoną to $\delta(n) \leqslant \sqrt{n}$.

Zatem

$$\sum_{n\leqslant N} \delta(n) = \sum_{p\leqslant N} \delta(p) + \sum_{\substack{n\leqslant N\\ n\neq p}} \delta(n) = S(N) + qN\sqrt{N},$$

gdzie $0 < q < 1$. Wzór (15) wynika teraz natychmiast ze wzoru (2).

Dla dowodu wzoru (16) zauważmy, że

$$\sum_{n\leqslant N} \delta(n, p_k) = \sum_{j=1}^{k} p_j \sum_{\substack{n\leqslant N\\ \delta_n = p_j}} 1. \tag{17}$$

Suma $\sum\limits_{\substack{n\leqslant N\\ \delta_n=p_j}} 1$ równa jest liczbie liczb naturalnych $\leqslant N/p_j$ niepodzielnych przez żadną liczbę pierwszą $< p_j$. Dla $j > 1$ mamy

$$\sum_{\substack{n\leqslant N\\ \delta(n)=p_j}} 1 = \sum_{d|p_1, p_2, \ldots, p_{j-1}} \mu(d)\left[\frac{N}{p_j d}\right] = \tag{18}$$

$$= \sum_{d|p_1, p_2, \ldots, p_{j-1}} \mu(d)\frac{N}{p_j d} + \sum_{d|p_1, p_2, \ldots, p_{j-1}} \mu(d)\lambda_{j,d},$$

gdzie μ jest funkcją Möbiusa, $|\lambda_{j,d}| < 1$. Zaś dla $j = 1$

$$\sum_{\substack{n\leqslant N\\ \delta(n)=p_1}} 1 = \left[\frac{N}{2}\right] = \frac{N}{2} + \lambda_1, \quad \text{gdzie} \quad 0 \leqslant \lambda_1 < 1. \tag{19}$$

Ze wzorów (17), (18) i (19) mamy:

$$\sum_{n\leqslant N} \delta(n, p_k) = N\left(1 + \sum_{j=2}^{k} \sum_{d|p_1, p_2, \ldots, p_{j-1}} \mu(d)\frac{1}{d}\right) + \lambda_1 + \sum_{j=2}^{k} \sum_{d|p_1, p_2, \ldots, p_{j-1}} \mu(d)\lambda_{j,d}.$$

Ponieważ, dla $j > 1$,

$$\sum_{d|p_1, p_2, \ldots, p_{j-1}} \frac{\mu(d)}{d} = \prod_{i=1}^{j-1}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \quad \text{oraz} \quad \sum_{d|p_1, p_2, \ldots, p_{j-1}} 1 = 2^{j-1},$$

mamy

$$\sum_{n\leqslant N} \delta(n, p_k) = N\left(1 + \sum_{j=2}^{k} \prod_{i=1}^{j-1}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\right) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j p_j 2^{j-1}, \quad \text{gdzie} \quad |\lambda_j| < 1.$$

Ale mamy

$$\Big|\sum_{j=1}^{k}\lambda_j p_j 2^{j-1}\Big| < \sum_{j=1}^{k} p_j 2^{j-1} < p_k \sum_{j=1}^{k} 2^{j-1} < p_k 2^k,$$

a na mocy założenia $k \leqslant \log N$ i ponieważ $e > 2$,

$$\frac{p_k 2^k}{N} \leqslant p_{\log N}\left(\frac{2}{e}\right)^{\log N} = \log N\cdot\log\log N\cdot\big(1+o(1)\big)\left(\frac{2}{e}\right)^{\log N} = o(1).$$

Wobec tego otrzymujemy ostatecznie

$$\sum_{n\leqslant N}\delta(n, p_k) = N\big(1+o(1)\big)\left(1+\sum_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{j-1}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\right),$$

c. b. d. o.

Prace cytowane

[1] J. Aczél, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, Basel Stuttgart 1961.

[2] E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, New York 1958.

М. Калецки (Варшава)

О НЕКОТОРЫХ СУММАХ РАСПРОСТРАНЕННЫХ НА ПРОСТЫЕ ЧИСЛА ИЛИ ПРОСТЫЕ ДЕЛИТЕЛИ

РЕЗЮМЕ

Пусть p означает простые числа. Доказывается следующее обобщение формулы Ландауа

$$\sum_{p\leqslant N} p = \frac{1+o(1)}{2}\cdot\frac{N^2}{\log N}.$$

Если функция f, которая определена для всех $x > 0$, выполняет следующие условия:

(a) $f(x) > 0$,

(b) $f(x)$ неубываювшая функция,

(c) для каждего $u > 0$ существует граница $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(ux)}{f(x)} = \varphi(u)$,

тогда

$$\sum_{p\leqslant N} f(p) = \frac{1+o(1)}{s+1} f(N)\frac{N}{\log N} \quad \text{где} \quad s = \log\varphi(e) \geqslant 0.$$

Доказывается также что: (1) Сумма простых делителей целых чисел $\leqslant N$ равняется асимптотически $\dfrac{\pi^2}{12}\cdot\dfrac{N^2}{\log N}$. (2) Сумма наименьших простых делителей

целых чисел $\leqslant N$ равняется асимптотически $\frac{1}{2}\cdot\frac{N^2}{\log N}$. (3) Сумма наименьших простых делителей целых чисел $\leqslant N$, если эти делители не превышают p_k и $k \leqslant \log N$, равняется асимптотически $N\left(1+\sum_{j=2}^{k}\prod_{i=1}^{j-1}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\right)$.

M. Kalecki (Warszawa)

ON CERTAIN SUMS EXTENDED OVER PRIME NUMBERS OR PRIME FACTORS

SUMMARY

Let p denote prime numbers. The following generalization of Landau's formula

$$\sum_{p\leqslant N} p = \frac{1+o(1)}{2}\cdot\frac{N^2}{\log N}$$

is proved:

If a function f defined for all $x > 0$ satisfies the conditions

(a) $f(x) > 0$,

(b) $f(x)$ is non-decreasing,

(c) for every $u > 0$ there exists a limit $\lim_{x\to\infty}\frac{f(ux)}{f(x)} = \varphi(u)$,

then

$$\sum_{p\leqslant N} f(p) = \frac{1+o(1)}{s+1} f(N)\frac{N}{\log N} \quad \text{where} \quad s = \log\varphi(e) \geqslant 0.$$

In addition it is proved that: (1) The sum of prime factors of integers $\leqslant N$ is assymptotically equal to $\frac{\pi^2}{12}\cdot\frac{N^2}{\log N}$. (2) The sum of the smallest prime factors of integers $\leqslant N$ is assymptotically equal to $\frac{1}{2}\cdot\frac{N^2}{\log N}$. (3) The sum of the smallest prime factors of integers $\leqslant N$, if these factors do not exceed p_k and $k \leqslant \log N$, is assymptotically equal to $N\left(1+\sum_{j+2}^{k}\prod_{i=1}^{j-1}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)\right)$.