ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE VIII (1963)

J. MUSIAŁEK (Kraków)

Uogólnienie twierdzenia Ossermana dotyczącego nierówności różniczkowej $\Delta u \geqslant f(u)$

1. R. Osserman [1] podał warunki konieczne i wystarczające na istnienie rozwiązań nierówności różniczkowej

$$\Delta u \geqslant f(u),$$

gdzie $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u''_{x_i x_i}$ jest laplasjanem funkcji $u(x_1, \ldots, x_n)$.

W pracy niniejszej podamy twierdzenia, które są uogólnieniami twierdzeń zawartych w pracy [1]. Twierdzenia te dotyczą istnienia rozwiązania nierówności różniczkowej

$$L(u) = \sum_{i=1}^{n} \left(p(r)u'_{x_i}\right)'_{x_i} \geqslant f(u), \tag{1}$$

gdzie

$$r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2.$$

2. Podamy najpierw kilka lematów.

LEMAT 1. *Jeżeli* 1° $f(t)$ *jest funkcją ciągłą, dodatnią i niemalejącą określoną dla wszystkich* t *rzeczywistych,* 2° $p(z) \in C^1$ *dla* $z \geqslant 0$, 3° $p(z) > 0$, 4° *istnieje funkcja* $\varphi(z)$ *określona w prawostronnym sąsiedztwie zera* $(0, R)$ *spełniająca tamże równanie*

$$\frac{1}{z^{n-1}}\left(z^{n-1} p(z)\varphi'(z)\right)' = f\left(\varphi(z)\right) \tag{2}$$

oraz warunki (α) $\varphi(z) \to \infty$ *gdy* $z \to R$, (β) $\varphi(z)$ *jest przedłużalna do punktu* $z = 0$, *tzn. istnieją* $\lim \varphi(z)$ *oraz* $\lim \varphi'(z) = 0$ *dla* z *dążącego do zera, to każde rozwiązanie* $u(X)$, $X(x_1, \ldots, x_n)$ *klasy* C^2, *równania*

$$L(u) = \sum_{i=1}^{n} \left(p(r)u'_{x_i}\right)'_{x_i} = f(u) \tag{3}$$

określone w kuli

$$(4) \qquad x_1^2+\ldots+x_n^2 \leqslant R^2,$$

spełnia nierówność $u(X) \leqslant \varphi(r)$ *w każdym punkcie wewnętrznym* X *zbioru* (4).

Dowód. Weźmy pod uwagę funkcję

$$(5) \qquad v(X) = u(X)-\varphi(r).$$

Wykażemy, że funkcja $v(X)$ jest niedodatnia dla

$$(6) \qquad 0 \leqslant r < R.$$

Dla dowodu niewprost, załóżmy, że $v(X) > 0$ w pewnym punkcie X_0 zbioru (6). Otóż

$$(7) \qquad v(X) \to -\infty, \quad \text{gdy} \quad r \to R.$$

Ponieważ $v(X) \in C^2$ w zbiorze (4), więc na mocy (7) funkcja $v(X)$ osiąga maksimum dodatnie w co najmniej jednym punkcie wewnętrznym X_1 zbioru (4). Wobec tego, $v(X_1) > 0$.

A więc, na mocy (5), mamy

$$u > \varphi \quad \text{w pewnym otoczeniu } Q(X_1) \text{ punktu } X_1.$$

Wobec założenia 1°

$$f(u) \geqslant f(\varphi) > 0$$

w tym zbiorze. Ponadto, na podstawie (2) oraz (3), otrzymujemy

$$L(u) = f(u) \geqslant f(\varphi) \quad \text{oraz} \quad L(\varphi) = f(\varphi).$$

Przeto

$$L(v) = L(u-\varphi) = L(u)-L(\varphi) \geqslant f(\varphi)-f(\varphi) = 0,$$

czyli

$$L(v) \geqslant 0 \quad \text{w zbiorze } Q(X_1).$$

W takim razie

$$L(v) = \sum_{i=1}^{n} \big(p(r)v'_{x_i}\big)'_{x_i} + 0\cdot v \geqslant 0 \quad \text{w zbiorze } Q(X_1).$$

Na podstawie twierdzenia E. Hopfa [2], $v(X) \equiv 0$ w $Q(X_1)$, wbrew założeniu.

Wykażemy teraz twierdzenie dotyczące istnienia rozwiązania $\varphi(x)$ równania różniczkowego (2) przedłużalnego do brzegu $x = 0$, przy czym

$\varphi'(0) = 0$, $\varphi(0) = a$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą. Weźmy pod uwagę równanie

$$(8) \qquad \big(t^{n-1}p(t)\varphi'(t)\big)' = t^{n-1}f\big(\varphi(t)\big), \qquad t > 0.$$

Po odpowiednim scałkowaniu obu stron równania (8) otrzymujemy

$$\int_0^s \big(t^{n-1}p(t)\varphi'(t)\big)'dt = \int_0^s t^{n-1}f\big(\varphi(t)\big)dt, \qquad s > 0, \qquad n \geqslant 2,$$

skąd

$$s^{n-1}p(s)\varphi'(s) = \int_0^s t^{n-1}f\big(\varphi(t)\big)dt$$

oraz

$$(9) \qquad \varphi'(s) = \frac{1}{s^{n-1}p(s)}\int_0^s t^{n-1}f\big(\varphi(t)\big)dt.$$

Całkując obie strony (9) otrzymujemy

$$\int_0^x \varphi'(s)ds = \int_0^x \frac{ds}{s^{n-1}p(s)}\int_0^s t^{n-1}f\big(\varphi(t)\big)dt, \qquad x > 0.$$

Mamy stąd równanie całkowe

$$(10) \qquad \varphi(x) = a + \int_0^x \frac{ds}{s^{n-1}p(s)}\int_0^s t^{n-1}f\big(\varphi(t)\big)dt$$

równoważne równaniu różniczkowemu (2) z warunkami początkowymi

$$(11) \qquad \varphi(0) = a, \qquad \varphi'(0) = 0.$$

Udowodnimy, że równanie (10), a więc i równoważne mu równanie (2), ma rozwiązanie $\varphi(x)$ określone w pewnym przedziale $[0, A)$, $A > 0$, spełniające warunki (11). Dowód przeprowadzimy metodą punktu stałego. Weźmy pod uwagę zbiór Z funkcji ψ klasy C na odcinku $[0, b]$ (b liczba stała dodatnia), spełniających warunki $\psi(0) = a$, $\psi'(0) = 0$. Niech

$$\|\psi\| = \sup_{x\in[0,b]}|\psi(x)| + \sup_{\substack{x,y\in[0,b]\\ x\neq y}}\left|\frac{\psi(x)-\psi(y)}{x-y}\right| + \sup_{0\leqslant y<x<b}\left|\frac{\psi(x)-\psi(y)}{x(x-y)}\right|.$$

Niech $R(M, b)$ oznacza domknięcie zbioru $\{\psi\colon \|\psi\| \leqslant M\}$, gdzie M jest ustaloną liczbą większą od a. $R(M, b)$ jest zbiorem funkcji ciągłych i wspólnie ograniczonych przez M.

Wykażemy, że

1° *spełniają one warunek Lipschitza ze stałą* M,

2° *każda z tych funkcji ma w punkcie* 0 *pochodną prawostronną równą zeru.*

Niech $\chi(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(x)$, gdzie $\psi_n \in Z$, $\|\psi_n\| \leqslant M$.

Dowód 1°.

$$|\chi(x)-\chi(y)| = \lim_{n\to\infty}|\psi_n(x)-\psi_n(y)| \leqslant M|x-y|.$$

Dowód 2°.

$$\limsup_{x\to 0}\left|\frac{\chi(x)-a}{x}\right| = \limsup_{x\to 0}\left(\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\psi_n(x)-a}{x}\right|\right) =$$

$$= \limsup_{x\to 0}\left(\lim_{n\to\infty}\psi_n'(\xi_n)\right),$$

gdzie $\xi_n \in (0, x)$, a pochodna ψ' jest pochodną aproksymatywną. Z definicji $R(M, b)$ i definicji normy wynika, że

$$|\psi_n'(\xi_n)| \leqslant Mx,$$

skąd

$$\limsup_{x\to 0}\left|\frac{\chi(x)-a}{x}\right| = 0, \quad \text{czyli} \quad \chi'(0) = 0.$$

$R(M, b)$ jest domknięciem zbioru wypukłego w przestrzeni powstałej przez uzupełnienie zbioru Z względem normy. $R(M, b)$ jest zbiorem zwartym i wypukłym funkcji ciągłych na $[a, b]$, mających dla $x = 0$ pochodną prawostronną równą zeru i unormowanych za pomocą normy

$$\|\chi\| = \sup_{x\in[0,b]}|\chi(x)| + \sup_{\substack{x,y\in[0,b]\\ x\neq y}}\left|\frac{\chi(x)-\chi(y)}{x-y}\right| + \sup_{0\leqslant x<y\leqslant b}\left|\frac{\chi(x)-\chi(y)}{x(x-y)}\right|.$$

Niech $f(u)$ będzie funkcją ciągłą dla u rzeczywistych, $p(t)$ funkcją ciągłą i dodatnią na $[0, b]$. Wykażemy teraz

TWIERDZENIE 1. *Równanie* (10) *ma rozwiązanie w pewnym przedziale* $[0, R]$, $R > 0$.

Dowód. Oprzemy się na następującym twierdzeniu Schaudera [3]: *Jeżeli operator ciągły K w przestrzeni Banacha przeprowadza zbiór zamknięty, zwarty i wypukły w siebie, wówczas w tym zbiorze istnieje punkt stały.*

Oznaczmy przez K operator całkowy występujący po prawej stronie równania (10). Równanie (10) jest postaci

$$\varphi = a + K\varphi.$$

Oszacujemy normę $\|K\psi\|$. Niech $N = \sup\limits_{\|\psi\|\leqslant M} |K\psi|$ oraz $\mu = \inf\limits_{s\in[0,b]} p(s)$. Przy tych oznaczeniach mamy

$$|(K\psi)(x)| \leqslant \frac{N}{2\mu n}x^2 \quad \text{oraz} \quad \left|\frac{d}{dx}(K\psi)(x)\right| \leqslant \frac{N}{n\mu}x,$$

skąd

$$\|a+K\psi\| \leqslant |a|+\frac{N}{n\mu}x+\frac{N}{2n\mu}x^2.$$

Wyznaczamy liczbę $c\in(0, b)$, taką że na odcinku $(0, c)$ zachodzi nierówność $\|a+K\psi\| \leqslant M$, gdy $\|\psi\| \leqslant M$ (gdy $|a|-M < 0$, wówczas taka liczba $c > 0$ istnieje). W tym celu rozwiązujemy nierówność

$$\frac{N}{2n\mu}x^2+\frac{N}{n\mu}x+|a| \leqslant M.$$

Niech $a = \min(b, c)$ i niech $R(c, M)$ oznacza podzbiór zbioru $R(b, M)$ funkcji określonych na $(0, c)$. Operator $a+K\varphi$ przekształca $R(c, M)$ w siebie, a więc na mocy twierdzenia Schaudera istnieje funkcja $\varphi(x)$ określona na $(0, c)$, spełniająca równanie $\varphi(x) = a+K\varphi$.

Z kolei udowodnimy

LEMAT 2. *Jeżeli dla wszystkich t rzeczywistych $f(t)$ jest funkcją spełniającą warunki:* 1° $f(t) > 0$, 2° $f'(t)$ *ciągła i nieujemna,* 3° $p(z)\in C^1$ *dla* $z \geqslant 0$, 4° $p(z)$ *dodatnia dla* $z \geqslant 0$, *to nierówność* (1) *ma rozwiązanie na całej hiperpłaszczyźnie* $x_{n+1} = 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rozwiązanie* $\varphi(z)$ *równania* (2), *takie że*

(2a) $\varphi(z)$ *jest przedłużalna wraz z pochodną do punktu* $z = 0$, *przy czym* $\varphi'(0) = 0$.

Dowód wystarczalności warunku. Wykażemy, że jeżeli istnieje funkcja $\varphi(z)$ spełniająca równanie (2) oraz warunki (2a), wówczas istnieje funkcja $u(X)$ spełniająca nierówność (1) na całej hiperpłaszczyźnie $x_{n+1} = 0$. Wystarczy w tym celu przyjąć $u(X) = \varphi(r)$. Wówczas funkcja $u(X)$ spełnia równanie (2), a więc i nierówność (1).

Dowód konieczności warunku. Wykażemy, że jeżeli istnieje funkcja $u(X)$ klasy C^2 na całej hiperpłaszczyźnie $x_{n+1} = 0$ spełniająca nierówność (1), to istnieje funkcja $\varphi(z)$ spełniająca równanie (2) dla wszystkich $z \geqslant 0$ oraz warunki (2a). Dowód przeprowadzimy dla twierdzenia transponowanego, tzn. wykażemy, że jeżeli nie istnieje funkcja $\varphi(z)$ spełniająca równanie (2) dla wszystkich $z > 0$ oraz warunki (2a), to nie istnieje funkcja $u(X)$ klasy C^2 na całej hiperpłaszczyźnie $x_{n+1} = 0$, która spełniałaby na tej hiperpłaszczyźnie nierówności (1).

Istotnie, niech a oznacza dowolną liczbę rzeczywistą, zaś $[0, R)$ maksymalny przedział istnienia rozwiązania równania (2) z warunkami (2a), przy czym $\varphi(0) = a$. Wobec tego, na podstawie założenia 1° oraz równania (2), funkcja $z^{n-1}p(z)\varphi'(z)$ ma pochodną dodatnią dla $z > 0$. Ponieważ $\varphi'(0) = 0$, przeto funkcja $z^{n-1}p(z)\varphi'(z)$ jest rosnąca i dodatnia; zatem $\varphi(z) \to \infty$, gdy $z \to R$. Pozwala to na zastosowanie lematu 1. Niech $u(X)$ oznacza ustalone rozwiązanie nierówności (1), a $\varphi_a(r)$, $-\infty < a < +\infty$, jednoparametrową rodziną rozwiązań równania (2) spełniającą warunki (2a). Na mocy lematu 1 każde rozwiązanie $u(X)$ nierówności (1) spełnia warunek $u(X) \leqslant \varphi(r)$ dla $0 \leqslant r < R$. W szczególności $u(0) \leqslant \varphi(0) = a$, a więc $u(0) \leqslant a$. Ponieważ a jest dowolną liczbą rzeczywistą, przeto $u(0) = -\infty$, co jest sprzeczne z założeniem regularności funkcji $u(X)$.

Wykażemy teraz

LEMAT 3. *Jeżeli* $f(u) > 0$, $f'(u) \geqslant 0$, $f'(u) \epsilon C$, $-\infty < u < +\infty$, $p(r) > 0$ *dla* $r \geqslant 0$, *istnieje rozwiązanie* $\varphi(x)$ *równania* (2) *w przedziale* $[0, R)$, *punkt* $x = R$ *jest punktem osobliwym dla* $\varphi(x)$ *oraz*

$$0 < \int_0^\infty \Big(\int_0^v f(u)\,du\Big)^{-1/2} dv < \infty,$$

i jeśli $m = \inf_{x\epsilon[0,R]} p(x)$, $M = \sup_{x\epsilon[0,R]} p(x)$, *to istnieje stała* $C > 0$, *taka, że*

$$C \frac{m}{\sqrt{2M}} \int_0^\infty \Big(\int_0^v f(u)\,du\Big)^{-1/2} dv < R.$$

Dowód. Ponieważ w równaniu (10) funkcje $p(s)$, $f(u)$ oraz $\varphi'(x)$ są dodatnie, przeto $\varphi(x)$ jest funkcją rosnącą; zatem $x = R$ jest biegunem funkcji $\varphi(x)$, przy czym $\varphi(x) \to \infty$ dla $x \to R$. Z równania

$$\big(p(x)\varphi'(x)\big)' + \frac{n-1}{x} p(x)\varphi'(x) = f\big(\varphi(x)\big)$$

oraz odpowiednich założeń o funkcjach $p(x)$, $f(u)$ i $\varphi'(x)$ otrzymujemy nierówność $(p\varphi')' < f(\varphi)$, skąd

$$p\varphi'(p\varphi')' < p\varphi' f(\varphi) < Mf(\varphi)\varphi',$$

czyli

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dx}\big(p(x)\varphi'(x)\big)^2 < Mf(\varphi)\frac{d\varphi(x)}{dx}. \tag{12}$$

Rozróżnimy teraz dwa przypadki: I. gdy $\varphi(0) \geqslant 0$, II. gdy $\varphi(0) < 0$.

W przypadku I, po scałkowaniu obu stron nierówności (12) w przedziale od zera do $x > 0$, otrzymujemy nierówność

$$(13)\qquad \big(m\varphi'(x)\big)^2 \leqslant 2M\int_a^{\varphi(x)} f(u)\,du \leqslant 2M\int_0^{\varphi(x)} f(u)\,du,$$

skąd

$$(14)\qquad dx > \frac{m}{\sqrt{2M}}\Big(\int_0^{\varphi(x)} f(u)\,du\Big)^{-1/2}\varphi'(x)\,dx.$$

Całkując obustronnie nierówność (14) od zera do R i uwzględniając, że $\varphi(x)\to\infty$, gdy $x\to R$, otrzymujemy, po zmianie zmiennej, nierówność

$$R > \frac{m}{\sqrt{2M}}\int_0^{\infty}\Big(\int_0^{v} f(u)\,du\Big)^{-1/2}dv.$$

W przypadku II zamiast nierówności (13) otrzymujemy nierówność

$$\big(m\varphi'(x)\big)^2 \leqslant 2M\int_a^{\varphi(x)} f(u)\,du = 2M\int_a^{0} f(u)\,du + 2M\int_0^{\varphi(x)} f(u)\,du \leqslant$$
$$\leqslant 2M\int_0^{\varphi(x)} f(u)\,du + 2M\int_0^{\varphi(x)} f(u)\,du = 4m\int_0^{\varphi(x)} f(u)\,du$$

dla x dostatecznie bliskich R. Następnie, rozumując podobnie jak w przypadku I, otrzymujemy nierówność

$$R > \frac{m}{2\sqrt{M}}\int_0^{\infty}\Big(\int_0^{v} f(u)\,du\Big)^{-1/2}dv.$$

Wykażemy teraz twierdzenie odwrotne do lematu 3, a mianowicie

LEMAT 4. *Jeżeli*

1° $f(u) > 0$, $f'(u) \geqslant 0$, $f'(u)\in C$ *dla wszystkich* u *rzeczywistych*,

2° $\int_0^{\infty}\big(\int_0^{v} f(u)\,du\big)^{-1/2}dv = \infty$,

3° $p(x)\in C^1$ *dla* $x\in[0,\infty)$ *oraz* $m_0 = \inf_{x\in[0,\infty]} p(x) > 0$, $M_0 = \sup_{x\in[0,\infty)} p(x)$ (M_0 — *liczba skończona*), *to istnieje rozwiązanie równania całkowego* (10) *w przedziale* $[0,\infty)$.

D o w ó d. Niech $N > 0$ oraz

$$f_N(u) = \begin{cases} f(u) & \text{dla } u\in[0,N),\\ f(N)+u^2 & \text{dla } u > N.\end{cases}$$

Z własności funkcji $f_N(u)$ wynika, że $f_N(u) \to f(u)$ niemal jednostajnie, gdy $N \to \infty$. Niech $\varphi_N(x)$ oznacza rozwiązanie równania (10), w którym $f(u)$ zastępujemy przez $f_N(u)$. Z twierdzenia 1 oraz lematu 3 wynika, że w przedziale $[0, r_N]$, gdzie

$$r_N = C\frac{m_0}{\sqrt{2M_0}}\int_0^\infty\Big(\int_0^v f_N(u)du\Big)^{-1/2}dv < \infty,$$

istnieje rozwiązanie $\varphi_N(x)$, przy czym $\varphi_N(x) = \varphi(x)$ w przedziale $\big(0, f(\varphi(N))\big)$ i $\varphi_N(x) \to \varphi(x)$, gdy $N \to \infty$. Wobec założenia 2°, $r_N \to \infty$, gdy $N \to \infty$. Wobec tego funkcja $\varphi(x) = \lim\limits_{N\to\infty}\varphi_N(x)$ istnieje w całym przedziale $[0, \infty)$.

3. Na podstawie poprzednich lematów udowodnimy

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli* 1° $f(t)$ *jest dodatnia i ciągła dla wszystkich* t *rzeczywistych,* 2° *istnieje liczba dodatnia* t_0, *taka że* $f'(t) \geqslant 0$ *dla* $t \geqslant t_0 > 0$, 3° $p(z)\in C^1$, $p'(z) \geqslant 0$ *dla* $z \geqslant 0$, 4° *istnieją liczby dodatnie* m_0 *oraz* M_0 *takie, że* $m_0 \leqslant p(z) \leqslant M_0$, 5° *ma miejsce nierówność*

$$0 < \int_0^\infty\Big(\int_0^t f(s)ds\Big)^{-1/2}dt < \infty,$$

to nie istnieje funkcja $u(X)\in C^2$ *na całej hiperpłaszczyźnie* $x_{n+1} = 0$ *oraz hiperkula* S, *dla których spełnione byłyby warunki*

$$\begin{cases} L(u) > 0 & \textit{na całej hiperpłaszczyźnie } x_{n+1} = 0, \\ L(u) \geqslant f(u) & \textit{w zewnętrzu } S. \end{cases} \tag{15}$$

Udowodnimy twierdzenie transponowane, tzn.

TWIERDZENIE. *Jeżeli istnieje funkcja* $u(X)\in C^2$ *na całej hiperpłaszczyźnie* $x_{n+1} = 0$ *oraz hiperkula* S, *taka że spełnione są warunki* (15), *to*

$$\int_0^\infty\Big(\int_0^t f(s)ds\Big)^{-1/2}dt = \infty.$$

Dowód. Na podstawie twierdzenia E. Hopfa [2] funkcja $u(X)$ osiąga maksimum równe t_1 na $\mathrm{Fr}(S)$. Ponadto, na podstawie twierdzenia Weierstrassa, funkcja $L(u)$ osiąga minimum $m > 0$ na $\mathrm{Fr}(S)$ ze względu na ten zbiór. Weźmy pod uwagę funkcję pomocniczą $g(t)$ klasy C^1 dla wszystkich t rzeczywistych, która spełnia warunki: a) $g'(t) \geqslant 0$, dla wszystkich t, b) $g(t) \leqslant m$ dla $t \leqslant t_1$, c) $g(t) \leqslant f(t)$ dla wszystkich t, d) $g(t) \geqslant f(t)-1$ dla $t \geqslant t_2 > t_1$, e) $g(t) > 0$ dla wszystkich t, to

$$L(u) \geqslant g(u) \quad \text{w całej przestrzeni.}$$

Na podstawie lematów 2, 3, oraz 4, po zastąpieniu funkcji $f(t)$ przez $g(t)$ otrzymujemy

$$\int_0^\infty \Big(\int_0^t g(s)\,ds\Big)^{-1/2} dt = \infty. \tag{16}$$

Wykażemy teraz, że warunek (16) implikuje warunek

$$\int_0^\infty \Big(\int_0^t f(s)\,ds\Big)^{-1/2} dt = \infty.$$

Istotnie, na podstawie warunku d) mamy

$$f(s) \leqslant g(s)+1 < 2g(s) \qquad \text{dla} \qquad s \geqslant t_3 > t_2,$$

skąd

$$\int_{t_3}^t f(s)\,ds \leqslant 2\int_0^t g(s)\,ds, \qquad t > t_3.$$

Otrzymujemy oszacowanie

$$\frac{1}{\sqrt{2\int_0^t g(s)\,ds}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\int_{t_3}^t f(s)\,ds}} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^t f(s)\,ds - \int_0^{t_3} f(s)\,ds}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{\int_0^t f(s)\,ds - \frac{1}{2}\int_0^t f(s)\,ds}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\int_0^t f(s)\,ds}}$$

dla wszystkich t dostatecznie dużych. Stąd wynika, że

$$\infty = \int_{t_3}^\infty \Big(2\int_0^t g(s)\,ds\Big)^{-1/2} dt \leqslant \int_{t_3}^\infty \Big(\frac{1}{2}\int_0^t f(s)\,ds\Big)^{-1/2} dt,$$

a więc

$$\int_0^\infty \Big(\int_0^t f(s)\,ds\Big)^{-1/2} dt = \infty.$$

Prace cytowane

[1] R. Osserman, *On the inequality $\Delta u \geqslant f(u)$*, Pacific Journ. Math. 7 (1957), str. 1641-1647.

[2] M. Krzyżański, *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego, część I*, Warszawa 1957.

[3] L. E. Elsgolc, (Л. Э. Эльсгольц), *Качественные методы в математическом анализе*, Москва 1955.

Ян Мусялэк (Краков)

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ Р. ОССЕРМАНА КАСАЮЩЕЙСЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО НЕРАВЕНСТВА $\Delta u \geqslant f(u)$

РЕЗЮМЕ

В работе обобщается теорему данную Р. Оссерманом [1], которая решает задачу существования решения неравенства $\Delta u \geqslant f(u)$ на более общее неравенство

$$L(u) = \sum_{i=1}^{n} (p(r)u'_{x_i})'_{x_i} \geqslant f(u), \qquad r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2. \tag{1}$$

Автор исследует зависимость между сходимостью интеграла

$$\int_0^\infty \Big(\int_0^t fs)\,ds\Big)^{-1|2}\,dt$$

и существованием решения неравенства (1).

Неполное у Оссермана [1] доказательство теоремы о существовании решения интегрального уравнения

$$\varphi(x) = a + \int_0^x \frac{ds}{s^{n-1}p(s)} \int_0^s t^{n-1} f(\varphi(t))\,dt$$

в настоящей работе сделанное подробно. Оказывается, что данный Оссерманом метод доказательства упомянутой теоремы к этой задаче неприменим.

J. Musiałek (Kraków)

ON THE GENERALISATION OF OSSERMAN'S THEOREM RELATED TO THE DIFFERENTIAL INEQUALITY $\Delta u \geqslant f(u)$

SUMMARY

The object of this paper is the generalization of Osserman's theorem on the conditions of local and integral solutions of the integral inequality

$$\Delta u \geqslant f(u)$$

(Δ means the laplacian) to a more general inequality

$$L(u) = \sum_{i=1}^{n} (p(r)u'_{x_i})'_{x_i} \geqslant f(u), \qquad r^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2. \tag{1}$$

The relations between the convergence of the integral

$$\int_0^\infty \Big(\int_0^t f(s)\,ds\Big)^{-1/2}\,dt$$

and of the existence of solutions of inequality (1) are considered. A complete proof of the existence of solutions of the integral equation

$$\varphi(x) = a + \int_0^x \frac{ds}{s^{n-1}p(s)} \int_0^s t^{n-1} f(\varphi(t))\,dt$$

is given in detail. (In Osserman's paper this equation is considered in a special form, but the method of proof suggested there cannot be applied both to his special case and to ours.)