ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE VIII (1963)

J. MUSIAŁEK (Kraków)

O oscylacyjności rozwiązań pewnej klasy równań poliharmonicznych

1. W pracy niniejszej podamy twierdzenie o oscylacyjności rozwiązań równania

(1) $$\Delta^{(p)}u(X)+C_{p-1}\Delta^{(p-1)}u(X)+\ldots+C_0u(X) = 0, \qquad X(x_1, \ldots, x_n),$$

gdzie $C_0, \ldots, C_{p-1}$ są liczbami stałymi, zaś p jest liczbą naturalną. Zastosujemy przy tym pewne twierdzenia o wartości średniej danej funkcji $u(X)$ po powierzchni kuli i po objętości kuli.

2. Podamy teraz pewne definicje i lematy, z których będziemy korzystać.

DEFINICJA 1. Jeśli $u(X)$ jest funkcją całkowalną na brzegu $\operatorname{Fr} K(R, X)$ kuli $K(R, X)$ o środku X i o promieniu R, to wyrażenie

$$m(R, X, u) = \frac{1}{\Omega_n R^{n-1}} \iint\limits_{\operatorname{Fr} K(R,X)} u(Y)dS,$$

gdzie Ω_n oznacza miarę powierzchni kuli n-wymiarowej jednostkowej, nazywamy *wartością średnią funkcji $u(X)$ po powierzchni kuli* $K(R, X)$, [1].

DEFINICJA 2. Jeżeli $u(X)$ jest funkcją całkowalną w kuli $K(R, X)$ o środku X i o promieniu R, to wyrażenie

$$M(R, X, u) = \frac{1}{V_n R^n} \iiint\limits_{K(R,X)} u(Y)dV,$$

gdzie V_n jest miarą objętościową kuli n-wymiarowej jednostkowej, nazywamy *wartością średnią funkcji $u(X)$ po objętości kuli* $K(R, X)$, [1].

DEFINICJA 3. Funkcję $u(X)$ nazywamy *Δ-różniczkowalną w obszarze D*, jeżeli funkcja $u(X)$ ma w D ciągłe pochodne

$$\frac{\partial u(X)}{\partial x_\nu}, \quad \frac{\partial^2 u(X)}{\partial x_\nu^2}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

a *$\Delta^{(l)}$-różniczkowalną*, jeżeli funkcja $\Delta^{(l-1)}u(X)$ jest Δ-różniczkowalną w obszarze D, [2].

LEMAT 1. *Jeżeli* $u(X)$ *jest funkcją* $\Delta^{(l)}$*-różniczkowalną w obszarze* $D \subset R_n$ $(n \geqslant 2)$, *to dla każdej kuli* $K(R, X) \subset D$

$$(2) \quad m(R, X, u) = a_{n,0}\, u(X) + a_{n,1} R^2 \Delta u(X) + \ldots + \\ + a_{n,l-1} R^{2(l-1)} \Delta^{(l-1)} u(X) + Q,$$

gdzie

$$a_{n,i} = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad i = 0, \\ \dfrac{1}{2^i \cdot i!\, n(n+2)\ldots(n+2i-2)} & \text{dla} \quad i \geqslant 1, \end{cases}$$

$$Q = a_{n,l} R^{2l} \Delta^{(l)} u(\overline{X}), \qquad \overline{X} \epsilon \overline{K(R, X)}.$$

Wzór (2) nazywamy wzorem Taylora na wartość średnią funkcji $u(X)$ po powierzchni kuli $K(R, X)$, [3].

LEMAT 2. *Jeżeli* $u(X)$ *jest rozwiązaniem analitycznym równania* (1) *w obszarze* D, *to dla każdej liczby naturalnej* $n \geqslant p$

$$\Delta^{(n)} u = A_{p-1}^{(n)} \Delta^{(p-1)} u + \ldots + A_0^{(n)} u,$$

przy czym współczynniki $A_j^{(n)}$ *są liczbami stałymi spełniającymi nierówności*

$$(3) \qquad |A_j^{(n)}| < (n-2)(C+1)^{n-2}, \qquad j = 0, 1, \ldots, p-1,$$

gdzie

$$C = \max(|C_j|), \qquad j = 0, 1, \ldots, p-1.$$

Dowód przez indukcję. Dla $n = p$ z równania (1) otrzymujemy

$$(4) \qquad \Delta^{(p)} u = -C_{p-1} \Delta^{(p-1)} u - \ldots - C_0 u.$$

Załóżmy, że dla $n = k \geqslant p$

$$(5) \qquad \Delta^{(k)} u = A_{p-1}^{(k)} \Delta^{(p-1)} u + \ldots + A_0^{(k)} u,$$

zaś

$$|A_j^{(k)}| < (k-2)(C+1)^{k-2}, \qquad j = 0, 1, \ldots, p-1.$$

Wykażemy, że

$$(6) \qquad \Delta^{(k+1)} u = A_{p-1}^{(k+1)} \Delta^{(p-1)} u + \ldots + A_0^{(k+1)} u,$$

przy czym

$$(7) \qquad |A_{p-j}^{(k+1)}| < (k-1)(C+1)^{k-1}, \qquad j = 1, \ldots, p.$$

W tym celu porównujemy laplasjany obu stron równania (5) i wyrażamy $\Delta^{(p)} u$ za pomocą wzoru (4). W ten sposób otrzymujemy wzór (6), w którym

$$(8) \quad A_0^{(k+1)} = -A_{p-1}^{(k)} C_0, \quad \ldots, \quad A_j^{(k+1)} = A_{j-1}^{(k)} - A_{p-1}^{(k)} C_j, \quad j = 1, \ldots, p-1.$$

Przy tym łatwo sprawdzić nierówności (7).

LEMAT 3. *Jeżeli $u(X)$ jest analitycznym rozwiązaniem równania* (1) *w obszarze D, to dla każdej kuli $K(R, X) \subset D$*

$$m(R, X, u) = \Delta^{(p-1)}u(X) \sum_{i=0}^{j-1} B_{p-1}^{(i)} R^{2i} + \Delta^{(p-2)}u(X) \sum_{i=0}^{j-1} B_{p-2}^{(i)} R^{2i} + \ldots + u(X) \sum_{i=0}^{j-1} B_0^{(i)} R^{2i} + Q,$$

gdzie j jest dowolną liczbą naturalną większą lub równą p, oraz

$$Q = a_{n,j}\Delta^{(j)}u(\bar{X}) = a_{n,j}[A_{p-1}^{(j)}\Delta^{(p-1)}u(\bar{X}) + A_{p-2}^{(j)}\Delta^{(p-2)}u(\bar{X}) + \ldots + \tag{9}$$
$$+ A_0^{(j)}u(\bar{X})], \qquad \bar{X} \in \overline{K(R, X)},$$

$$B_{p-s}^{(i)} = a_{n,i}A_{p-s}^{(i)}, \qquad s = 1, 2, \ldots, p,$$

zaś współczynniki $A_l^{(j)}$ są określone wzorami (8).

Dowód. Lemat 3 wynika z wzoru (2) oraz lematu 2.

LEMAT 4. *Jeżeli $u(X)$ jest analitycznym rozwiązaniem równania* (1) *w obszarze D, to dla każdej kuli $K(R, X) \subset D$*

$$m(R, X, u) = \Delta^{(p-1)}u(X) \sum_{i=0}^{\infty} B_{p-1}^{(i)} R^{2i} + \ldots + u(X) \sum_{i=0}^{\infty} B_0^{(i)} R^{2i}, \tag{10}$$

przy czym szereg po prawej stronie (10) *jest zbieżny do funkcji $m(R, X, u)$.*

Dowód. Z wzorów (3) i (9) wynika, że

$$|Q| < a_{n,j} \cdot p \cdot \max[|A_{p-1}^{(j)}|, \ldots, |A_0^{(j)}|] \times$$
$$\times \max_{Y \in \overline{K(R,X)}} [|\Delta^{(p-1)}u(Y)|, \ldots, |\Delta u(Y)|, |u(Y)|] \leqslant$$
$$\leqslant a_{n,j} \cdot p \cdot M(j-2)(C+1)^{j-2} \to 0, \quad \text{gdy} \quad j \to \infty,$$

gdzie

$$M = \max_{Y \in \overline{K(R,X)}} [|\Delta^{(p-1)}u(Y)|, \ldots, |\Delta u(Y)|, |u(Y)|].$$

LEMAT 5. *Jeżeli $u(Y)$ jest analitycznym rozwiązaniem równania* (1) *w obszarze D, to dla każdej kuli $K(R, X) \subset D$*

$$M(R, X, u) = \Delta^{(p-1)}u(X) \sum_{i=0}^{\infty} B_{p-1}^{(i)} R^{2i} \frac{n}{2i+n} + \ldots + u(X) \sum_{i=0}^{\infty} B_0^{(i)} R^{2i} \frac{n}{2i+n}. \tag{11}$$

Dowód. W równości (10) zastępujemy R przez r, następnie mnożymy obustronnie przez nr^{n-1}/R^n, całkujemy obustronnie względem r w granicach od zera do R i korzystając ze związku

$$\frac{n}{R^n}\int_0^R r^{n-1} m(r, X, u)\,dr = \frac{n}{R^n}\int_0^R r^{n-1}\frac{1}{\Omega_n r^{n-1}}\iint_{\mathrm{Fr}K(r,X)} u(Y)\,dS\,dr =$$

$$= \frac{n}{\Omega_n R^n}\int_0^R \iint_{\mathrm{Fr}K(r,X)} u(Y)\,dS\,dr = \frac{1}{V_n R^n}\iiint_{K(R,X)} u(Y)\,dV = M(R, X, u)$$

(por. [2]), otrzymujemy (11).

Wykażemy teraz następujące

TWIERDZENIE. *Jeżeli* 1° $u(X)$ *jest rozwiązaniem niezerowym i analitycznym równania* (1) *w obszarze* D, 2° *w punkcie* $X_0 \in D$ *spełnione są warunki*

$$u(X_0) = \Delta u(X_0) = \ldots = \Delta^{(p-1)} u(X_0) = 0,$$

to w każdej kuli $K(R, X_0)$ *zawartej w* D *funkcja* $u(X)$ *zmienia znak.*

Dowód. Ponieważ zera rozwiązania $u(X)$ równania (1) nie mogą wypełniać obszaru n-wymiarowego, przeto, na podstawie założenia 2° oraz wzoru (11), dla każdej kuli $K(R, X_0)$ zawartej w D wartość średnia $M(R, X_0, u)$ równa się zero, skąd wynika, że w każdej kuli $K(R, X_0)$ zawartej w D funkcja $u(X)$ zmienia znak.

Uwaga. W interpretacji geometrycznej, przy założeniach ostatniego twierdzenia, funkcja $u(X)$ w punkcie X_0 nie osiąga ekstremum.

Prace cytowane

[1] R. Courant i D. Hilbert (Р. Курант и Д. Гильберт), *Методы математической физики, II,* Москва, Ленинград 1951.

[2] W. Walter, *Mittelwertsätze und ihre Verwendung zur Loesung von Randwertaufgaben,* Jahresber. Deutsch. Math. Verein. (1957), str. 93-131.

[3] M. Nicolesco, *Les fonctions polyharmoniques,* Paris 1936.

Ян Мусялэк (Краков)

О ОСЦИЛЛЯЦИОННОСТИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРОГО КЛАССА ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

РЕЗЮМЕ

В этой заметке исследуется осцилляционность решений уравнения

(1) $$\Delta^p u(X) + C_{p-1}\Delta^{p-1} u(X) + \ldots + C_0 u(X) = 0, \qquad X(x_1, \ldots, x_n),$$

где $C_0, \ldots, C_{p-1}$ — константные числа, p — целое положительное число.

Автор, между прочим, доказывает следующую теорему:

Если 1° *функция* $u(X)$ *является ненулевым аналитическим решением уравнения* (1) *в области* D, 2° *в точке* $X_0 \in D$ *выполненны условия*

$$u(X_0) = \Delta u(X_0) = \ldots = \Delta^{p-1}u(X_0) = 0,$$

тогда во всякой сфере $K(R, X_0) \subset D$ *функция* $u(X)$ *изменяет знак.*

J. Musiałek (Kraków)

ON THE OSCILLATION OF THE SOLUTIONS OF A CLASS OF POLYHARMONIC EQUATIONS

SUMMARY

In this paper the author proves the following theorem: *if* (1) $u(X)$ *is a nontrivial solution of the equation*

$$\Delta^p u(X) + C_{p-1}\Delta^{p-1}u(X) + \ldots + C_0 u(X) = 0, \qquad X(x_1, \ldots, x_n),$$

where $C_0, \ldots, C_{p-1}$ *are constants,* p *is a natural number, and* $u(X)$ *is analytic in a domain* D, (2) *at a point* $X_0 \in D$

$$u(X_0) = \Delta u(X_0) = \ldots = \Delta^{(p-1)}u(X_0) = 0,$$

then $u(x)$ *changes sign in every sphere* $K(R, X_0) \subset D$.
