ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE VIII (1963)

H. A. POGORZELSKI (Providence, R. I.)

Twierdzenie o jednoznaczności rozwinięcia liczb naturalnych na łańcuchy wykładnicze liczb niepotęgowych w arytmetyce rekurencyjnej Skolema*

W pracy niniejszej udowodnione jest twierdzenie o jednoznaczności rozwinięcia względem liczb naturalnych zdefiniowanych rekurencyjnie i badanych przez Jana Mycielskiego [6]. Jest to twierdzenie analogiczne do twierdzenia o jednoznaczności rozwinięcia liczb pierwszych. Praca niniejsza pozostaje w związku z pracą Th. Skolema [9].

Wprowadzimy obecnie szereg symboli, którymi będziemy się posługiwali (P i Q są zmiennymi zdaniowymi): ${}^{non}P$ (negacja); $P \wedge Q$ (koniunkcja); $P \vee Q$ (alternatywa); $P \to Q$ (implikacja); $P \leftrightarrow Q$ (równoważność); $\wedge x\{P\}$ (kwantyfikator ogólny); $\vee x\{P\}$ (kwantyfikator szczegółowy). Ponadto będziemy używali, jak to czyni A. Grzegorczyk [4], symboli służących dla oznaczania kwantyfikatorów ograniczonych i operacji minimum:

$\wedge x \leqslant y\{P\}$ lub $\bigwedge_{x \leqslant y}\{P\}$ znaczy: dla każdego $x \leqslant y$, P;

$\vee x \leqslant y\{P\}$ lub $\bigvee_{x \leqslant y}\{P\}$ znaczy: istnieje takie $x \leqslant y$, że P;

$\mu x \leqslant y\{P\}$ znaczy: najmniejsze takie $x \leqslant y$, że P.

Przypominamy, że

$${}^{non}P \vee Q \quad \text{znaczy:} \quad P \to Q.$$

I. Idea arytmetyki rekurencyjnej pochodzi od Th. Skolema. Praca Skolema [9] potwierdziła przypuszczenie o możliwości rozwinięcia elementarnej teorii liczb bez użycia kwantyfikatorów nieograniczonych $\wedge$ i $\vee$. Badania te były podjęte przez Skolema ze względu na to, że Bertrand Russell odkrył na początku obecnego stulecia, że przez stosowanie kwantyfikatorów nieograniczonych dojść można w wyniku po-

* Praca niniejsza stanowi drugą część artykułu pod tytułem *Łańcuchy wykładnicze liczb naturalnych i funkcje rekurencyjne Vučkovića* [8]. Przy pisaniu tej pracy autor korzystał z rad prof. V. Vučkovića, za którego życzliwą i cenną pomoc składa mu swe podziękowanie.

prawnych rozumowań do wniosków sprzecznych. D. Hilbert i P. Bernays [5] wykazali, że rozumowanie bez kwantyfikatorów nieograniczonych jest wolne od sprzeczności, a K. Gödel [2] stwierdził, że kwantyfikatory ograniczone $\wedge x \leqslant y$ i $\vee x \leqslant y$ i poza tym $\mu x \leqslant y$ są operacjami nie wyprowadzającymi poza funkcje i relacje rekurencyjne, co stanowi pośrednie potwierdzenie dalszego przypuszczenia Skolema, mianowicie, że kwantyfikatory ograniczone nie wykraczają poza program arytmetyki rekurencyjnej.

Przy budowie arytmetyki rekurencyjnej opierać się należy na następujących regułach: na aksjomatach rachunku zdań, gdzie zdania zawierają tylko relacje rekurencyjne, na aksjomatach arytmetycznych

(i) $(x = y) \to (x = z \to y = z)$,

(ii) $^{non}(Sx = 0)$,

(iii) $(Sx = Sy) \to (x = y)$,

(iv) $(x = y) \to (Sx = Sy)$ oraz

(v) na zasadzie indukcji matematycznej; na przyjęciu jako dalszych aksjomatów wszystkich równań w schematach rekurencyjnych, które są używane w definiowaniu funkcji. Arytmetyka rekurencyjna jest arytmetyką o wolnych zmiennych, jednakże używanie kwantyfikatorów ograniczonych nie wyprowadza poza funkcje i relacje rekurencyjne, a więc jest ono dopuszczalne.

Warto jeszcze zwrócić uwagę na fakt, że arytmetyka rekurencyjna także może być sformalizowana bez opierania się na rachunku zdań, tj. może być zbudowana na pewnym systemie formalnym, biorąc zasadę indukcji matematycznej jako postulat, jak to uczynił H. B. Curry [1], lub nie biorąc tej zasady jako postulatu, jak to uczynił R. L. Goodstein [3] w swym tak zwanym *rachunku równań* (*equation calculus*). Rachunek ten opiera się na nieopublikowanym wyniku P. Bernaysa, który stwierdził, iż zasada indukcji jest równoważna zasadzie jednoznaczności, mówiącej, że funkcje spełniające te same równania w pewnym schemacie rekurencyjnym są jednoznacznie określone.

II. Paragraf niniejszy zawiera wyniki wymienione na początku artykułu. Th. Skolem [9] rozwinął arytmetykę rekurencyjną do twierdzenia o jednoznaczności rozwinięcia względem liczb pierwszych. Jego wyników nie będziemy tu powtarzać. Przytoczymy jednakże kilka definicji i własności podanych w cytowanej pracy Skolema:

(P_1) $$y \mid x \leftrightarrow \vee z \leqslant x\{x = yz \wedge z > 0\}$$

($y \mid x$ znaczy, że y jest dzielnikiem x);

(P_2) $$\Pr(x) \leftrightarrow x \geqslant 2 \wedge \wedge y \leqslant x\{y^{non} \mid x \vee y = 1 \vee y = x\}$$

($\Pr(x)$ znaczy, że x jest liczbą pierwszą);

(P_3) $y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightarrow \wedge r \leqslant n[y \mid x_r \wedge \wedge_{z \leqslant \min(x_1, \ldots, x_n)} \{z \overset{non}{\mid} x_r \vee z \mid y\}]$,

tj. y jest największym wspólnym dzielnikiem liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

(1) $$\overset{non}{[} \wedge r \leqslant n \{y \mid zx_r\}] \vee y \mid (zx_1, \ldots, zx_n);$$

(2) $$(zx_1, \ldots, zx_n) = z \cdot (x_1, \ldots, x_n).$$

Następnie podamy przede wszystkim definicje i własności, którymi będziemy się posługiwali:

(M_1) $$y 1 x \leftrightarrow \vee z \leqslant x\{x = [y, z] \wedge z > 0 \wedge y > 1\}$$

($y 1 x$ znaczy, że x jest potęgą y);

(M_2) $$My(x) \leftrightarrow x \geqslant 2 \wedge \wedge y \leqslant x\{y \overset{non}{1} x \vee y = x\}$$

($My(x)$ znaczy, że x jest liczbą niepotęgową);

(M_3) $$\begin{cases} m_1 = 2, \\ m_{n+1} = \mu z \leqslant [_2 2; n+1]\{z > m_n \wedge My(z)\} \end{cases}$$

(m_n jest n-tą liczbą niepotęgową);

(M_4) $$\begin{cases} \Psi_{1 \leqslant r \leqslant 1} x_r = x_1, \\ \Psi_{1 \leqslant r \leqslant n+1} x_r = [x_{n+1}, \Psi_{1 \leqslant r \leqslant n} x_r], \end{cases}$$

tj. definicja łańcucha wykładniczego dla liczb naturalnych $x_r > 1$;

(M_5) $$\begin{cases} E(x, y; 1, 1) \leftrightarrow (x_1 = y_1), \\ E(x, y; 1, n) \quad \text{fałszywe dla} \quad n > 1, \\ E(x, y; m, 1) \quad \text{fałszywe dla} \quad m > 1, \\ E(x, y; m+1, n+1) \leftrightarrow (x_{m+1} = y_{n+1}) \wedge E(x, y; m, n) \end{cases}$$

($E(x, y; m, n)$ jest skrótem dla zdania $x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge \ldots \wedge x_m = y_n$);

(3) $$\overset{non}{[} n = \prod_{1 \leqslant r \leqslant \mu} [p_r, a_r] \wedge \wedge r \leqslant \mu\{Pr(p_r)\} \wedge My(n)] \vee (a_1, \ldots, a_\mu) = 1;$$

(4) $$\overset{non}{\{}[x, y] = [w, z] \wedge y \mid z\} \vee w 1 x.$$

Udowodnimy obecnie szereg lematów, potrzebnych dla dowodu twierdzenia o jednoznaczności rozwinięcia względem liczb niepotęgowych.

LEMAT 1.

$$\overset{non}{\{} n 1 [x, y] \wedge My(n)\} \vee n 1 x.$$

Na mocy założenia $n 1 [x, y]$ i twierdzenia o jednoznaczności rozwinięcia względem liczb pierwszych mamy:

$$[x, y] = [n, z] = \prod_{1 \leqslant r \leqslant \mu} [p_r, a_r] = [\prod_{1 \leqslant r \leqslant \mu} [p_r, \beta_r], y] =$$

$$= [\prod_{1 \leqslant r \leqslant \mu} [p_r, \gamma_r], z] = \prod_{1 \leqslant r \leqslant \mu} [p_r, \beta_r y] = \prod_{1 \leqslant r \leqslant \mu} [p_r, \gamma_r z],$$

gdzie

$$\wedge r \leqslant \mu\{\mathrm{Pr}(p_r)\}, \quad x = \prod_{1\leqslant r\leqslant\mu}[p_r, \beta_r] \quad \text{i} \quad n = \prod_{1\leqslant r\leqslant\mu}[p_r; \gamma_r],$$

a poza tym oczywiście

$$\wedge r \leqslant \mu\{\alpha_r = \beta_r y\} \wedge \wedge r \leqslant \mu\{\alpha_r = \gamma_r z\};$$

z definicji (P_1) wynika, że $\wedge r \leqslant \mu\{y \mid \gamma_r z\}$. Wtedy z własności (1) wynika, że $y \mid (\gamma_1 z, \ldots, \gamma_\mu z)$, a ponieważ wobec własności (2), z założenia $\mathrm{My}(n)$ i własności (3) mamy

$$(\gamma_1 z, \ldots, \gamma_\mu z) = z\cdot(\gamma_1, \ldots, \gamma_\mu) = z,$$

skąd otrzymujemy $y \mid z$. Na mocy własności (4) wnioskujemy, że $n 1 x$.

LEMAT 2.

$$^{non}\{p 1 \Psi_{1\leqslant r\leqslant n} x_r \wedge \mathrm{My}(p)\} \vee p 1 x_n.$$

Na mocy definicji (M_4) mamy $\Psi_{1\leqslant r\leqslant n} x_r = [x_n, \Psi_{1\leqslant r\leqslant n-1} x_r]$, wobec czego założenie twierdzenia daje się napisać w postaci

$$p 1 [x_n, \Psi_{1\leqslant r\leqslant n-1} x_r] \wedge \mathrm{My}(p),$$

skąd wynika na mocy lematu 1, że $p 1 x_n$.

LEMAT 3.

$$^{non}[q 1 \Psi_{1\leqslant r\leqslant n} p_r \wedge \wedge r \leqslant n\{\mathrm{My}(p_r)\} \wedge \mathrm{My}(q)] \vee p_n = q.$$

Wobec lematu 2, z założenia $q 1 \Psi_{1\leqslant r\leqslant n} p_r \wedge \mathrm{My}(q)$, wynika, że $q 1 p_n$. Wówczas, stosując założenie $\wedge r \leqslant n\{\mathrm{My}(p_r)\}$, otrzymujemy $q 1 p_n \wedge \mathrm{My}(p_n)$, skąd na podstawie definicji (M_2) wynika, że $p_n = q$.

Podajemy teraz twierdzenie o jednoznaczności rozwinięcia liczb naturalnych na łańcuchy wykładnicze liczb niepotęgowych.

TWIERDZENIE 1.

$$^{non}\{\Psi_{1\leqslant r\leqslant\mu} p_r = \Psi_{1\leqslant s\leqslant\nu} q_s\} \vee$$

$$\vee \vee r \leqslant \mu\{^{non}\mathrm{My}(p_r)\} \vee \vee s \leqslant \mu\{^{non}\mathrm{My}(q_s)\} \vee E(p, q; \mu, \nu).$$

Dowód jest indukcyjny. Udowodnimy twierdzenie dla $\mu = 1$. Jeżeli

$$(p_1 = \Psi_{1\leqslant s\leqslant\nu} q_s) \wedge \mathrm{My}(p_1) \wedge \wedge s \leqslant \nu\{\mathrm{My}(q_s)\},$$

to na mocy lematu 3 otrzymujemy, że $p_1 = q_\nu$. Wówczas, stąd że $p_1 = q_\nu$ i $p_1 = [q_\nu, \Psi_{1\leqslant s\leqslant\nu-1} q_s]$, wynika, że $\Psi_{1\leqslant s\leqslant\nu-1} q_s = 1$, co jest niemożliwe dla $\nu > 1$. Przypuśćmy, że twierdzenie zachodzi dla pewnego μ. Wtedy z założenia mamy

$$\Psi_{1\leqslant r\leqslant\mu+1} p_r = \Psi_{1\leqslant s\leqslant\nu} q_s \wedge \wedge r \leqslant \mu+1\{\mathrm{My}(p_r)\} \wedge \wedge s\leqslant\nu\{\mathrm{My}(q_s)\}$$

i łatwo otrzymujemy

$$p_{\mu+1} 1 \Psi_{1\leqslant s\leqslant\nu} q_s \wedge \wedge s \leqslant \nu\{\mathrm{My}(q_s)\} \wedge \mathrm{My}(p_{\mu+1});$$

na mocy Lematu 3, $p_{\mu+1} = q_\nu$. Dalej, ponieważ $\Psi_{1\leqslant s\leqslant\nu} q_s = [q_\nu, \Psi_{1\leqslant s\leqslant\nu-1} q_s]$, otrzymujemy $\Psi_{1\leqslant r\leqslant\mu} p_r = \Psi_{1\leqslant s\leqslant\nu-1} q_s$, skąd wynika, na mocy założenia indukcyjnego i definicji (M_5), że

$$(p_{\mu+1} = q_\nu) \wedge E(p, q; \mu, \nu-1) \leftrightarrow E(p, q; \mu+1, \nu).$$

III. Czytelnik łatwo zauważy, że twierdzenie o jednoznaczności rozwinięcia daje się rozszerzyć i na inne klasy liczb naturalnych zdefiniowanych rekurencyjnie. Obecnie podamy tylko szkic dotyczący następnej takiej klasy, mianowicie klasy liczb nietetracyjnych:

$$(N_1) \qquad y \downarrow x \leftrightarrow \bigvee z \leqslant x \{x = [_z y] \wedge z > 0 \wedge y > 1\}$$

($y \downarrow x$ znaczy, że x jest tetracją y (por. [8])));

$$(N_2) \qquad \mathrm{Nt}(x) \leftrightarrow x \geqslant 2 \wedge \bigwedge y \leqslant x \{y^{non} \downarrow x \vee y = x\}$$

($\mathrm{Nt}(x)$ znaczy, że x jest liczbą nietetracyjną);

$$(N_3) \qquad \begin{cases} t_1 = 2, \\ t_{n+1} = \mu z \leqslant [_2 2; n+1]\{z > t_n \wedge \mathrm{Nt}(z)\}, \end{cases}$$

tj. t_n jest n-tą liczbą nietetracyjną.

Następnie wprowadźmy pojęcie pewnego łańcucha ogólnego dla tetracji, mianowicie $\Xi_{1\leqslant r\leqslant n} x_r$ $(1 < x_r)$, zdefiniowanego jak następuje:

$$(N_4) \qquad \begin{cases} \Xi_{1\leqslant r\leqslant 1} x_r = x_1, \\ \Xi_{1\leqslant r\leqslant n+1} x_r = [_{\Xi_{1\leqslant r\leqslant n} x_r} x_{n+1}]. \end{cases}$$

Mając na uwadze powyższe definicje, zwróćmy obecnie uwagę na możność udowodnienia twierdzenia o jednoznaczności rozwinięcia względem klasy liczb nietetracyjnych:

TWIERDZENIE 2.

$$^{non}\{\Xi_{1\leqslant r\leqslant\mu} p_r = \Xi_{1\leqslant s\leqslant\nu} q_s\} \vee$$
$$\vee \bigvee r \leqslant \mu \{^{non}\mathrm{Nt}(p_r)\} \vee \bigvee s \leqslant \nu \{^{non}\mathrm{Nt}(q_s)\} \vee E(p, q; \mu, \nu).$$

Dowód tego twierdzenia w arytmetyce rekurencyjnej nasuwa pewne komplikacje, które mnożą się przy każdym kolejnym przeniesieniu twierdzenia o jednoznaczności rozwinięcia względem kolejnych klas liczb naturalnych definiowanych rekurencyjnie przy pomocy funkcji Ackermanna i Hilberta (por. [8]). Przypuszczamy, że przy stosowaniu metod rekurencyjnych R. Péter [7] można uzyskać ogólny sposób udowodnienia twierdzenia o jednoznaczności rozwinięcia względem wspomnianych klas liczb naturalnych definiowanych rekurencyjnie. Zagadnieniem tym zajmie się autor w dalszych swych pracach. (Dodano w korekcie: Patrz [10].)

Prace cytowane

[1] H. B. Curry, *A formalization of recursive arithmetic*, Amer. J. Math. 63 (1941), str. 263-282.

[2] K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, Monatsh. Math. und Physik 38 (1931), str. 173-198.

[3] R. L. Goodstein, *Function theory in an axiom-free equation calculus*, Proc. London Math. Soc. (2) 48 (1945), str. 401-434.

[4] A. Grzegorczyk, *Zarys logiki matematycznej*, Warszawa 1961.

[5] D. Hilbert und P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, Berlin 1934-1939.

[6] Jan Mycielski, *On powers*, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III. 3 (1955), str. 129-132.

[7] R. Péter, *Über die Verallgemeinerung der Theorie der rekursiven Funktionen für abstrakte Mengen geeigneter Struktur als Definitionsbereiche*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 12 (1961), str. 271-314.

[8] H. A. Pogorzelski, *Łańcuchy wykładnicze liczb naturalnych i funkcje rekurencyjne Vučkovića*, Prace Matematyczne 7 (1962), str. 19-34.

[9] Th. Skolem, *Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich*, *Videnskapsselskapets Skrifter. I.* Math.-Naturv. Klasse No. 6 (1923), str. 2-38.

[10] H. A. Pogorzelski, *Recursive arithmetic of Skolem I, II*, Math. Scand. 11(1962), 11(1963).

Г. А. Погожельски (Провиденс, Р. И.)

ТЕОРЕМА О ЕДИНСТВЕННОСТИ РАЗЛОЖЕНИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В ЭКСПОНЕНТНЫЕ ЦЕПИ НЕСТЕПЕННЫХ ЧИСЕЛ В РЕКУРСИВНОЙ АРИФМЕТИКЕ СКОЛЕМА

РЕЗЮМЕ

Настоящая работа является второй из трех частей о рекурсивной арифметике и о рекурсивной теории функций.

H. A. Pogorzelski (Providence, R. I.)

THEOREM ON THE UNIQUE RESOLUTION OF NATURAL NUMBERS INTO EXPONENT CHAINS OF NON POWER NUMBERS IN SKOLEM'S RECURSIVE ARITHMETIC

SUMMARY

This paper is the second of three papers on recursive arithmetic and recursive function theory.