ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE VII (1962)

A. SMOLUK (Wrocław) i J. ZAMORSKI †

Współczynnikowe warunki ekstremalności uogólnionych funkcji spiralnych

Uogólnionymi funkcjami spiralnymi nazywamy funkcje analityczne w $0 < |z| < 1$, spełniające następujące równanie:

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \alpha p(z) + \beta, \tag{1}$$

gdzie $\operatorname{re} p(z) > 0$, $p(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$, α i β są dowolnymi liczbami zespolonymi. Niech $T_{\alpha,\beta}$ oznacza klasę funkcji spełniających równanie (1), gdy $p(z)$ przebiega pełną klasę P funkcji o dodatniej części rzeczywistej, a α i β są ustalonymi liczbami zespolonymi. Jak łatwo zauważyć, funkcje klasy $T_{\alpha,\beta}$ można z dokładnością do stałego czynnika przedstawić rozwinięciem

$$f(z) = z^{\alpha+\beta}(1 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots), \quad 0 < |z| < 1. \tag{2}$$

Przy badaniu ekstremalności funkcjonału skończonego $E(f) = E(b_1, \ldots, b_n) = E(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n)$, gdzie $b_k = x_k + iy_k$ oraz $\operatorname{grad}_{x_k, y_k} E \neq 0$, dla klasy $T_{\alpha,\beta}$, zostało w pracy [3] udowodnione następujące

TWIERDZENIE A. *Funkcja klasy $T_{\alpha,\beta}$, dla której funkcjonał $E(f)$ osiąga wartość ekstremalną, spełnia następujące równania różniczkowo-funkcyjne:*

$$\frac{zf'(z) - \beta f(z)}{f(z)} P_i(z) = \alpha Q_i(z), \quad i = 1, 2,$$

gdzie

$$P_1(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{jA_j}{z^j} - \sum_{j=1}^{n} j\bar{A}_j z^j, \quad P_2(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{z^j} - \operatorname{re}\sum_{k=1}^{n} a_k A_k + \sum_{j=1}^{n} \bar{A}_j z^j,$$

$$Q_1(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z^j} \sum_{k=0}^{n-j} a_k (k+j) A_{k+j} + \sum_{k=1}^{n} k a_k A_k + \sum_{k=1}^{n} z^j \sum_{k=0}^{n-j} \bar{a}_k (k+j) \bar{A}_{k+j},$$

$$Q_2(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z^j} \sum_{k=0}^{n-j} a_k A_{k+j} + i \operatorname{im} \sum_{k=1}^{n} a_k A_k + \sum_{j=1}^{n} z^j \sum_{k=0}^{n-j} \bar{a}_k \bar{A}_{k+j},$$

$$A_j = \frac{a}{j}\sum_{k=0}^{n-j} b_k\left\{\frac{\partial E}{\partial x_{k+j}} - i\frac{\partial E}{\partial y_{k+j}}\right\},$$

$$a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{a}\begin{vmatrix} b_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2b_2 & b_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ kb_k & b_{k-1} & b_{k-2} & \dots & b_1 \end{vmatrix}, \qquad a_0 = 1.$$

Korzystając z tego twierdzenia napiszemy równania algebraiczne wiążące n pierwszych współczynników funkcji ekstremalnej, od których funkcjonał wyłącznie zależy.

TWIERDZENIE 1. *Pierwszych n współczynników funkcji klasy $T_{a,\beta}$, dla której funkcjonał $E(f)$ osiąga wartość ekstremalną, spełnia następujący układ równań algebraicznych:*

$$\operatorname{im}\sum_{k=1}^{n} a_k A_k = 0,$$

$$\left(\operatorname{re}\sum_{k=1}^{n} a_k A_k\right)\sum_{k=1}^{n} k a_k A_k - 2\operatorname{re}\left\{\sum_{j=0}^{n-1} A_{n-j}\sum_{k=0}^{j}(2n+k-2j)a_k A_{k+n-j}\right\} = 0,$$

$$A_1\left\{i\operatorname{im}\sum_{k=1}^{n} a_k A_k - \sum_{k=1}^{n} k a_k A_k\right\} + \left(\operatorname{re}\sum_{k=1}^{n} a_k A_k\right)\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_k A_{k+1} -$$
$$-\sum_{j=0}^{n-2}\left\{A_{n-j}\sum_{k=0}^{j+1}(2n+k-2j-1)\bar{a}_k \bar{A}_{k+n-j-1} + \right.$$
$$\left. + \bar{A}_{n-j-1}\sum_{k=0}^{j}(2n+k-2j-1)a_k A_{k+n-j}\right\} = 0,$$

$$A_L\left\{Li\operatorname{im}\sum_{k=1}^{n} a_k A_k - \sum_{k=1}^{n} k a_k A_k\right\} + \left(\operatorname{re}\sum_{k=1}^{n} a_k A_k\right)\sum_{k=0}^{n-L} a_k(k+L)A_{k+L} -$$
$$-\sum_{j=0}^{n-L-1}\left\{A_{n-j}\sum_{k=0}^{j+L}(2n+k-2j-L)\bar{a}_k \bar{A}_{k+n-j-L} + \right.$$
$$\left. + \bar{A}_{n-j-L}\sum_{k=0}^{j}(2n+k-2j-L)a_k A_{k+n-j}\right\} +$$
$$+\sum_{j=1}^{L-1} A_{L-j}\sum_{k=1}^{n-L-1}(L+k-n-j)a_{n-j-k}A_{n-k} = 0,$$

$$L = 2, \dots, n-1.$$

Dowód. Z twierdzenia A wynika, że dla funkcji ekstremalnej zachodzi tożsamość

$$P_1(z)Q_2(z)-P_2(z)Q_1(z)\equiv 0. \tag{3}$$

Oznaczmy

$$P_i(z)=\frac{1}{z^n}\sum_{j=0}^{2n}B_j^{(i)}z^j,\qquad Q_i(z)=\frac{1}{z^n}\sum_{j=0}^{2n}C_j^{(i)}z^j.$$

Po wprowadzeniu tych oznaczeń tożsamość (3) jest równoważna następującym $4n+1$ równościom

$$\sum_{j=0}^{N}(B_j^{(1)}C_{N-j}^{(2)}-B_j^{(2)}C_{N-j}^{(1)})=0,\qquad N=0,\dots,2n, \tag{4}$$

$$\sum_{j=0}^{N}(B_{2n-(N-j)}^{(1)}C_{2n-j}^{(2)}-B_{2n-(N-j)}^{(2)}C_{2n-j}^{(1)})=0,\qquad N=0,\dots,2n-1. \tag{5}$$

Zauważmy, że z określenia funkcji $P_i(z)$ i $Q_i(z)$ oraz z wprowadzonych oznaczeń wynika, że

$$\begin{aligned}
&B_{2n-k}^{(1)}=-\overline{B}_k^{(1)}, && k=0,\dots,2n,\\
&B_{2n-k}^{(2)}=\overline{B}_k^{(2)}, && k=0,\dots,2n,\\
&C_{2n-k}^{(1)}=\overline{C}_k^{(1)}, && k=0,1,\dots,n-1,n+1,\dots,2n,\\
&C_{2n-k}^{(2)}=\overline{C}_k^{(2)}, && k=0,\dots,2n.
\end{aligned} \tag{6}$$

Zastosujmy (6) do równań (5); wówczas równania te przejdą w równania

$$\sum_{j=0}^{N}(\overline{B}_{N-j}^{(1)}\overline{C}_j^{(2)}-\overline{B}_{N-j}^{(2)}\overline{C}_j^{(1)})=0,\qquad N<n,$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}(\overline{B}_{N-j}^{(1)}\overline{C}_j^{(2)}-\overline{B}_{N-j}^{(2)}\overline{C}_j^{(1)})+$$
$$+\overline{B}_{N-n}^{(1)}\overline{C}_n^{(2)}-\overline{B}_{N-n}^{(2)}C_n^{(1)}+\sum_{j=n+1}^{N}(\overline{B}_{N-j}^{(1)}\overline{C}_j^{(2)}-\overline{B}_{N-j}^{(2)}\overline{C}_j^{(1)})=0,\qquad N\geqslant n.$$

Zamieńmy teraz wskaźnik sumowania i sprzęgnijmy otrzymane równania. Otrzymamy

$$\sum_{j=0}^{N}(B_j^{(1)}C_{N-j}^{(2)}-B_j^{(2)}C_{N-j}^{(1)})=0,\qquad N<n, \tag{7}$$

$$\sum_{j=0}^{N-n-1}(B_j^{(1)}C_{N-j}^{(2)}-B_j^{(2)}C_{N-j}^{(1)})+ \tag{8}$$
$$+B_{N-n}^{(1)}C_n^{(2)}-B_{N-n}^{(2)}C_n^{(1)}+\sum_{j=N-n+1}^{N}(B_j^{(1)}C_{N-j}^{(2)}-B_j^{(2)}C_{N-j}^{(1)})=0,\qquad N\geqslant n.$$

Widzimy, że dla $N < n$ (4) jest identyczne z (7) oraz że z (4) i (8) wynika

$$B_{N-n}^{(2)}(\bar{C}_n^{(1)} - C_n^{(1)}) = 0 \quad \text{dla} \quad N = n, \ldots, 2n-1.$$

Ponieważ nie wszystkie $B_j^{(2)}$ są równe zero (gdyż $\operatorname{grad}_{x_k, y_k} E \neq 0$), więc mamy $C_n^{(1)} - \bar{C}_n^{(1)} = 0$, czyli

$$\operatorname{im}\Big\{\sum_{k=1}^{n} k a_k A_k\Big\} = 0. \tag{9}$$

Jest to pierwsze z równań twierdzenia. Na innej drodze otrzymał je dla klasy $T_{1,0}$ J. Hummel [2]. Po uwzględnieniu (9) widzimy, że równania (5) są równoważne równaniom (4) dla $N = 0, \ldots, 2n-1$. Zauważymy dalej, że równania (4) dla $N = 0, \ldots, n-1$ są tożsamościami. Zachodzi bowiem wtedy równość

$$\sum_{j=0}^{N} (B_j^{(1)} C_{N-j}^{(2)} - B_j^{(2)} C_{N-j}^{(1)}) =$$
$$= -\sum_{j=0}^{N} \sum_{k=0}^{N-j} (2j - N + k) a_k A_{n-j} A_{n-N+j+k} =$$
$$= -\sum_{k=0}^{N} a_k \sum_{j=0}^{N-k} (2j - N + k) A_{n-j} A_{n-N+j+k} \equiv 0.$$

Rozpatrzmy teraz równania (4) dla $N = n, \ldots, 2n$. Niech $L = 2n-N$. Odpowiednie równania będą postaci

$$\sum_{j=0}^{2n-L} (B_j^{(1)} C_{2n-L-j}^{(2)} - B_j^{(2)} C_{2n-L-j}^{(1)}) = 0, \qquad L = 0, \ldots, n. \tag{10}$$

Dla $L = 0$ otrzymamy stąd równanie

$$B_n^{(1)} \bar{C}_n^{(2)} + B_n^{(2)} \bar{C}_n^{(1)} + 2\operatorname{re} \sum_{j=0}^{n-1} (B_j^{(1)} \bar{C}_j^{(2)} + B_j^{(2)} \bar{C}_j^{(1)}) = 0,$$

a po dokonaniu podstawienia — drugie równanie twierdzenia.

Dla $L = 1$ równanie (10) przechodzi w

$$\Big(\sum_{k=0}^{n-2} + \sum_{j=n+1}^{2n-1}\Big)(B_j^{(1)} C_{2n-1-j}^{(2)} - B_j^{(2)} C_{2n-1-j}^{(1)}) +$$
$$+ B_{n-1}^{(1)} C_n^{(2)} - B_{n-1}^{(2)} C_n^{(1)} + B_n^{(1)} C_{n-1}^{(2)} - B_n^{(2)} C_{n-1}^{(1)} = 0,$$

a stąd mamy trzecie równanie twierdzenia.

Dla $L > 2$ równania (10) możemy napisać w postaci

$$\Big\{\sum_{j=0}^{n-L-1} + \sum_{j=n-L+1}^{n-1} + \sum_{j=n+1}^{2n-L}\Big\} (B_j^{(1)} C_{2n-L-j}^{(2)} - B_j^{(2)} C_{2n-L-j}^{(1)}) +$$
$$+ B_{n-L}^{(1)} C_n^{(2)} - B_{n-L}^{(2)} C_n^{(1)} + B_n^{(1)} C_{n-L}^{(2)} - B_n^{(2)} C_{n-L}^{(1)} = 0.$$

Ponieważ

$$\sum_{j=n-L+1}^{n-1}(B_j^{(1)}C_{2n-L-j}^{(2)}-B_j^{(2)}C_{2n-L-j}^{(1)})=\sum_{j=1}^{L-1}\sum_{k=0}^{n-j}(L-k-2j)a_kA_{L-j}A_{k+j}=$$

$$=\sum_{k=0}^{L-1}a_k\sum_{j=1}^{L-1-k}(L-k-2j)A_{L-j}A_{k+j}+\sum_{k=1}^{n-L+1}A_{n-k}\sum_{j=1}^{L-1}(L+k-n-j)a_{n-j-k}A_{L-j}$$

i ponieważ mamy

$$\sum_{j=1}^{L-1-k}(L-k-2j)A_{L-j}A_{k+j}\equiv 0,$$

więc ostatecznie równania (10) przechodzą w pozostałe równania twierdzenia. Wreszcie z łatwością sprawdzamy, że dla $L=n$ odpowiednie równanie (10) jest spełnione tożsamościowo.

W ten sposób uzyskaliśmy $n+1$ równań dla wyznaczenia n liczb zespolonych $b_1, \ldots, b_n$. Ponieważ dwa z tych równań są równaniami rzeczywistymi, więc ilość niewiadomych jest zgodna z ilością równań. Zagadnienie rozwiązalności tego układu w przypadku ogólnym wydaje się być trudne, natomiast w pewnych przypadkach równania te mogą być przydatne. Jako przykład podamy twierdzenie o jedyności funkcji gwiaździstej z biegunem (klasa $T_{-1,0}$) ekstremalnej dla funkcjonału $\mathrm{re}\,b_n$.

TWIERDZENIE 2. *Jedyną funkcją klasy $T_{-1,0}$ dającą maksimum funkcjonału $\mathrm{re}\,b_n$, $n\geqslant 3$, jest funkcja*

$$f_*(z)=\frac{1}{z}(1-z^n)^{-2/n}=\frac{1}{z}\left(1+\frac{2}{n}z^n+\ldots\right).$$

Uwaga. Z twierdzenia tego przez obrót płaszczyzny łatwo wynika, że jedyną funkcją gwiaździstą z biegunem, dającą maksimum $|b_n|$, jest funkcja

$$f(z)=\frac{1}{z}(1+\eta z^n)^{-2/n},\qquad |\eta|=1.$$

Dowód. Wiadomo ([1], [3]), że dla funkcji klasy $T_{-1,0}$ mamy oszacowanie $\mathrm{re}\,b_n\leqslant 2/n$ oraz gdy $\mathrm{re}\,b_n=2/n$, to wszystkie współczynniki poprzednie znikają: $b_{n-1}=\ldots=b_2=0$, nie wiadomo jednak, czy $b_1=0$, a przykład funkcji

$$f(z)=\frac{1}{z}(1+\mu z+z^2),\qquad -2\leqslant\mu\leqslant 2,$$

należącej do klasy i realizującej wymaganą równość dla $n=2$, wskazuje, że nie zawsze tak musi być. Załóżmy, że $n\geqslant 3$ i zastosujmy twierdzenie 1 do funkcjonału $\operatorname{re} b_n$, uwzględniając od razu skądinąd znany fakt, że wówczas $b_2 = \ldots = b_{n-1} = 0$. Łatwo obliczyć, że wtedy

$$A_1 = \ldots = A_{n-2} = 0, \quad A_{n-1} = b_1/(n-1), \quad A_n = 1/n,$$

$$a_k = (-1)^{k-1} b_1^k, \quad k = 1, \ldots, n-1, \quad a_n = (-1)^{n-1} b_1^n + 2.$$

Z trzeciego równania twierdzenia otrzymujemy, że

$$\bar{b}_1(6n-4+|b_1|^2) = 0.$$

Stąd $b_1 = 0$, mamy bowiem $6n-4 > 0$ dla $n \geqslant 3$; i tak więc dla funkcji ekstremalnej mamy $b_1 = b_2 = \ldots = b_{n-1} = 0$. Aby teraz udowodnić jedyność funkcji podanej w twierdzeniu, należy zastosować lemat Schwarza do funkcji

$$\omega(z) = \frac{p(z)-1}{p(z)+1},$$

gdzie

$$p(z) = \frac{zf_*'(z)}{f_*(z)}.$$

Porównaj również [4].

Prace cytowane

[1] J. Clunie, *On meromorphic schlicht functions*, Journ. London Math. Soc. 34 (1959), str. 215-216.

[2] J. A. Hummel, *A variational method for starlike functions*, Proc. Am. Math. Soc. 9 (1958), str. 82-87.

[3] J. Zamorski, *Remarks on a class of analytic functions*, Bull. Acad. Polon. Sci. 8 (1960), str. 377-380.

[4] — *Remarks on the extremal functions of a certain class of analytical functions*, Ann. Polon. Math. 10 (1961), str. 247-252.

UNIWERSYTET WROCŁAWSKI
INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

А. Смолюк (Вроцлав) и Я. Заморски †

КОЭФФИЦИЕТНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ СПИРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

РЕЗЮМЕ

В этой заметке даются уравнения, которым удовлетворяют n первых коэффициентов разложения обобщенной спиральной функции, для функционал которой $E(f) = E(b_1, \ldots, b_n)$ принимает экстремальное значение. В дальнейшем эти урав-

нения используются для доказательства того, что единственной звездной функцией, имеющей полюс, функционал которой $\mathrm{re}\, b_n$ принимает максимум, является функция

$$f_*(z) = \frac{1}{z}(1-z^n)^{2/n}, \qquad n \geqslant 3.$$

A. Smoluk (Wrocław) i J. Zamorski †

NECESSARY CONDITIONS FOR EXTREMAL GENERALIZED SPIRAL FUNCTIONS INVOLVING THEIR COEFFICIENTS

SUMMARY

In this paper the authors establish equations satisfied by the first n coefficients of the development of a generalized spiral function for which the functional $E(f) = E(b_1, \ldots, b_n)$ attains its extremal value. Then these equations are used to show that the function

$$f_*(z) = \frac{1}{z}(1-z^n)^{2/n}, \qquad n \geqslant 3,$$

is the only starlike function with a pole for which the functional $\mathrm{re}\, b_n$ attains its maximum.