ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE VII (1962)

M. Kwapisz (Gdańsk)

Uwaga o ograniczoności rozwiązań układu równań całkowych Volterry

§ 1. Dla układu liniowych równań całkowych Volterry postaci

$$u_j(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_a^x A_{jk}(x, t) u_k(t) dt + b_j(x), \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

Z. Butlewski w pracy [1] podał następujące twierdzenia:

Twierdzenie 1. *Jeżeli*

1° $\max\limits_{j,k=1,2,\ldots,n} |A_{jk}(x, t)| \leqslant A(x, t)$ *dla* $(x, t) \in D$,

2° $\sum\limits_{j=1}^{n} |b_j(x)| \leqslant B(x)$ *dla* $x \in J$, *gdzie funkcje* $A_{jk}(x, t)$, $A(x, t)$, $b_j(x)$, $B(x)$ *są ciągłe odpowiednio w zbiorach* D, J:

$$D: \begin{cases} a \leqslant x < +\infty, \\ a \leqslant t \leqslant x, \end{cases} \quad J: a \leqslant x < +\infty,$$

ponadto funkcje $A(x, t)$ *i* $B(x)$ *są nieujemne,*

3° $A(x, t)$ *jest nierosnąca względem zmiennej* x *przy* t *ustalonym,*
to

$$\sum_{j=1}^{n} |u_j(x)| \leqslant \beta(x) \exp\Big(n \int_a^x A(t, t) dt\Big) \quad \textit{dla} \quad x \in J,$$

gdzie $\beta(x) = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant x} B(t)$.

Twierdzenie 2. *Jeżeli założenia* 1° *i* 2° *twierdzenia* 1 *są spełnione, a założenie* 3° *zastąpione założeniem*

3_1° *funkcja* $A(x, t)$ *jest niemalejąca względem zmiennej* t *przy każdej ustalonej wartości zmiennej* x *oraz* $B(x) \leqslant A(x, x)$ *dla* $x \in J$,
to

$$\sum_{j=1}^{n} |u_j(x)| \leqslant A(x, x) \exp\Big(n \int_a^x A(t, t) dt\Big) \quad \textit{dla} \quad x \in J.$$

§ 2. Analogiczne twierdzenia mogą być podane dla nieco ogólniejszego układu n nieliniowych równań całkowych Volterry, który w zapisie wektorowym ma postać

$$U(x) = \int_a^x F(x, t, u(t))dt + b(x), \tag{1}$$

gdzie funkcje wektorowe $F(x, t, p)$, $b(x)$, przyjmujące wartości z przestrzeni R^n, są określone odpowiednio w zbiorach $G = D\times R^n$, $p\in R^n$, J. W dalszych rozważaniach przyjmujemy następujące określenie normy $p\in R^n$, $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$,

$$\|p\| = \sum_{j=1}^{n} |p_j|.$$

Dla wygody, podczas prowadzenia dalszych rozważań i formułowania twierdzeń, już na początku notujemy niezbędne założenia.

Założenie H_0: 1° istnieje całka Lebesgue'a

$$\iint_P F(x, t, v(t))dxdt, \qquad \text{gdzie} \qquad P: \begin{cases} a \leqslant x \leqslant b, \\ a \leqslant t \leqslant x, \end{cases}$$

dla dowolnego $b > a$ i dla dowolnej funkcji wektorowej $V(t)$ całkowalnej w sensie Lebesgue'a w przedziale $\langle a, b\rangle$,

2° $\|F(x, t, p_1) - F(x, t, p_2)\| \leqslant A(x, t)\|p_1 - p_2\|$, $F(x, t, 0) = 0$ dla (x, t, p_1), (x, t, p_2), $(x, t, 0)\in G$, gdzie funkcja $A(x, t)$ jest określona i nieujemna w zbiorze D, całkowalna w sensie Lebesgue'a względem zmiennej t w przedziale $\langle a, x\rangle$ dla każdego $x \geqslant a$ oraz istnieje całka Lebesgue'a $\int_a^x A(t, t)dt$ dla każdego $x\in J$.

3° Funkcja wektorowa $b(x)$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a w każdym przedziale $\langle a, b\rangle$, $b > a$ oraz istnieje nieujemna funkcja $B(x)$ określona dla $x\in J$, ograniczona i całkowalna w sensie Lebesgue'a w każdym przedziale $\langle a, b\rangle$ taka, że $\|b(x)\| \leqslant B(x)$ dla $x\in J$.

Założenie H_1: funkcja $A(x, t)$ jest nierosnąca względem zmiennej x dla każdej ustalonej wartości zmiennej t.

Założenie H_2: 1° funkcja $A(x, t)$ jest niemalejąca względem zmiennej t dla każdej ustalonej wartości zmiennej x,

2° funkcja $A(x, x)$ jest ograniczona w każdym przedziale $\langle a, b\rangle$, $b > a$,

3° $B(x) \leqslant A(x, x)$ dla $x\in J$.

Rozwiązanie układu (1) konstruujemy metodą kolejnych przybliżeń. Budujemy ciąg funkcji wektorowych $\{u_m(x)\}$ przyjmując

$$\begin{aligned} &u_0(x) = b(x), \\ &u_m(x) = \int_a^x F(x, t, u_{m-1}(t))dt + u_0(x), \qquad m = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

Na podstawie twierdzenia Fubiniego [2] i założenia H_0 stwierdzamy, że ciąg $\{u_m(x)\}$ jest dobrze określony.

Zbieżność ciągu $\{u_m(x)\}$ ustalamy rozpatrując szereg

$$u_0(x)+\sum_{m=0}^{\infty}[u_{m+1}(x)-u_m(x)]. \tag{3}$$

§ 3. Niech

$$\beta(x) = \sup_{a\leqslant t\leqslant x} B(t),$$

wówczas, wobec założenia H_0, mamy

$$\|u_0(x)\| \leqslant \beta(x).$$

Korzystając z założeń H_0 i H_1 otrzymujemy

$$\|u_m(x)-u_{m-1}(x)\|\leqslant \beta(x)\frac{[S(x)]^m}{m!}, \qquad m=1,2,\ldots, \tag{4}$$

gdzie

$$S(x) = \int_a^x A(t,t)\,dt.$$

Nierówność (4) uzasadniamy wykorzystując zasadę indukcji matematycznej. Przede wszystkim mamy

$$\|u_1(x)-u_0(x)\| \leqslant \int_a^x \big\|F\big(x,t,u_0(t)\big)\big\|\,dt \leqslant \int_a^x A(x,t)\|b(t)\|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^x A(t,t)B(t)\,dt \leqslant \beta(x)S(x).$$

Dalej, zakładając, że wzór (4) jest prawdziwy dla liczby naturalnej $m\geqslant 1$, otrzymujemy

$$\|u_{m+1}(x)-u_m(x)\| \leqslant \int_a^x A(x,t)\|u_m(t)-u_{m-1}(t)\|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^x A(t,t)\beta(t)\frac{[S(t)]^m}{m!}\,dt \leqslant \beta(x)\int_a^x A(t,t)\frac{[S(t)]^m}{m!}\,dt =$$
$$= \beta(x)\int_a^x \frac{d}{dt}\left\{\frac{[S(t)]^{m+1}}{(m+1)!}\right\}dt = \beta(x)\frac{[S(x)]^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Powyższe nierówności łącznie z zasadą indukcji matematycznej dowodzą prawdziwości nierówności (4). Szereg

$$\beta(x)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[S(x)]^m}{m!} = \beta(x)\exp\Big(\int_a^x A(t,t)\,dt\Big) \tag{5}$$

jest majorantą szeregu (3). Z uwagi na to, że funkcje $\beta(x)$ i $S(x)$ są niemalejące wnioskujemy, iż szereg (3) jest niemal jednostajnie zbieżny w przedziale $\langle a, +\infty)$. Mamy ponadto następujące oszacowanie:

$$\|u(x)\| \leqslant \beta(x)\exp\Big(\int_a^x A(t,t)\,dt\Big) \quad \text{dla} \quad x \in J, \tag{6}$$

gdzie funkcja wektorowa $u(x)$ jest sumą szeregu (3). Widoczne jest bezpośrednio, że funkcja wektorowa $u(x)$, równa sumie szeregu (3), jest rozwiązaniem układu (1). Stwierdzamy również, że funkcja wektorowa $u(x)$ równa sumie szeregu (3) jest jedynym ograniczonym w każdym przedziale $\langle a, b\rangle$, $b \geqslant a$, rozwiązaniem układu (1).

Istotnie, przypuśćmy, że istnieje funkcja wektorowa $v(x)$, $v(x) \not\equiv u(x)$, ograniczona w przedziale $\langle a, b\rangle$, $b \geqslant a$, i spełniająca układ (1). Wówczas, podobnie jak poprzednio, stosując zasadę indukcji otrzymujemy

$$\|v(x) - u_m(x)\| \leqslant K(x)\frac{[S(x)]^{m+1}}{(m+1)!}, \qquad m = 0, 1, \ldots,$$

gdzie $K(x) = \sup\limits_{a \leqslant t \leqslant x} \|v(t)\|$. Z nierówności tej wynika, że $v(x) \equiv u(x)$, co jest sprzeczne z przypuszczeniem.

Rezultaty przeprowadzonych rozważań możemy zestawić w postaci twierdzenia.

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli spełnione są założenia* H_0 *i* H_1, *to układ równań* (1) *ma jedyne ograniczone w każdym przedziale* $\langle a, b\rangle$, $b \geqslant a$, *rozwiązanie* $u(x)$ *określone szeregiem* (3), *oraz zachodzi oszacowanie*

$$\|u(x)\| \leqslant \beta(x)\exp\Big(\int_a^x A(t,t)\,dt\Big) \quad \textit{dla} \quad x \in J,$$

gdzie $\beta(x) = \sup\limits_{a \leqslant t \leqslant x} B(t)$.

WNIOSEK 1. *Jeżeli spełnione są założenia* H_0 *i* H_1 *oraz*

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\, \beta(x) < +\infty, \qquad \overline{\lim_{x\to\infty}} \int_a^x A(t,t)\,dt < +\infty,$$

to rozwiązanie układu (1) *określone szeregiem* (3) *jest ograniczone dla* $x \in J$.

§ 4. Na podstawie założeń H_0 i H_2 mamy

$$\|u_0(x)\| \leqslant B(x) \leqslant A(x,x)$$

oraz

$$\|u_m(x) - u_{m-1}(x)\| \leqslant A(x,x)\frac{[S(x)]^m}{m!}, \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Prawdziwość oszacowania (7) dowodzimy analogicznie jak nierówności (4).

Szereg

$$(8) \qquad A(x,x)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[S(x)]^m}{m!} = A(x,x)\exp\Big(\int_a^x A(t,t)\,dt\Big)$$

jest majorantą szeregu (3). Szereg (3) jest niemal jednostajnie zbieżny w przedziale $\langle a, +\infty)$, a jego suma $u(x)$ jest jedynym rozwiązaniem układu (1) ograniczonym w każdym przedziale $\langle a, b\rangle$, $b \geqslant a$.

Widoczne jest również, że zachodzi następujące oszacowanie:

$$\|u(x)\| \leqslant A(x,x)\exp\Big(\int_a^x A(t,t)\,dt\Big) \quad \text{dla} \quad x\in J.$$

Rezultaty powyższych rozważań zestawiamy w postaci twierdzenia.

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli spełnione są założenia* H_0 *i* H_2, *to układ równań* (1) *ma jedyne ograniczone w każdym przedziale* $\langle a, b\rangle$, $b \geqslant a$, *rozwiązanie* $u(x)$ *określone szeregiem* (3), *oraz zachodzi oszacowanie*:

$$\|u(x)\| \leqslant A(x,x)\exp\Big(\int_a^x A(t,t)\,dt\Big) \quad \textit{dla} \quad x\in J.$$

WNIOSEK 2. *Jeżeli spełnione są założenia* H_0 *i* H_2 *oraz*

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} A(x,x) < +\infty, \qquad \overline{\lim_{x\to\infty}}\int_a^x A(t,t)\,dt < +\infty,$$

to rozwiązanie układu (1) *określone szeregiem* (3) *jest ograniczone dla* $x\in J$.

Prace cytowane

[1] Z. Butlewski, *Sur la limitation des solutions d'un système équations intégrales de Volterra,* Ann. Polon. Math. 6 (1959), str. 253-257.

[2] R. Sikorski, *Funkcje rzeczywiste,* tom I, Warszawa 1958.

М. Квапиш (Гданьск)

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРЫ

РЕЗЮМЕ

Пусть

$$u(x) = \int_a^x F\big(x, t, u(t)\big)\,dt + b(x)$$

нелинейная система интегральных уравнений Вольтерры в векторном представлении. Найдены достаточные условия для того, чтобы эта система имела во вся-

ком интервале $\langle a, b\rangle$ единое ограниченное решение $u(x)$, данное рядом

$$u_0(x)+\sum_{m=0}^{\infty}[u_{m+1}(x)-u_m(x)],$$

где

$$u_0(x) = b(x),$$

$$u_m(x) = \int_a^x F(x, t, u_{m-1}(t))\,dt+u_0(x) \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

причем дается оценка нормы $\|u(x)\|$.

M. Kwapisz (Gdańsk)

A REMARK ON THE BOUNDEDNESS OF SOLUTIONS OF A SYSTEM OF INTEGRAL EQUATIONS OF VOLTERRA

SUMMARY

Let

$$u(x) = \int_a^x F(x, t, u(t))\,dt+b(x)$$

be a system of n nonlinear integral equations of Volterra in vector notation. The author finds sufficient conditions under which this system has in every interval $\langle a, b\rangle$ a unique bounded solution $u(x)$, given by the series

$$u_0(x)+\sum_{m=0}^{\infty}[u_{m+1}(x)-u_m(x)],$$

where

$$u_0(x) = b(x),$$

$$u_m(x) = \int_a^x F(x, t, u_{m-1}(t))\,dt+u_0(x) \qquad (m = 1, 2, \ldots),$$

and gives an estimation of the norm $\|u(x)\|$.