



W. MATUSZEWSKA (Poznań)

Przestrzenie funkcji φ -całkowalnych

Część I. Własności ogólne φ -funkcji i klas funkcji φ -całkowalnych

0. Przedmiotem tej pracy jest zbadanie własności pewnych klas funkcji, które stanowią naturalne uogólnienie klas funkcji całkowalnych z wykładnikiem $\alpha > 0$. W tym celu wprowadza się pojęcie funkcji φ -całkowalnych w następujący sposób. Nazywać będziemy φ -funkcją funkcję rzeczywistą φ niemalejącą i ciągłą dla $u \geq 0$, równą 0 tylko dla 0, dążącą do ∞ , gdy $u \rightarrow \infty$. W dalszym ciągu φ -funkcje oznaczamy literami greckimi: $\varphi, \psi, \chi, \dots$. Nazywamy funkcję x mierzalną w (a, b) φ -całkowalną, jeżeli φ jest φ -funkcją i gdy następująca całka ma skończoną wartość:

$$\int_a^b \varphi(|x(t)|) dt.$$

Klasa funkcji φ -całkowalnych jest w przestrzeni funkcji mierzalnych zbiorem wypukłym, lecz, ogólnie biorąc, nie jest zbiorem liniowym. Dlatego wprowadza się klasę ogólniejszą (*funkcje φ -całkowalne w sensie szerszym*) złożoną z funkcji x o tej własności, że przy pewnym $\lambda > 0$ jest λx φ -całkowalna. Ma ona tę zaletę, że jest liniową podprzestrzenią przestrzeni funkcji mierzalnych. Dla $\varphi(u) = u^a$, $a > 0$, otrzymujemy klasyczny przypadek funkcji całkowalnych z wykładnikiem a . Dla φ wypukłych przestrzenie funkcji φ -całkowalnych w sensie szerszym są znane pod nazwą *przestrzeni Orlicza*, który pierwszy wyróżnił tę klasę przestrzeni w [11] (por. również [12], [4], [14]) przy pewnych nieistotnych dodatkowych założeniach. Jako naturalne uogólnienie ważnych w zastosowaniach przestrzeni $L^a(a, b)$, $a \geq 1$, przestrzenie Orlicza były przedmiotem licznych prac. W monografii M. A. Krasnosielskiego i J. B. Rutickiego [4] można znaleźć zestawienie odnośnej literatury.

W tej pracy nazywać będę *uogólnioną przestrzenią Orlicza* przestrzeń złożoną z funkcji φ -całkowalnych w sensie szerszym, gdy φ jest dowolną φ -funkcją. Badaniem własności uogólnionych przestrzeni Orlicza zajęto się dopiero niedawno w pracach S. Mazura i W. Orlicza [6] oraz S. Rolewicza [13]. Również J. Musielak i W. Orlicz w [7], [8], uogólniając teorię

przestrzeni modularnych Nakany i jego szkoły (por. np. [9], [10]), uzyskali pewne wyniki dla uogólnionych przestrzeni Orlicza. Brak jest jednak dotąd systematycznego studium tej klasy przestrzeni. Niniejsza praca stanowi rodzaj wstępu do teorii uogólnionych przestrzeni Orlicza, a więc i do badań bardziej szczegółowych, które wymagają od przypadku do przypadku różnych specjalnych założeń o φ -funkcjach. Układ pracy jest następujący. W części I, która stanowi treść niniejszej pracy, w sekcji 1 badam własności samych φ -funkcji, przy czym jako fundamentalne pojęcia wprowadza się definicje φ -funkcji równoważnych i φ -funkcji nie-słabszej od jakiejś innej φ -funkcji. Wprowadzone definicje tych pojęć są ogólniejsze od używanych w pracach Z. Birnbauma i W. Orlicza [1] i w [4]. Równoważność φ -funkcji i możliwość ich porównywania grają istotną rolę przy badaniu struktury uogólnionych przestrzeni Orlicza. Część II pracy, która ukazuje się oddzielnie, zawiera sekcję 3. W tej sekcji, najdłuższej, zajmuję się wprowadzeniem fundamentalnych pojęć topologicznych do uogólnionych przestrzeni Orlicza. Głównym przedmiotem sekcji jest możliwość wprowadzenia w tych przestrzeniach F -normy, a w szczególności normy s -jednorodnej. Uzyskane wyniki uogólniają i uzupełniają wyniki z [6] i [13]. Bada się też tzw. φ -zbieżność, która odpowiada zbieżności znanej w bardziej ogólnej teorii przestrzeni modularnych pod nazwą zbieżności modularnej.

Na zakończenie wstępu pragnęłabym podziękować prof. drowi W. Orliczowi za cenne uwagi i sugestie oraz życzliwą opiekę w trakcie przygotowywania niniejszej pracy.

1.1. Funkcję ψ nazywamy *równoważną z φ dla dużych u* , jeżeli istnieją stałe $a, b, c, k_1, k_2, l, u_0 > 0$ takie, że

$$(*) \quad a\varphi(k_1 u) \leq c\psi(lu) \leq b\varphi(k_2 u) \quad \text{dla} \quad u \geq u_0.$$

Dla zaznaczenia, że ψ jest równoważna z φ używamy będziemy symbolu $\psi \stackrel{l}{\sim} \varphi$. Równoważna z powyższą definicją równoważności ψ z φ jest następująca definicja:

$$a\varphi(k_1 u) \leq \psi(u) \leq b\varphi(k_2 u) \quad \text{dla} \quad u \geq u_0,$$

przy czym, oczywiście, stałe występujące w tej nierówności nie są identyczne ze stałymi z nierówności poprzedniej.

1.21. Jeżeli $\psi \stackrel{l}{\sim} \varphi$, to $\varphi \stackrel{l}{\sim} \psi$; z $\psi \stackrel{l}{\sim} \varphi$, $\varphi \stackrel{l}{\sim} \chi$ wynika $\psi \stackrel{l}{\sim} \chi$.

1.211. $\varphi(u) \sim \varphi(ku)$ dla $k > 0$; jeżeli $\varphi \stackrel{l}{\sim} \psi$, to $\varphi(u^s) \stackrel{l}{\sim} \psi(u^s)$, gdzie $s > 0$.

1.22. Jeżeli $W(u, v, w, \dots)$ oznacza wielomian o współczynnikach dodatnich, $W(0, 0, 0, \dots) = 0$ i $\psi_i \stackrel{l}{\sim} \varphi_i$, to $W(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots) \stackrel{l}{\sim} W(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots)$.

Łatwe dowody lematów 1.21, 1.211 i 1.22 pomijamy.

1.3. Funkcję φ nazywamy *nieślabszą od ψ dla dużych u* , i piszemy $\varphi \overset{l}{\succ} \psi$, jeżeli przy pewnych stałych c, b, l, k, u_0 spełniona jest nierówność

$$c\varphi(lu) \leq b\varphi(ku), \quad \text{gdy} \quad u \geq u_0.$$

Jasne jest, że wtedy i tylko wtedy równocześnie $\varphi \overset{l}{\succ} \psi$, $\varphi \overset{l}{\prec} \psi$, gdy $\varphi \overset{l}{\sim} \psi$.

1.31. Jeżeli $\varphi \overset{l}{\succ} \psi$, $\psi \overset{l}{\succ} \chi$, to $\varphi \overset{l}{\succ} \chi$; jeżeli $\varphi \overset{l}{\sim} \varphi_1$, $\psi \overset{l}{\sim} \psi_1$, $\varphi \overset{l}{\succ} \psi$, to $\varphi_1 \overset{l}{\succ} \psi_1$.

1.32. Przy tym samym znaczeniu W jak w 1.22 jest

$$W(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots) \overset{l}{\succ} W(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots),$$

jeżeli $\psi_i \overset{l}{\succ} \varphi_i$.

1.4. Funkcję ψ nazywamy *równoważną z φ dla małych u (dla wszystkich u)*, co oznaczamy przez $\psi \overset{s}{\sim} \varphi$, (przez $\psi \overset{a}{\sim} \varphi$), jeżeli przy pewnych stałych, nierówności 1.1, (*) spełnione są dla $0 \leq u \leq u_0$ (dla wszystkich $u \geq 0$).

Uwagi i lematy podane w 1.1-1.22 pozostają w mocy dla relacji $\overset{s}{\sim}$ i $\overset{a}{\sim}$, przy tym warunek „dla $u \geq u_0$ ”, należy zastąpić odpowiednio przez „dla $0 \leq u \leq u_0$ ” albo „dla $u \geq 0$ ”.

Analogicznie można przenieść definicję φ nieślabszej od ψ dla dużych u na przypadek małych u lub wszystkich u .

Celem uproszczenia sformułowań pewnych twierdzeń używać będziemy następującego sposobu wyrażania się: pewną własność P funkcji φ nazywać będziemy *własnością klasową*, odpowiednio w sensie l, s lub a , jeżeli z tego, że posiada ją funkcja φ i $\varphi \overset{l}{\sim} \psi$, $\varphi \overset{s}{\sim} \psi$ lub $\varphi \overset{a}{\sim} \psi$ wynika, że również ψ posiada własność P .

1.5. O funkcji φ mówimy, że *spełnia warunek (Δ_2) dla dużych u* , jeżeli przy pewnej stałej $d > 1$ spełniona jest nierówność

$$(*) \quad \varphi(2u) \leq d\varphi(u), \quad \text{dla} \quad u \geq u_0.$$

Analogicznie określa się warunek (Δ_2) dla małych u i dla wszystkich u .

1.51. Warunek (Δ_2) dla dużych u , dla małych u lub dla wszystkich u jest odpowiednio własnością klasową w sensie l, s lub a .

Różne przykłady funkcji spełniających warunek (Δ_2) i dokładniejsze zbadanie ich własności znaleźć można w monografii Krasnosielskiego i Rutickiego [4].

1.52. Mówimy, że φ spełnia warunek (Δ_a) , $a > 1$, dla dużych u , jeżeli przy pewnej stałej $d_a > 1$ spełniona jest nierówność

$$(*) \quad \varphi(au) \leq d_a \varphi(u),$$

dla $u \geq u_0(a)$.

Analogicznie określa się warunek (Δ_a) dla małych u i dla wszystkich u .

1.521. Warunek (Δ_2) dla dużych u (dla małych u , dla wszystkich u) jest równoważny warunkowi (Δ_a) , $a > 1$ dla dużych u (dla małych u , dla wszystkich u).

Jeżeli (Δ_2) jest spełnione dla $u \geq u_0$ i przy całkowitym $m > 0$ jest $a \leq 2^m$, to $\varphi(au) \leq \varphi(2^m u) \leq d_a^m \varphi(u)$, gdy $u \geq u_0$; określamy $d_a = d_a^m$.

Jeżeli (Δ_a) , gdzie $a > 1$, jest spełnione dla $u \geq u_0(a)$ oraz $2 \leq a^m$, to $\varphi(2u) \leq \varphi(a^m u) \leq d_a^m \varphi(u)$ dla $u \geq u_0(a)$; określamy $d_a^m = d$. Analogicznie w pozostałych przypadkach.

1.53. Mówimy, że φ spełnia warunek (Λ_a) , $a > 1$, dla dużych u , jeżeli przy pewnej stałej $c_a > 1$ spełniona jest nierówność

$$(*) \quad \varphi(u)c_a \leq \varphi(au)$$

dla $u \geq u_0(a)$. Analogicznie określa się warunek (Λ_a) dla małych u i dla wszystkich u . Jest on własnością klasową we wszystkich 3 przypadkach odpowiedniej równoważności.

1.54. (α) Jeżeli φ spełnia warunek (Δ_a) dla dużych u , to $\varphi(\lambda u) \leq a^r \lambda^r \varphi(u)$ dla $u \geq u_0(a)$ i dowolnego $\lambda \geq 1$, gdzie $r = \lg d_a / \lg a$, przy czym d_a oznacza stałą występującą w 1.52, (*).

(β) Jeżeli φ spełnia warunek (Λ_a) dla dużych u , to $\varphi(\lambda u) \geq a^{-s} \lambda^s \varphi(u)$ dla dużych u , $\lambda \geq 1$, gdzie $s = \lg c_a / \lg a$, przy czym c_a oznacza stałą występującą w 1.53, (*).

Analogiczne twierdzenia są prawdziwe w przypadku (Δ_a) , (Λ_a) dla $u \geq 0$.

Z (Δ_a) wynika $\varphi(a^m u) \leq d_a^m \varphi(u)$, gdy $u \geq u_0(a)$, więc jeżeli $a^{m-1} \leq \lambda < a^m$, to $\varphi(\lambda u) \leq \varphi(a^m u) \leq (d_a^m)^r \varphi(u) \leq a^r \lambda^r \varphi(u)$.

Analogicznie dowodzi się (β):

$$a^m \leq \lambda < a^{m+1}, \quad \varphi(\lambda u) \geq \varphi(a^m u) \geq (c_a^m)^s \varphi(u) \geq a^{-s} \lambda^s \varphi(u)$$

dla $u \geq u_0(a)$.

1.55. Dla danej φ wprowadźmy funkcje przyjmujące wartości $\leq \infty$:

$$\bar{h}(\lambda) = \overline{\lim}_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u)}{\varphi(\lambda u)}, \quad h(\lambda) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u)}{\varphi(\lambda u)}.$$

Funckje te odgrywają pewną rolę w naszych badaniach.

(α) $\bar{h}(\lambda)$, $h(\lambda)$ są nierosnące dla $\lambda > 0$.

(β) Jeżeli istnieje $0 < \lambda_0 < 1$ takie, że $\bar{h}(\lambda_0) \leq a$, to spełniony jest warunek (Δ_a) dla dużych u oraz $\bar{h}(\lambda)$ jest ograniczona w otoczeniu 1.

(γ) Jeżeli istnieje $0 < \lambda_0 < 1$ takie, że $\underline{h}(\lambda_0) > 1$, to spełniony jest warunek (Λ_a) dla dużych u przy pewnym a oraz $h(\lambda) \rightarrow \infty$, gdy $\lambda \rightarrow 0+$.

Ad (β). Jest $\varphi(u) \leq 2a\varphi(\lambda_0 u)$ dla $u \geq u_0$, więc $\varphi(u/\lambda_0) \leq 2a\varphi(u)$ i z 1.521 wynika (Δ_a) . Według 1.54, (α), jest, przy $0 < \lambda < 1$,

$$\varphi(u)/\varphi(\lambda u) \leq a^r \frac{1}{\lambda^r}.$$

Ad (γ). Jeżeli istnieje $0 < \lambda_0 < 1$ takie, że $\underline{h}(\lambda_0) > 1$, to $\varphi(u/\lambda_0) > c\varphi(u)$ dla dużych u , przy czym $c > 1$, czyli spełniony jest warunek (Λ_a) przy $a = 1/\lambda_0$. Stąd, na mocy 1.54, (β), jest dla $0 < \lambda < 1$, $\varphi(u)/\varphi(\lambda u) > a^{-s}\lambda^s$, $h(\lambda) \geq a^{-s}/\lambda^s$.

Powyższe twierdzenia uzupełnimy następującymi uwagami. Jeżeli φ jest wypukła, to spełnia (Λ_a) dla $u \geq 0$ przy każdym $a > 1$ ze stałą $c_a = a$; jeżeli φ jest wklęsła, to spełnia warunek (Δ_a) dla $u \geq 0$ ze stałą $d_a = a$.

Z monotoniczności ilorazu $\varphi(u)/u$ wynika w pierwszym przypadku dla $a > 1$, $\varphi(au) \geq a\varphi(u)$, w drugim zaś $\varphi(au) \leq a\varphi(u)$.

Jeżeli $\bar{h}(\lambda) = 1$ dla $0 < \lambda \leq 1$, to z uwagi na $h(\lambda) \geq 1$ jest $\bar{h}(\lambda) = \underline{h}(\lambda)$, a stąd wynika istnienie granicy

$$(+)\quad \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u)}{\varphi(\lambda u)} = 1 \quad \text{dla} \quad \lambda > 0.$$

Funkcje spełniające (+) są to tzw. *funkcje o wolnej zmienności*, wprowadzone przez Karamatę (por. [3]). W ogólnym przypadku założenie monotoniczności jest zbędne. Funkcje te znajdują pewne zastosowania np. w teorii szeregów Fouriera. Funkcjami o wolnej zmienności są np. $\varphi(u)$ równe $(\lg u)^\gamma$, $(\lg \lg u)^\gamma$, $\gamma > 0$, $(\lg u + \sin \lg u)$ dla dużych u , a w otoczeniu 0 uzupełnione np. do funkcji ciągłej, monotonicznej i zerającej się w 0. Zauważmy, że φ -funkcje o wolnej zmienności przy żadnym $a > 1$ nie spełniają warunku (Λ_a) dla dużych u . Natomiast przy każdym $a > 1$ spełniają (Δ_a) ze stałą $d_a \leq 1 + \varepsilon$, gdzie $\varepsilon > 0$ można wziąć dowolnie małe. Wynika stąd, według 1.54, (α), $\varphi(\lambda u) \leq (1 + \varepsilon)\lambda^r \varphi(u)$ dla $\lambda > 1$ (dla $u \geq u(\varepsilon)$), przy czym $r \leq \lg(1 + \varepsilon)/\lg a$, a więc r jest dowolną liczbą dodatnią. Mamy więc dla $s > r$, $\varphi(\lambda u)\lambda^{-s} \leq (1 + \varepsilon)\lambda^{r-s} \varphi(u)$, czyli $\varphi(\lambda u)/\lambda^s \rightarrow 0$ przy pewnym u , więc $\varphi(\lambda)/\lambda^s \rightarrow 0$, gdy $\lambda \rightarrow \infty$ przy dowolnym $s > 0$.

Funkcja φ spełnia warunek (Δ') dla $u \geq 0$, jeżeli przy pewnej stałej $c > 0$ (por. [1], [4])

$$\varphi(uv) \leq c\varphi(u)\varphi(v) \quad \text{dla} \quad u \geq 0, v \geq 0.$$

Jasne jest, że z warunku (Δ') wynika (Δ_2) dla $u \geq 0$ oraz (Λ_a) dla dostatecznie dużych a .

1.56. Jeżeli określimy funkcje

$$\underline{h}_1(\lambda) = \inf_{u>0} \frac{\varphi(u)}{\varphi(\lambda u)}, \quad \bar{h}_1(\lambda) = \sup_{u>0} \frac{\varphi(u)}{\varphi(\lambda u)},$$

to biorąc w twierdzeniach 1.55, (α) - (γ) , $\underline{h}_1, \bar{h}_1$ w miejsce $\underline{h}, \bar{h}$ i $(\Delta_a), (\Lambda_a)$ dla $u \geq 0$ zamiast dla dużych u , otrzymamy twierdzenia analogiczne dla przypadku $u \geq 0$.

1.6. Wtedy i tylko wtedy $\varphi \stackrel{l}{\sim} \psi$, gdzie ψ jest funkcją wypukłą, jeżeli istnieje stałe $m > 0$, $n > 0$, $u_0 \geq 0$ takie, że

$$(*) \quad \frac{\varphi(u_2)}{u_2} \geq m \frac{\varphi(nu_1)}{u_1}$$

dla $u_2 \geq u_1 \geq u_0$.

Powyższe twierdzenie pozostaje w mocy, gdy relację równoważności $\stackrel{l}{\sim}$ zastąpimy przez $\stackrel{s}{\sim}, \stackrel{a}{\sim}$ i zastąpimy „dla $u_2 \geq u_1 \geq u_0$ ” odpowiednio przez „ $0 < u_1 \leq u_2 \leq u_0$ ”, „ $0 < u_1 \leq u_2$ ”.

Jeżeli $\varphi \stackrel{l}{\sim} \psi$, gdzie ψ jest funkcją wypukłą, to

$$a\psi(k_1 u) \leq \varphi(u) \leq b\psi(k_2 u) \quad \text{dla} \quad u \geq u_0,$$

więc dla $u_2 \geq u_1 \geq \max\left(u_0, \frac{k_2}{k_1} u_0\right)$,

$$\frac{\varphi(u_2)}{u_2} \geq a \frac{\psi(k_1 u_2)}{u_2} \geq a \frac{\psi(k_1 u_1)}{u_1} = a \frac{\psi\left(k_2 \frac{k_1}{k_2} u_1\right)}{u_1} \geq \frac{a}{b} \cdot \frac{\varphi\left(\frac{k_1}{k_2} u_1\right)}{u_1}.$$

Dla dowodu dostateczności określimy

$$(a) \quad s(u) = \sup_{u_0 \leq t \leq u} m \frac{\varphi(nt)}{t} \quad \text{dla} \quad u \geq u_0 > 0,$$

$$(b) \quad s(u) = \frac{m}{u_0} \cdot \frac{\varphi(nu_0)}{u_0} u \quad \text{dla} \quad 0 \leq u < u_0.$$

Z (*) wynika

$$\frac{\varphi(u)}{u} \geq s(u) \geq m \frac{\varphi(nu)}{u}, \quad \text{gdy} \quad u \geq u_0,$$

a $s(u)$ jest niemalejąca dla $u \geq 0$. Niech $\varphi(u) = \int_0^u s(t) dt$; jest $\varphi(u) \leq s(u)u$, $\varphi(u) \geq \frac{1}{2}us(\frac{1}{2}u)$, zatem dla $u \geq 2u_0$

$$\varphi(u) \geq \varphi(u), \quad \varphi(u) \geq m\varphi\left(\frac{n}{2}u\right).$$

W przypadku równoważności dla małych u (wszystkich u) określamy $s(u)$ wzorem (a) dla $0 < u \leq u_0$ (dla $u > 0$) obliczając $\sup$ dla $0 < t \leq u$ i definiujemy

$$s(u) = \frac{\varphi(u_0)}{u_0^2} u \quad \text{dla} \quad u \geq u_0.$$

1.61. *Wtedy i tylko wtedy $\varphi \stackrel{l}{\sim} \psi$, gdzie ψ jest funkcją wklęsłą, jeżeli istnieją stałe $m > 0$, $n > 0$, $u_0 > 0$ takie, że*

$$(*) \quad \frac{\varphi(u_2)}{u_2} \leq m \frac{\varphi(nu_1)}{u_1} \quad \text{dla} \quad u_2 \geq u_1 > u_0.$$

Analogicznie dla $\stackrel{s}{\sim}, \stackrel{a}{\sim}$.

Dowód prowadzi się analogicznie jak w 1.6 z tym, że funkcję $s(u)$ określa się obecnie następująco:

$$(a) \quad s(u) = \inf_{t \leq u} m \frac{\varphi(nt)}{t} \quad \text{dla} \quad u \geq u_0,$$

$$(b) \quad s(u) = \left(m \frac{\varphi(nu_0)}{u_0} + 1 \right) \frac{u}{u_0} \quad \text{dla} \quad 0 \leq u \leq u_0.$$

1.62. *Jeżeli φ jest subaddytywna, tzn. $\varphi(u_1 + u_2) \leq \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$, gdy $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$, to φ jest równoważna z funkcją wklęsłą.*

Niech $u_2 > u_1 > 0$, $2^n u_1 \leq u_2 < 2^{n+1} u_1$, gdzie $n = 0, 1, 2, \dots$. Jest

$$\frac{\varphi(u_2)}{u_2} \leq \frac{\varphi(2^{n+1} u_1)}{u_2} \leq \frac{2^{n+1} \varphi(u_1)}{2^n u_1} = 2 \frac{\varphi(u_1)}{u_1}.$$

Na powyższe twierdzenie zwraca uwagę S. Rolewicz w [13] bez dowodu.

1.63. *Jeżeli $\varphi \stackrel{l}{\sim} \psi$, gdzie ψ jest funkcją wklęsłą, to φ spełnia warunek (Δ_2) dla dużych u .*

1.64. *Jeżeli φ jest wklęsłą, to jest subaddytywna (por. Hille [2], str. 132). Gdy φ jest wklęsłą, to $\varphi(u_2)/u_2 \leq \varphi(u_1)/u_1$ dla $u_2 \geq u_1$;*

$$\begin{aligned} \varphi(u_1 + u_2) &= u_1 \frac{\varphi(u_1 + u_2)}{u_1 + u_2} + u_2 \frac{\varphi(u_1 + u_2)}{u_1 + u_2} \leq u_1 \frac{\varphi(u_1)}{u_1} + u_2 \frac{\varphi(u_2)}{u_2} = \\ &= \varphi(u_1) + \varphi(u_2). \end{aligned}$$

Zatem φ jest równoważna z funkcją wklęsłą wtedy i tylko wtedy, gdy jest równoważna z funkcją subaddytywną.

1.641. *Jeżeli φ jest wypukłą, to jest superaddytywna, czyli*

$$\varphi(u_1 + u_2) \geq \varphi(u_1) + \varphi(u_2) \quad \text{dla} \quad u_1 \geq 0, u_2 \geq 0.$$

Bowiem $\varphi(u_1)/u_1 \leq \varphi(u_2)/u_2$, gdy $u_2 \geq u_1$,

$$\begin{aligned}\varphi(u_1 + u_2) &= u_1 \frac{\varphi(u_1 + u_2)}{u_1 + u_2} + u_2 \frac{\varphi(u_1 + u_2)}{u_1 + u_2} \geq u_1 \frac{\varphi(u_1)}{u_1} + u_2 \frac{\varphi(u_2)}{u_2} = \\ &= \varphi(u_1) + \varphi(u_2).\end{aligned}$$

1.642. Jeżeli φ jest superaddytywna, to jest równoważna z funkcją wypukłą.

Niech $u_2 > u_1 > 0$, $2^n u_1 \leq u_2 < 2^{n+1} u_1$. Zachodzi nierówność

$$\frac{\varphi(u_2)}{u_2} \geq \frac{\varphi(2^n u_1)}{u_2} \geq \frac{2^n \varphi(u_1)}{2^{n+1} u_1} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi(u_1)}{u_1}.$$

1.65. Na to, aby $\varphi \stackrel{l}{\sim} \chi$, gdzie $\chi(u) = \varphi(u^r)$, $r > 0$, φ jest funkcją wklęsłą, potrzeba i wystarcza, by

$$(*) \quad \frac{\varphi(u_2)}{u_2^r} \leq m \frac{\varphi(nu_1)}{u_1^r}, \quad m > 0, n > 0,$$

dla $u_2 \geq u_1 \geq u_0$.

Analogiczne twierdzenie jest prawdziwe dla $\stackrel{a}{\sim}, \stackrel{s}{\sim}$.

Istotnie, jest $\varphi(u^{1/r}) \stackrel{l}{\sim} \chi(u^{1/r})$ dla dużych u i wystarczy zastosować 1.61, podstawiając zamiast $u^{1/r}$ zmienną u .

1.661. Jeżeli φ spełnia warunek (Δ_a) dla dużych u , to zachodzi 1.65, (*), dla dużych u .

Można przyjąć $r = \lg d_a / \lg a$, $n = 1$, $m \leq a^r$, przy czym d_a oznacza stałą występującą w 1.52, (*).

Analogiczne twierdzenie jest słuszne, gdy zastąpimy warunek „dla dużych u ” przez „dla $u \geq 0$ ” i $\stackrel{l}{\sim}$ przez $\stackrel{a}{\sim}$.

Niech $u_2 \geq u_1 \geq u_0$, $\lambda = u_2/u_1$. Zastosujemy 1.54, (α): $\varphi(u_2) = \varphi(\lambda u_1) \leq a^r (u_2/u_1)^r \varphi(u_1)$; więc zachodzi 1.65, (*).

1.662. Jeżeli zachodzi 1.65, (*), to spełniony jest warunek (Δ_a) dla dużych u , przy czym można przyjąć $d_a \geq mn^r a^r$ dla $a > \sup(1, 1/n)$.

Niech $u_2 = au$, $u_1 = u/n$, $a > 1$, $a > 1/n$. Z 1.65, (*), otrzymujemy dla $u \geq nu_0$

$$\varphi(au) \leq a^r mn^r \varphi(u),$$

więc można przyjąć $d_a \geq mn^r a^r$.

Analogiczne twierdzenie jest prawdziwe w przypadku: dla wszystkich $u \geq 0$.

1.7. Na to, aby $\varphi \stackrel{l}{\sim} \chi$, gdzie $\chi(u) = \psi(u^s)$, $s > 0$, ψ jest funkcją wypukłą, potrzeba i wystarczy, by

$$(*) \quad \frac{\varphi(u_2)}{u_2^s} \geq m \frac{\varphi(nu_1)}{u_1^s}, \quad m > 0, \quad n > 0,$$

dla $u_2 \geq u_1 \geq u_0$.

Analogiczne twierdzenie jest prawdziwe dla $\stackrel{a}{\sim}, \sim$.

Istotnie, jest $\varphi(u^{1/s}) \stackrel{l}{\sim} \chi(u^{1/s}) \stackrel{l}{\sim} \psi(u)$ dla dużych u i wystarczy zastosować 1.6 podstawiając zamiast $u^{1/s}$ zmienną u .

1.71. Jeżeli φ spełnia warunek (Λ_a) dla dużych u , to zachodzi 1.7, (*), dla dużych u .

Można przyjąć $s = \lg c_a / \lg a$, przy czym c_a oznacza stałą występującą w 1.53, (*), $m \leq a^{-s}$, $n = 1$.

Analogiczne twierdzenie jest prawdziwe, gdy zastąpimy warunek „dla dużych u ” przez „dla $u \geq 0$ ” oraz $\stackrel{l}{\sim}$ przez $\stackrel{a}{\sim}$.

Niech $u_2 \geq u_1 \geq u_0$, $\lambda = u_2/u_1$. Według 1.54, (β), jest $\varphi(u_2) = \varphi(\lambda u_1) \geq a^{-s}(u_2/u_1)^s \varphi(u_1)$, więc zachodzi 1.7, (*).

1.72. Jeżeli zachodzi 1.7, (*), to spełniony jest warunek (Λ_a) dla dużych u i można przyjąć

$$a > \sup(m^{-1/s} n^{-1}, 1, n^{-1}).$$

Przyjmujemy jak w 1.662, $u_2 = au$, $u_1 = u/n$. Z 1.7, (*), otrzymujemy dla $u \geq \max(nu_0, u_0)$, $\varphi(au) \geq a^s n^s m \varphi(u)$.

1.8. Istnieje funkcja φ , która nie jest równoważna dla dużych u z funkcją wypukłą i spełniającą warunek $\varphi(u)/u \rightarrow \infty$, gdy $u \rightarrow \infty$.

Przykłady funkcji o podobnych własnościach można znaleźć też w [13].

Określimy ciągi v_n, u_n oraz funkcję φ sukcesywnie w następujący sposób. Przyjmujemy $u_1 > 0$, $0 < v_1 < u_1$ dowolnie i określamy $\varphi(u) = au$ w $\langle 0, v_1 \rangle$ z zachowaniem warunku $\varphi(v_1)/v_1 > 1$, a następnie $\varphi(u) = \varphi(v_1)$ w (v_1, u_1) . Przyjmijmy, że $v_1 < u_1 < v_2 < u_2 < \dots < v_{n-1} < u_{n-1}$ zostały już określone oraz funkcja φ jest określona w $\langle 0, u_{n-1} \rangle$. Obieramy u_n tak duże, aby $u_{n-1} < u_n/n$, zresztą dowolnie. Przyjmiemy $v_n = u_n/n$ i w (u_{n-1}, v_n) określamy $\varphi(u) = a(u - u_{n-1}) + \varphi(u_{n-1})$ z zachowaniem następujących warunków: a ma być tak duże, by $a > n$, $\varphi(v_n)/v_n > n^2$. Następnie w (v_n, u_n) określamy $\varphi(u) = \varphi(v_n)$. Funkcja φ jest niemalejąca, ciągła, $\varphi(0) = 0$. Dla $2u_{n-1} \leq u \leq v_n$ jest $\varphi(u)/u \geq a/2 > n/2$, dla $u_{n-1} \leq u \leq 2u_{n-1}$, $\varphi(u)/u \geq \varphi(u_{n-1})/2u_{n-1}$, dla $v_n \leq u \leq u_n$, $\varphi(u)/u \geq \varphi(v_n)/v_n n > n$, w szczególności $\varphi(u_n)/u_n \geq n$. Wynika stąd $\varphi(u)/u \rightarrow \infty$, gdy $u \rightarrow \infty$.

Przypuśćmy, że φ jest równoważna funkcji wypukłej dla dużych u . Na podstawie 1.6 dla każdego dostatecznie małego $\varepsilon > 0$ spełniona byłaby nierówność

$$\frac{\varphi(u_2)}{u_2} \geq \varepsilon \frac{\varphi(\varepsilon u_1)}{u_1} \quad \text{dla} \quad u_2 \geq u_1 \geq u_\varepsilon.$$

Dla dostatecznie dużego n jest $u_n/\sqrt{n} \geq u_\varepsilon$ oraz $\varepsilon > 1/\sqrt{n}$.

Mamy

$$\frac{\varphi(u_n)}{u_n} = \frac{\varphi(v_n)}{u_n} \geq \varepsilon \frac{\varphi\left(\varepsilon \frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)}{u_n/\sqrt{n}} \geq \varepsilon \sqrt{n} \frac{\varphi(v_n)}{u_n},$$

czyli $1 \geq \sqrt{n}\varepsilon$ i dochodzimy do sprzeczności.

1.81. (a) Funkcja o wolnej zmienności nie jest równoważna z funkcją wypukłą.

(b) Jeżeli φ jest o wolnej zmienności, to istnieje ψ taka, że $\varphi \stackrel{1}{\sim} \psi$, lecz φ nie jest równoważna z ψ w sensie Krasnosielskiego-Rutickiego, tzn. nie zachodzi $\varphi(r_1 u) \leq \psi(u) \leq \varphi(r_2 u)$ dla dużych u jakiegokolwiek obralibyśmy $r_1 > 0, r_2 > 0$.

Ad (a). Przypuśćmy, że $a\varphi(k_1 u) \leq \psi(u) \leq b\varphi(k_2 u)$ dla $u \geq u_0$, gdzie ψ jest funkcją wypukłą. Dla $u \geq u_0/a$, $0 < a < 1$, jest

$$a \frac{\varphi(ak_1 u)}{\varphi(u)} \leq \frac{\psi(au)}{\varphi(u)} \leq ab \frac{\varphi(ak_2 u)}{\varphi(u)},$$

stad przy $u \rightarrow \infty$, byłoby $a \leq ab$, co jest niemożliwe, gdy $0 < a < a/b$.

Ad (b). Obieramy dowolną funkcję rosnącą, ciągłą taką, że $\varrho(0) = 1$, $\varrho(u) \rightarrow 2$, gdy $u \rightarrow \infty$ i piszemy $\psi(u) = \varphi(u)\varrho(u)$. Oczywiście $\varphi \stackrel{1}{\sim} \psi$, lecz gdyby było $\varphi(r_1 u) \leq \psi(u) \leq \varphi(r_2 u)$, to dzieląc ostatnie nierówności przez $\varphi(u)$ otrzymalibyśmy przy $u \rightarrow \infty$, $1 \leq \lim_{u \rightarrow \infty} \varrho(u) \leq 1$.

2.1. Wprowadzimy obecnie następujące oznaczenia. Funkcje mierzalne w $\langle a, b \rangle$, rozpatrywane jako elementy przestrzeni funkcji mierzalnych, oznaczamy zawsze przez $x, y, z, \dots$, $|x|$ oznacza $|x(t)|$, $\sup(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sup^*(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, przy czym $\sup^*$ oznacza supremum istotne w $\langle a, b \rangle$. Przez x_n^0 oznaczamy n -tą funkcję obcięta dla funkcji x , tzn.

$$x_n^0(t) = \begin{cases} x(t), & \text{gdy} \quad |x(t)| \leq n, \\ 0, & \text{gdy} \quad |x(t)| > n. \end{cases}$$

Symbolem x_E , gdzie E jest zbiorem mierzalnym w $\langle a, b \rangle$, oznaczamy funkcję

$$x_E(t) = \begin{cases} x(t) & \text{dla} \quad t \in E, \\ 0 & \text{dla} \quad t \in \langle a, b \rangle - E. \end{cases}$$

χ_E oznacza funkcję charakterystyczną zbioru E .

Wprowadzimy teraz następujące oznaczenia:

$$I_\varphi(x) = \int_a^b \varphi(|x(t)|) dt, \quad I(x) = \int_a^b x(t) dt.$$

Przez $L^\varphi\langle a, b \rangle$ oznaczamy zbiór funkcji mierzalnych $x(t)$, dla których $I_\varphi(x) < \infty$, przez $L^{*\varphi}\langle a, b \rangle$ zbiór funkcji mierzalnych, dla których przy pewnym $\lambda > 0$ (zależnym od x w ogólności) jest $I_\varphi(\lambda x) < \infty$.

Łatwo można wykazać, że $L^\varphi\langle a, b \rangle$ jest zbiorem wypukłym, $L^{*\varphi}\langle a, b \rangle$ zbiorem liniowym (por. [7]). Oczywiście, jeżeli $\varphi_m(u) = \varphi(u/m)$, to

$$L^{*\varphi}\langle a, b \rangle = \bigcup_{m=1}^{\infty} L^{\varphi_m}\langle a, b \rangle.$$

Niech $\varphi(u) = u^a$, $a > 0$; w tym przypadku $L^\varphi\langle a, b \rangle$ oznacza przestrzeń funkcji całkowalnych z wykładnikiem a ; używamy wówczas zwykłego symbolu $L^a\langle a, b \rangle$ w miejsce $L^\varphi\langle a, b \rangle$. Przez $S\langle a, b \rangle$ lub $M\langle a, b \rangle$ oznaczamy przestrzeń liniową funkcji mierzalnych w $\langle a, b \rangle$ lub mierzalnych ograniczonych w $\langle a, b \rangle$. Równość $x = y$ oznacza zatem $x(t) = y(t)$ prawie wszędzie w $\langle a, b \rangle$. Następująca inkluzja jest oczywista: $L^\varphi\langle a, b \rangle \subset L^{*\varphi}\langle a, b \rangle \subset S\langle a, b \rangle$ przy dowolnym φ . Gdy $\langle a, b \rangle$ jest skończony, to $M\langle a, b \rangle \subset L^\varphi\langle a, b \rangle$; gdy $\langle a, b \rangle$ jest nieskończony, to ostatnia inkluzja nie zachodzi, ale w $L^\varphi\langle a, b \rangle$ zawarte są np. funkcje ograniczone, zerujące się na zewnątrz pewnego przedziału. Zbiór funkcji tego rodzaju oznaczać będziemy przez $M_0\langle a, b \rangle$.

2.2. Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, by

$$L^{\varphi_2}\langle a, b \rangle \subset L^{\varphi_1}\langle a, b \rangle,$$

jest spełnienie się nierówności

$$\varphi_1(u) \leq d\varphi_2(u), \quad \text{gdzie } d > 0,$$

(a) dla $u \geq u_0 \geq 0$, gdy $\langle a, b \rangle$ jest skończony,

(b) dla $u \geq 0$, gdy $\langle a, b \rangle$ jest nieskończony. (por. [1]).

Powyższe twierdzenie jest szczególnym przypadkiem następującego:

2.21. Na to, aby zachodziła inkluzja

$$\bigcap_{v=1}^{\infty} L^{\varphi_v}\langle a, b \rangle \subset L^\varphi\langle a, b \rangle$$

potrzeba i wystarcza, aby istniała liczba naturalna m taka, że

$$(*) \quad \varphi(u) \leq d \sup\{\varphi_1(u), \varphi_2(u), \dots, \varphi_m(u)\}, \quad \text{gdzie } d > 0,$$

(a) dla $u \geq u_0 \geq 0$, gdy $\langle a, b \rangle$ skończony,

(b) dla $u \geq 0$, gdy $\langle a, b \rangle$ nieskończony.

Niech $\bar{\varphi}_m(u) = \sup(\varphi_1(u), \varphi_2(u), \dots, \varphi_m(u))$. Ponieważ $\bar{\varphi}_m(u) \leq \varphi_1(u) + \varphi_2(u) + \dots + \varphi_m(u)$ dla $u \geq 0$, więc z (*) i $x \in \bigcap_{v=1}^{\infty} L^{\varphi_v} \langle a, b \rangle$ wynika

$$I_{\varphi}(x) \leq d(I_{\varphi_1}(x_E) + I_{\varphi_2}(x_E) + \dots + I_{\varphi_m}(x_E) + (b-a)\psi(u_0)) < \infty,$$

gdzie $E = \{t: |x(t)| \geq u_0\}$.

Przypuśćmy teraz, że (*) nie jest spełnione dla dostatecznie dużych u . Istnieje wówczas ciąg $u_n \rightarrow \infty$ taki, że $\psi(u_n) \geq 2^n \bar{\varphi}_n(u_n)$. Z $\varphi_1(u_n) \leq \bar{\varphi}_n(u_n)$ wynika $\bar{\varphi}_n(u_n) \rightarrow \infty$. Określamy w $\langle a, b \rangle$ zbiory mierzalne rozłączne E_n tak, by

$$|E_n| = \frac{b-a}{2^n \bar{\varphi}_n(u_n)},$$

oraz funkcję

$$x(t) = \begin{cases} u_n, & \text{gdy } t \in E_n, \\ 0, & \text{gdy } t \in \langle a, b \rangle - \bigcup_n E_n. \end{cases}$$

Mamy dla $m = 1, 2, \dots$

$$I_{\bar{\varphi}_m}^-(x) = \sum_{v=1}^{\infty} I_{\bar{\varphi}_m}^-(x_{E_v}) \leq \sum_{v=1}^{m-1} I_{\bar{\varphi}_m}^-(x_{E_v}) + (b-a),$$

ponieważ $\varphi_m(u_v) \leq \bar{\varphi}_v(u_v)$, $I_{\bar{\varphi}_m}^-(x_{E_v}) \leq (b-a)/2^v$ dla $v \geq m$.

Zatem

$$I_{\varphi_n}(x) \leq I_{\bar{\varphi}_n}^-(x) < \infty \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

Z drugiej strony, jest

$$I_{\varphi}(x) = \sum_{v=1}^{\infty} I_{\varphi}(x_{E_v}) = \sum_{v=1}^{\infty} |E_v| \psi(u_v) = \infty.$$

Analogicznie prowadzi się dowód w przypadku (b).

2.22. Na to, aby zachodziła inkluzja

$$L^{\psi} \langle a, b \rangle \subset \bigcap_{v=1}^{\infty} L^{\varphi_v} \langle a, b \rangle,$$

potrzeba i wystarcza, aby przy każdym naturalnym m zachodziła nierówność

$$\varphi_m(u) c_m \leq \psi(u), \quad \text{gdzie } c_m > 0,$$

(a) dla $u \geq u_0(m)$, gdy $\langle a, b \rangle$ skończony,

(b) dla $u \geq 0$, gdy $\langle a, b \rangle$ nieskończony.

Wynika to z 2.2.

2.23. Na to, aby zachodziła inkluzja

$$\bigcup_{\nu=1}^{\infty} L^{\varphi_{\nu}} \langle a, b \rangle \subset L^{\varphi} \langle a, b \rangle,$$

potrzeba i wystarcza, aby przy każdym naturalnym m zachodziła nierówność

$$\varphi(u) \leq d_m \varphi_m(u), \quad \text{gdzie} \quad d_m > 0,$$

(a) dla $u \geq u_0(m)$, gdy $\langle a, b \rangle$ skończony,

(b) dla $u \geq 0$, gdy $\langle a, b \rangle$ nieskończony.

Wynika to natychmiast z 2.2.

2.24. Na to, aby zachodziła inkluzja

$$L^{\varphi} \langle a, b \rangle \subset \bigcup_{\nu=1}^{\infty} L^{\varphi_{\nu}} \langle a, b \rangle,$$

potrzeba i wystarcza, aby przy pewnym naturalnym m zachodziła nierówność

$$(*) \quad \varphi_m(u) c_m \leq \varphi(u), \quad \text{gdzie} \quad c_m > 0,$$

(a) dla $u \geq u_0$, gdy $\langle a, b \rangle$ skończony,

(b) dla $u \geq 0$, gdy $\langle a, b \rangle$ nieskończony.

Dostateczność wynika natychmiast z 2.2. Rozpatrzmy konieczność w przypadku (a). Przypuśćmy, że $(*)$ nie zachodzi przy żadnym m . Istnieją wówczas ciągi $u_{mn} \rightarrow \infty$ przy $m = 1, 2, \dots$ takie, że

$$\varphi_m(u_{mn}) \geq 2^{m+n} \varphi(u_{mn}) \quad \text{i} \quad \varphi(u_{mn}) > 1$$

dla $n = 1, 2, \dots$ Przyporządkujmy pary (m, n) jednojednoznacznie liczbom naturalnym tak, że p odpowiada (m_p, n_p) . W $\langle a, b \rangle$ określmy zbiory mierzalne rozłączne E_p tak, że

$$|E_p| = \frac{b-a}{2^{m_p+n_p} \varphi(u_{m_p n_p})},$$

oraz funkcję

$$x(t) = \begin{cases} u_{m_p n_p} & \text{dla} \quad t \in E_p, p = 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{dla} \quad t = \langle a, b \rangle - \bigcup_p E_p. \end{cases}$$

Analogicznie jak w poprzednich dowodach wykazujemy, że $I_{\varphi}(x) < \infty$. Równocześnie spełniona jest nierówność

$$I_{\varphi_m}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} I_{\varphi_m}(x_{E_{\nu}}) \geq \sum_{\nu'} I_{\varphi_m}(x_{E_{\nu'}}),$$

gdzie ν' oznaczają te wskaźniki, dla których $m_{\nu'} = m$, $n_{\nu'}$ dowolne. Ponieważ $I_{\varphi_m}(x_{E_{\nu'}}) \geq b-a$, więc $I_{\varphi_m}(x) = \infty$.

2.25. Wtedy i tylko wtedy

$$L^\psi \langle a, b \rangle = \bigcup_{v=1}^{\infty} L^{\varphi_v} \langle a, b \rangle,$$

jeżeli między φ_n istnieje φ_k takie, że $L^{\varphi_n} \langle a, b \rangle \subset L^{\varphi_k} \langle a, b \rangle = L^\psi \langle a, b \rangle$ dla $n = 1, 2, \dots$

Z 2.23 i 2.24 wynika istnienie k , dla którego

$$\varphi_k(u) c_k \leq \psi(u) \leq d_n \varphi_n(u), \quad \text{gdy} \quad n = 1, 2, \dots$$

dla dostatecznie dużych u , gdy $\langle a, b \rangle$ skończony lub dla u dodatnich, gdy $\langle a, b \rangle$ nieskończony; wystarczy zastosować 2.2.

2.26. Wtedy i tylko wtedy

$$L^\psi \langle a, b \rangle = \bigcap_{v=1}^{\infty} L^{\varphi_v} \langle a, b \rangle,$$

jeśli pośród φ_n istnieje φ_k takie, że

$$L^{\varphi_n} \langle a, b \rangle \supset \bigcap_{v=1}^k L^{\varphi_v} \langle a, b \rangle = L^\psi \langle a, b \rangle \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \dots$$

Z 2.21 i 2.22 wynika istnienie k , dla którego

$$\sup(\varphi_1(u), \varphi_2(u), \dots, \varphi_n(u)) c_n \leq \psi(u) \leq d_k \sup(\varphi_1(u), \varphi_2(u), \dots, \varphi_k(u))$$

dla dostatecznie dużych u , gdy $\langle a, b \rangle$ skończony lub dla u dodatnich, gdy $\langle a, b \rangle$ nieskończony. Wystarczy zastosować 2.2 i zauważyć, że całkowalność x z funkcją $\sup(\varphi_1(u), \varphi_2(u), \dots, \varphi_k(u))$ jest równoważna z $x \in \bigcap_{v=1}^k L^{\varphi_v} \langle a, b \rangle$.

2.3. Z powyższego wynika natychmiast:

- (α) Jeżeli $L^{\varphi_n} \langle a, b \rangle \subset L^{\varphi_{n+1}} \langle a, b \rangle$, $L^{\varphi_{n+1}} \langle a, b \rangle - L^{\varphi_n} \langle a, b \rangle \neq \emptyset$ dla $n = 1, 2, \dots$, to dla każdego ψ jest $L^\psi \langle a, b \rangle \neq \bigcup_{v=1}^{\infty} L^{\varphi_v} \langle a, b \rangle$;
- (β) Jeżeli $L^{\varphi_n} \langle a, b \rangle \supset L^{\varphi_{n+1}} \langle a, b \rangle$, $L^{\varphi_n} \langle a, b \rangle - L^{\varphi_{n+1}} \langle a, b \rangle \neq \emptyset$ dla $n = 1, 2, \dots$, to dla każdego ψ ,

$$L^\psi \langle a, b \rangle \neq \bigcap_{v=1}^{\infty} L^{\varphi_v} \langle a, b \rangle.$$

2.4. Jeżeli spełniona jest relacja

(a) $\varphi_1 \xrightarrow{l} \varphi_2$, gdy $\langle a, b \rangle$ skończony,

(b) $\varphi_1 \xrightarrow{a} \varphi_2$, gdy $\langle a, b \rangle$ nieskończony, to $L^{*\varphi_2} \langle a, b \rangle \subset L^{*\varphi_1} \langle a, b \rangle$.

W obu przypadkach relacja $\xrightarrow{\cdot}$ pociąga, że jeżeli $I_{\varphi_2}(\lambda x) < \infty$ przy każdym $\lambda > 0$, to $I_{\varphi_1}(\lambda x) < \infty$ przy każdym $\lambda > 0$.

Odwrotnie, jeżeli $L^{*\varphi_2}\langle a, b \rangle \subset L^{*\varphi_1}\langle a, b \rangle$ lub jeżeli z $I_{\varphi_2}(\lambda x) < \infty$ przy każdym $\lambda > 0$ wynika $I_{\varphi_1}(\lambda x) < \infty$, to zachodzi (a) lub (b).

Ponieważ z $x \in L^{*\varphi_2}\langle a, b \rangle$ wynika $\lambda x \in L^{\varphi_2}\langle a, b \rangle$ przy pewnym $\lambda > 0$, więc dla dowodu dostateczności wystarczy pokazać, że $L^{\varphi_2}\langle a, b \rangle \subset L^{*\varphi_1}\langle a, b \rangle$.

Jeżeli $\varphi_1 \xrightarrow{l} \varphi_2$, to zachodzi nierówność $\varphi_1(u) \leq d\varphi_2(ku)$, $d > 0$, $k \geq 1$, dla $u \geq u_0$.

Niech $E = \{t: |x(t)| \geq u_0 k\}$, przy czym $\langle a, b \rangle$ niech będzie skończony. Spełniona jest nierówność

$$I_{\varphi_1}\left(\frac{1}{k} x_E\right) \leq d I_{\varphi_2}(x_E)$$

oraz

$$I_{\varphi_1}\left(\frac{1}{k} x_{\langle a, b \rangle - E}\right) \leq \varphi_1\left(\frac{u_0}{k}\right)(b-a).$$

Zatem $I_{\varphi_1}(x/k) < \infty$. W przypadku (b) jest $E = \langle a, b \rangle$. Dla dowodu konieczności zauważmy, że

$$L^{\varphi_2}\langle a, b \rangle \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} L^{\varphi_m}\langle a, b \rangle = L^{*\varphi_1}\langle a, b \rangle,$$

gdzie $\varphi_m(u) = \varphi_1(u/m)$. Niech $\langle a, b \rangle$ będzie skończony. Zastosujemy 2.24. Otrzymamy, przy pewnym m ,

$$\varphi_1\left(\frac{u}{m}\right) c_m \leq \varphi_2(u) \quad \text{dla dużych } u,$$

czyli $\varphi_1 \xrightarrow{l} \varphi_2$. Analogicznie w przypadku $\langle a, b \rangle$ nieskończonego otrzymamy $\varphi_1 \xrightarrow{a} \varphi_2$. Rozumujemy niewprost jak w 3.21 (część II, str. 151). Jeżeli x_n oznaczają funkcje tam określone, to dla $x = x_1 + x_2 + \dots$, $E_n \cap E_m = 0$, $I_{\varphi_2}(\lambda x) < \infty$ przy każdym $\lambda > 0$, lecz równocześnie $I_{\varphi_1}(\lambda x) = \infty$. Z powyższego otrzymujemy

2.41. Wtedy i tylko wtedy $L^{*\varphi_1}\langle a, b \rangle = L^{*\varphi_2}\langle a, b \rangle$, gdy $\varphi_1 \xrightarrow{l} \varphi_2$ lub $\varphi_1 \xrightarrow{a} \varphi_2$ zależnie od tego, czy $\langle a, b \rangle$ jest skończony czy nieskończony.

2.42. Wtedy i tylko wtedy $L^{\varphi_1}\langle a, b \rangle = L^{\varphi_2}\langle a, b \rangle$, gdy $c\varphi_2(u) \leq \varphi_1(u) \leq d\varphi_2(u)$, $c > 0$, $d > 0$, dla dużych u , gdy $\langle a, b \rangle$ jest skończony, dla $u \geq 0$, gdy $\langle a, b \rangle$ nieskończony.

2.5. Na to, aby $L^{\varphi}\langle a, b \rangle = L^{*\varphi}\langle a, b \rangle$ przy pewnym φ , potrzeba i wystarczy, by φ spełniała warunek (Δ_2) dla dużych u lub dla $u \geq 0$ w zależności

od tego, czy $\langle a, b \rangle$ skończony czy nieskończony i by $\varphi \stackrel{l}{\sim} \varphi$ lub $\varphi \stackrel{a}{\sim} \varphi$, lub, co na jedno wychodzi, by $L^{*\varphi} \langle a, b \rangle = L^\varphi \langle a, b \rangle$.

Niech $\langle a, b \rangle$ będzie skończony, $\varphi_m(u) = \varphi(u/m)$. Ponieważ $L^{*\varphi} \langle a, b \rangle = \bigcup_n L^{*\varphi_n} \langle a, b \rangle$, więc według 2.23, 2.24 wtedy i tylko wtedy $L^\varphi \langle a, b \rangle = L^{*\varphi} \langle a, b \rangle$, gdy istnieje m naturalne, dla którego

$$\varphi\left(\frac{u}{m}\right) c_m \leq \varphi(u) \leq d_m \varphi\left(\frac{u}{m}\right) \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \dots$$

dla dużych u . Biorąc $n = m$ otrzymujemy $\varphi \stackrel{l}{\sim} \varphi$; podstawiając za u wartość $u \cdot 2m$ oraz $n = 2m$ otrzymujemy

$$\varphi(2u) \leq \frac{d_{2m}}{c_m} \varphi(u).$$

Warunek (Δ_2) pociąga za sobą, według 1.521, $\varphi(\lambda u) \leq d_\lambda \varphi(u)$ dla dużych u , gdy $\lambda \geq 1$, więc, na mocy 2.2, $L^{*\varphi_m} \langle a, b \rangle \subset L^\varphi \langle a, b \rangle$.

Analogicznie dowodzi się twierdzenia w przypadku nieskończonego $\langle a, b \rangle$.

Z powyższego wynika

2.51. *Wtedy i tylko wtedy jest $L^\varphi \langle a, b \rangle = L^{*\varphi} \langle a, b \rangle$, gdy φ spełnia warunek (Δ_2) dla dużych u lub dla $u \geq 0$ w zależności od tego, czy $\langle a, b \rangle$ jest skończony czy nieskończony.*

2.6. *Jeżeli φ nie spełnia warunku (Δ_2) dla dużych u , $\langle a, b \rangle$ jest skończony, to istnieją funkcje x, y o następujących własnościach:*

(α) $I_\varphi(x) < \infty$, $I_\varphi(\lambda x) = \infty$ dla $\lambda > 1$;

(β) $I_\varphi(\lambda x) < \infty$ dla $0 < \lambda < 1$, $I_\varphi(x) = \infty$.

Analogiczne twierdzenie jest słuszne dla warunku (Δ_2) dla wszystkich u i nieskończonego $\langle a, b \rangle$.

Niech

$$\varphi_m(u) = \varphi((1+1/m)u).$$

Jeżeli (α) nie zachodzi, to $L^\varphi \langle a, b \rangle \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} L^{\varphi_n} \langle a, b \rangle$, więc na mocy 2.24, przy pewnym m ,

$$\varphi((1+1/m)u) \leq d_m \varphi(u)$$

dla dużych u , czyli φ spełnia warunek (Δ_2) dla dużych u .

Niech

$$\varphi_m(u) = \varphi((1-1/(m+1))u).$$

Если (β) не выполнено, то $\bigcap_{n=1}^{\infty} L^{\varphi_n}(a, b) \subset L^{\varphi}(a, b)$, в силу леммы 2.21

$$\varphi(u) \leq d \sup(\varphi_1(u), \varphi_2(u), \dots, \varphi_m(u)) = d\varphi((1 - 1/(m+1))u),$$

для больших u , что эквивалентно (Δ_2) для больших u .

Ссылки на работы

- [1] Z. Birnbaum, W. Orlicz, *Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen*, Studia Math. 3 (1931), стр. 1-67.
- [2] E. Hille, *Functional analysis and semi-groups*, American Mathematical Society, 1948, XI+528.
- [3] J. Karamata, *Sur un mode de croissance régulière des fonctions*, Mathematica Cluj 4 (1930), стр. 38-53.
- [4] М. А. Красносельский, Ж. Б. Рутцкий, *Выпуклые функции и пространство Орлица*, Москва 1958 (по русскому).
- [5] W. Matuszewska, *On generalized Orlicz spaces*, Bull. Acad. Pol. 8 (1960), стр. 349-353.
- [6] S. Mazur, W. Orlicz, *On some classes of linear spaces*, Studia Math. 17 (1958), стр. 97-119.
- [7] J. Musielak, W. Orlicz, *On modular spaces*, Studia Math. 18 (1959), стр. 49-65.
- [8] — *Some remarks on modular spaces*, Bull. Acad. Pol. 7 (1959), стр. 661-668.
- [9] H. Nakano, *Modulated linear spaces*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I, 6 (1951), стр. 85-131.
- [10] — *Semi-Ordered linear spaces*, Tokyo 1955 (выбор работ).
- [11] W. Orlicz, *Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B*, Bull. Acad. Pol. des Sc. et des Lettres (1932), стр. 207-220.
- [12] — *Über Räume (L^M)*, ibid. (1936), стр. 93-107.
- [13] S. Rolewicz, *Some remarks on the spaces $N(L)$ and $N(l)$* , Studia Math. 18 (1959), стр. 1-9.
- [14] A. C. Zaanen, *Linear analysis*, Amsterdam 1953.

В. МАТУШЕВСКА (Познань)

ПРОСТРАНСТВА φ -СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

ЧАСТЬ I. ОБЩИЕ СВОЙСТВА φ -ФУНКЦИЙ И КЛАССОВ φ -СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

РЕЗЮМЕ

В настоящей работе φ -функцией называем функцию непрерывную и неубывающую для $u > 0$, принимающую значение нуль лишь в точке 0, стремящуюся к ∞ при $u \rightarrow \infty$. Через $L^{\varphi}(a, b)$ обозначаем множество функций x име-

римых на $\langle a, b \rangle$, для которых

$$I_{\varphi}(x) = \int_a^b \varphi(|x(t)|) dt < \infty,$$

через $L^{*\varphi}\langle a, b \rangle$ множество x для которых, при некотором $\lambda > 0$ (зависящем от x), $\lambda x \in L^{\varphi}\langle a, b \rangle$.

Множество $L^{*\varphi}\langle a, b \rangle$ — линейное пространство. Пространства $L^{*\varphi}\langle a, b \rangle$ являются обобщением пространств функций с суммируемой α -ой степенью ($\alpha > 0$); последний случай получается, когда $\varphi(u) = u^{\alpha}$.

В § 1 этой работы исследуются различные свойства φ -функций. Фундаментальные здесь следующие понятия. Говорим, что φ неслабее ψ при больших значениях u и пишем $\varphi \overset{l}{\succ} \psi$ ($\overset{a}{\succ} \varphi$), если $\varphi(lu) \leq b\psi(ku)$ для $u \geq u_0 > 0$. Функции φ и ψ называем эквивалентными при больших u и пишем $\varphi \overset{l}{\sim} \psi$, если $\varphi \overset{l}{\succ} \psi$ и $\psi \overset{l}{\succ} \varphi$. Заменой $\overset{l}{\succ}$ на $\overset{a}{\succ}$ получается определение эквивалентности при всех u . Эти определения обще рассматриваемых в [1] и [4]. Даны здесь, например, условия для того чтобы $\varphi \overset{l}{\sim} \chi$, где $\chi(u) = \psi(u^s)$, ψ — выпуклая φ -функция, $s > 0$.

В § 2 исследуются соотношения между классами $L^{\varphi}\langle a, b \rangle$, $L^{*\varphi}\langle a, b \rangle$ при различных φ . Даны, например, необходимые и достаточные условия включений

$$\bigcap_{r=1}^{\infty} L^{\varphi_r}\langle a, b \rangle \subset L^{\varphi}\langle a, b \rangle, \quad L^{\varphi}\langle a, b \rangle \subset \bigcup_{r=1}^{\infty} L^{\varphi_r}\langle a, b \rangle.$$

Главные результаты этой работы опубликованы без доказательств в [5].

W. MATUSZEWSKA (Poznań)

SPACES OF φ -INTEGRABLE FUNCTIONS

PART I. GENERAL PROPERTIES OF φ -FUNCTIONS AND OF CLASSES OF φ -INTEGRABLE FUNCTIONS

SUMMARY

In this paper we call a φ -function any function continuous and non-decreasing for $u > 0$, vanishing at 0 only and tending to ∞ as $u \rightarrow \infty$. Denote by $L^{\varphi}\langle a, b \rangle$ the set of functions x measurable in $\langle a, b \rangle$ for which

$$I_{\varphi}(x) = \int_a^b \varphi(|x(t)|) dt < \infty,$$

and let $L^{*\varphi}\langle a, b \rangle$ be the set of x for which $\lambda x \in L^{\varphi}\langle a, b \rangle$ for a $\lambda > 0$ (depending on x). The set $L^{*\varphi}\langle a, b \rangle$ is a linear space. Spaces $L^{*\varphi}\langle a, b \rangle$ are a generalization of spaces of functions integrable with a power $\alpha > 0$; we get the last case taking $\varphi(u) = u^{\alpha}$. In the first section, various properties of φ -functions are investigated. The following notions are fundamental. φ is called non-weaker than ψ for large u (for all $u > 0$), in

symbols $\underset{l}{\psi} \underset{l}{\rhd} \underset{a}{\varphi}$ ($\underset{l}{\psi} \underset{a}{\rhd} \underset{l}{\varphi}$), if $\psi(lu) \leq b\varphi(ku)$ for $u \geq u_0 \geq 0$ (for $u \geq 0$). Functions φ and ψ are called *equivalent* for large u , in symbols $\underset{l}{\varphi} \underset{l}{\sim} \underset{l}{\psi}$, if $\underset{l}{\psi} \underset{l}{\rhd} \underset{a}{\varphi}$ and $\underset{l}{\varphi} \underset{l}{\rhd} \underset{a}{\psi}$. Replacing $\underset{l}{\rhd}$ by $\underset{l}{\rhd}$ we obtain the definition of equivalence for all u . These definitions are more general than those in [1], [4]. E.g. there are given conditions for $\underset{l}{\varphi} \underset{l}{\sim} \underset{l}{\chi}$, where $\chi(u) = \psi(u^s)$, ψ is a convex φ -function, $s > 0$. In section 2, the relations between classes $L^\varphi\langle a, b \rangle$, $L^{*\varphi}\langle a, b \rangle$ for various φ are investigated. For instance, there are given conditions necessary and sufficient for the inclusions

$$\bigcap_{v=1}^{\infty} L^{\varphi_v}\langle a, b \rangle \subset L^\psi\langle a, b \rangle, \quad L^\psi\langle a, b \rangle \subset \bigcup_{v=1}^{\infty} L^{\varphi_v}\langle a, b \rangle.$$

Main results of this paper are given in [5] without proof.