ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE VI (1961)

E. ŚLIWIŃSKI (Kraków)

O pewnym zagadnieniu dotyczącym wartości i funkcji własnych dla płyty i membrany

1. Weźmy pod uwagę zagadnienia na wartości własne dla membrany:

(I) $$\Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{wewnątrz } (K),$$
$$u = 0 \quad \text{na} \quad F_r(K),$$

gdzie $$(K) \quad \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0 \leqslant y \leqslant \pi, \end{cases}$$

oraz płyty

(II) $$\Delta(\Delta u) - \Lambda u = 0 \quad \text{wewnątrz } (K),$$
$$u = \Delta u = 0 \quad \text{na} \quad F_r(K).$$

W pracy niniejszej zbadamy widma obu zagadnień, porównując ich pewne własności, ponadto zbadamy pewne własności oscylacyjne funkcji własnych zagadnienia (II).

Jak wiadomo [1], wartości własne i funkcje własne zagadnienia (I) lub (II) tworzą ciągi podwójne:

(Ia) $$\lambda_{mn} = m^2 + n^2,$$

(Ib) $$u_{mn}(x, y) = \sin mx \sin ny,$$

(IIa) $$\Lambda_{mn} = (m^2 + n^2)^2,$$

(IIb) $$U_{mn}(x, y) = \sin mx \sin ny$$

$$(m, n, = 1, 2, 3, \ldots),$$

przy czym oba układy funkcji własnych są zupełne w (K), a wartościami własnymi zagadnienia (I) lub (II) są tylko liczby ciągu (Ia) albo (IIa).

Przez $\{\lambda\}$ oznaczamy zbiór wartości własnych (widmo) zagadnienia (I), przez $\{\Lambda\}$ zaś widmo zagadnienia (II).

W niniejszym artykule będziemy korzystać z wyników podanych w pracy [2].

2. Wykażemy teraz następujące twierdzenia.

TWIERDZENIE 1. *Istnieje nieskończony ciąg wartości własnych, wspólny dla zagadnienia* (I) *oraz dla zagadnienia* (II).

Dowód. Ciągiem takim jest ciąg

$$(1)\qquad \Lambda_{2k,3k} = [(2k)^2+(3k)^2]^2 = [k^2(2^2+3^2)]^2 = 12^2k^4+5^2k^4 = \\ = (12k^2)^2+(5k^2)^2 = \lambda_{12k^2,5k^2}, \quad k = 1,2,3,\ldots$$

Innymi ciągami tego typu są np. ciągi $\Lambda_{3k,4k} = \lambda_{20k^2,15k^2}$.

W dalszych rozważaniach wszystkie wskaźniki będą liczbami naturalnymi.

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli* $m \neq n$, *to* Λ_{mn} *należy do* $\{\lambda\}$.

Dowód. W myśl tożsamości Lagrange'a otrzymujemy:

$$(m^2+n^2)^2 = (2mn)^2+(m^2-n^2)^2 = k^2+l^2 = \lambda_{k,l},$$

gdzie $k = 2mn$, $l = m^2-n^2$.

3. Korzystać będziemy z następującego lematu [3]:

LEMAT 1. *Na to, żeby liczba naturalna n była sumą dwóch kwadratów liczb naturalnych, potrzeba i wystarcza, żeby w jej rozwinięciu na czynniki pierwsze, czynniki postaci* $4k+3$, *o ile występują, występowały w potęgach o wykładnikach parzystych i żeby albo liczba* 2 *wchodziła z wykładnikiem nieparzystym, albo też żeby liczba n miała co najmniej jeden dzielnik pierwszy postaci* $4k+1$ $(k = 1,2,3,\ldots)$.

TWIERDZENIE 3. *Istnieje ciąg nieskończony wartości własnych przekątniowych* Λ_{mm} *należący do* $\{\lambda\}$.

Dowód. $\Lambda_{mm} = (m^2+m^2)^2 = 4m^4 = 2^2m^4$. Przyjmując za m dowolną liczbę pierwszą postaci $4k+1$, otrzymamy na podstawie lematu 1, żądany ciąg.

Np. gdy $m = 5$, wówczas $2500 = 30^2+40^2$. Ogólnie, np. gdy $m = 5a$, wówczas $2500a^4 = (30a^2)^2+(40a^2)^2$, gdzie $a = 1,2,3,\ldots$

TWIERDZENIE 4. *Istnieje ciąg nieskończony wartości własnych przekątniowych* Λ_{mm} *nie należący do* $\{\lambda\}$.

Dowód. Niech np. $m = 2^n$; wówczas

$$(3)\qquad 4m^4 = 4(2^n)^4 = 4\cdot 2^{4n} = (2)^{4n+2}, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Na podstawie lematu 1 liczby ciągu (3) nie są rozkładalne na sumę dwóch kwadratów.

TWIERDZENIE 5. λ_{mm} *nie należy do* $\{\Lambda\}$, *tzn. żadna wartość przekątniowa zagadnienia* (I) *nie jest wartością własną zagadnienia* (II).

Dowód. Przypuśćmy, że istnieją liczby naturalne m, a, b, dla których

$$2m^2 = (a^2+b^2)^2.$$

Wykażemy, że założenie to prowadzi do sprzeczności. Dla dowodu rozróżnimy trzy przypadki:

1° a i b parzyste. Wówczas

$$2m^2 = (a^2+b^2)^2 = \big((2p)^2+(2q)^2\big)^2 = (4p^2+4q^2)^2,$$

stąd

$$m^2 = 8(p^2+q^2)^2, \quad \text{czyli} \quad m = 2\sqrt{2}(p^2+q^2),$$

stąd zaś, ponieważ $2(p^2+q^2)$ jest liczbą naturalną, wynika sprzeczność.

2° a nieparzysta, b parzysta lub na odwrót. Wówczas

$$2m^2 = (a^2+b^2)^2, \tag{4}$$

co jest sprzeczne, gdyż prawa strona (4) jest liczbą nieparzystą.

3° a, b nieparzyste, czyli $a = 2p+1$, $b = 2q+1$. Wówczas

$$2m^2 = [(2p+1)^2+(2q+1)^2]^2 = [2N]^2 = 4N^2,$$

gdzie $N = 2p^2+2q^2+2p+2q+1$ jest liczbą naturalną. Stąd wynika równanie $m\sqrt{2} = 2N$, które jest niemożliwe.

Wniosek 1. *Jeżeli Λ_{mm} jest wartością własną jednokrotną, wówczas równa jej wartość własna z widma $\{\lambda\}$ musi być wielokrotna.*

Zagadnienie. Podać warunki konieczne i wystarczające na to by λ_{mn} należało do $\{\Lambda\}$ i na odwrót, tzn. Λ_{mn} należy do $\{\lambda\}$.

4. Omówimy teraz przypadek trójwymiarowej kostki (K)

$$(K) \quad \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0 \leqslant y \leqslant \pi, \\ 0 \leqslant z \leqslant \pi. \end{cases}$$

Będziemy korzystali z następujących lematów:

Lemat 2 Gaussa [3]. *Każda liczba naturalna postaci $8k+3$ jest sumą trzech kwadratów liczb nieparzystych.*

Lemat 3 Hurwitza [3]. *Jedynymi liczbami naturalnymi n, dla których n^2 nie jest sumą trzech kwadratów liczb naturalnych, są liczby $n = 2^h$ oraz $n = 2^h\cdot 5$, $h = 0, 1, 2, \ldots$*

Twierdzenie 6. *Jeżeli $m^2+n^2+p^2$ nie jest liczbą postaci 2^h ani $2^h\cdot 5$, gdzie $h = 0, 1, 2, \ldots$, to każda liczba $\Lambda_{mnp} = (m^2+n^2+p^2)^2$ należy do $\{\lambda\}$.*

Dowód wynika z twierdzenia Hurwitza.

Wniosek 2. *Istnieje ciąg nieskończony λ_{mnp} taki, że λ_{mnp} należy do $\{\Lambda\}$.*

Dowód wynika z twierdzenia 6.

TWIERDZENIE 7. *Istnieje ciąg nieskończony λ_{mnp} taki, że λ_{mnp} nie należy do $\{\Lambda\}$.*

Dowód. Za λ_{mnp} przyjmujemy ciąg liczb naturalnych postaci $8k+3$, które nie są kwadratami liczb naturalnych. Na podstawie lematu Gaussa rozkładają się one na sumę trzech kwadratów liczb naturalnych, a nie są postaci $(a^2+b^2+c^2)^2$, gdyż nie są kwadratem żadnej liczby naturalnej.

TWIERDZENIE 8. *Istnieje ciąg nieskończony Λ_{mnp} taki, że Λ_{mnp} nie należy do $\{\lambda\}$.*

Dowód. Niech $\Lambda_{mnp} = (m^2+n^2+p^2)^2$. Na podstawie twierdzenia Hurwitza przyjmujemy za $m^2+n^2+p^2$ liczby, które nie są postaci 2^h lub postaci $2^h \cdot 5$, przy czym istnieje nieskończenie wiele liczb postaci $m^2+n^2+p^2 \neq 2^h$ lub $2^h \cdot 5$. Np. liczby postaci $8k+3$, na podstawie twierdzenia Gaussa.

5. Przypadek czterowymiarowy. Mamy

LEMAT 4 (por. [3]). *Każda liczba kwadratowa większa od* 1, *z wyjątkiem* 9, *jest sumą czterech kwadratów liczb naturalnych.*

Z lematu 4 wynika

TWIERDZENIE 9. $\{\Lambda\} \subset \{\lambda\}$.

Ale nie na odwrót, jak wskazuje twierdzenie 10, tzn. $\{\lambda\}$ *nie zawiera się w* $\{\Lambda\}$.

TWIERDZENIE 10. *Istnieje ciąg nieskończony λ_{mnpq} nie należący do $\{\Lambda\}$.*

Dowód. Za λ_{mnpq} wystarczy przyjąć te liczby naturalne nie kwadratowe, które są sumami czterech kwadratów liczb naturalnych.

6. Przypadek pięciowymiarowy. Mamy

LEMAT 5 (por. [3]). *Każda liczba naturalna, z wyjątkiem liczb* 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 15, 18 i 33, *jest sumą pięciu kwadratów liczb naturalnych.*

TWIERDZENIE 11. $\{\Lambda\} \subset \{\lambda\}$.

Dowód wynika z lematu 5.

Natomiast nie na odwrót, jak na to wskazuje twierdzenie 12.

TWIERDZENIE 12. *Istnieje ciąg nieskończony λ_{mnpqr} nie zawierający się w $\{\Lambda\}$.*

Dowód. Wystarczy przyjąć za $\lambda_{mnpqr} = m^2+n^2+p^2+q^2+r^2$ ciąg tych liczb naturalnych, które nie są kwadratami liczb naturalnych, i zastosować lemat 5.

7. Przypadek n-wymiarowy, $n \geqslant 6$. Zachodzi

LEMAT 6 (por. [3]). *Jeżeli m jest liczbą naturalną $\geqslant 6$, to jedynymi liczbami naturalnymi, które nie są sumami m-kwadratów liczb naturalnych, są liczby* $1, 2, 3, \ldots, m-1, m+1, m+2, m+4, m+5, m+7, m+10, m+13$.

TWIERDZENIE 13. $\{\Lambda\} \subset \{\lambda\}$.

Dowód. Ponieważ $\Lambda_{\underbrace{1\ldots1}_{m}} = (1^2+\ldots+1^2)^2 = m^2$ oraz $m^2 > m+13$ dla $m \geqslant 6$, czyli $\Lambda_{\underbrace{1\ldots1}_{m}} > m+13$ dla $m \geqslant 6$.

Wobec tego, że $\Lambda_{n_1\ldots n_m} > m+13$, przeto na podstawie lematu 6 każda z liczb $\Lambda_{n_1\ldots n_m}$ rozkłada się na sumę m kwadratów liczb naturalnych. Natomiast nie zachodzi zawieranie odwrotne, jak na to wskazuje twierdzenie 14.

TWIERDZENIE 14. *Istnieje ciąg nieskończony $\lambda_{m_1\ldots m_n}$ nie zawierający się w $\{\Lambda\}$.*

Dowód. Wystarczy przyjąć za $\lambda_{m_1\ldots m_n} = m_1^2+\ldots+m_n^2$ ciąg tych liczb naturalnych, które nie są kwadratami liczb naturalnych, i zastosować lemat 6.

8. Własności funkcji własnych zagadnienia (II). Twierdzenia o ilości maksymalnej obszarów węzłowych dla funkcji własnych zagadnienia (II) są analogiczne jak w zagadnieniu (I). Twierdzenia 3, 6, 9, 10 oraz 11 [2] przenoszą się wraz z dowodem na przypadek zagadnienia (II).

Istotnie, weźmy przypadek dwuwymiarowy, gdyż w przypadku n-wymiarowym dowód jest analogiczny. Otóż zbiory funkcji własnych obu zagadnień są identyczne i dowód np. odpowiednika twierdzenia 3 sprowadza się do wyznaczenia maksymalnego iloczynu $k\cdot l$ przy warunku ubocznym $(k^2+l^2)^2 = (2m^2)^2$, czyli $k^2+l^2 = 2m^2$. Dowód odpowiedników twierdzeń 6, 9 i 11 jest analogiczny.

Twierdzenia dotyczące krotności wartości własnych zagadnienia (II) są analogiczne do odpowiednich twierdzeń dla zagadnienia (I) i wobec tego twierdzenia 1, 2, 4, 6, 7 oraz 8 przenoszą się wraz z dowodem na przypadek zagadnienia (II). Np. odpowiednikiem twierdzenia 1 jest

TWIERDZENIE 1'. *Istnieje ciąg nieskończony wartości własnych co najmniej trzykrotnych dla zagadnienia* (II); *ciągi takie są postaci*:

$$[(5k)^2+(5k)^2]^2 = [k^2+(7k)^2]^2 = [(7k)^2+k^2]^2, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

z odpowiednimi funkcjami własnymi

$$U_{5k,5k}(x, y) = \sin 5kx \sin 5ky,$$
$$U_{k,7k}(x, y) = \sin kx \sin 7ky,$$
$$U_{7k,k}(x, y) = \sin 7kx \sin ky.$$

Odpowiednikiem twierdzenia 2 jest

TWIERDZENIE 2'. *Istnieje ciąg nieskończony wartości własnych pojedynczych dla zagadnienia* (II).

Dowód. Ciągiem takim jest ciąg

$$(2\cdot 2^{2n})^2 = (2^{2n}+2^{2n})^2 = [(2^n)^2+(2^n)^2]^2.$$

Analogicznie otrzymujemy odpowiedniki twierdzeń 4, 5, 7, 8 oraz 10.

Prace cytowane

[1] M. Krzyżański, *Równania różniczkowe cząstkowe*, t. II (w druku).

[2] E. Śliwiński, *O pewnym zagadnieniu dotyczącym krotności wartości własnych zagadnień brzegowych Dirichleta dla równania Helmholtza*, Prace Matematyczne 6 (1961), str. 31 - 40.

[3] W. Sierpiński. *Teoria liczb*, t. II, Warszawa 1960 r.

Е. Сливински (Краков)

О НЕКОТОРОЙ ЗАДАЧЕ ОТНОСЯЩЕЙСЯ К ТЕОРИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ УРАВНЕНИЯ ПЛАСТИНКИ И МЕМБРАНЫ

РЕЗЮМЕ

Автор исследует спектры уравнений

(1) $$\Delta u + \lambda u = 0$$

при краевом условии

(2) $$u = 0 \quad \text{на} \quad F(K),$$

(3) $$\Delta(\Delta u) - \Lambda u = 0,$$

при краевом условии

(4) $$u = \Delta u = 0 \quad \text{на} \quad F(K),$$

где K-квадрат $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

Пусть $\{\lambda\}$ спектр уравнения (1) при условии (2), а $\{\Lambda\}$ спектр уравнения (3) при условии (4), λ_{mm} и Λ_{mn} собственные значения соответственно из $\{\lambda\}$ и $\{\Lambda\}$ имеющее соответственно форму $\lambda_{mn} = (m^2+n^2)$, и $\Lambda_{mn} = (m^2+n^2)^2$.

Применяя некоторые теоремы неаналитической теории чисел автор доказывает следующее теоремы.

Теорема 1. *Существует бесконечная последовательность общих собственных значений спектров $\{\lambda\}$ и $\{\Lambda\}$.*

Теорема 2. *Если m и n натуральные числа и $m \neq n$, то Λ_{mn} принадлежит $\{\lambda\}$.*

Теоремы 3 и 4. *Существует бесконечная последовательность собственных значений типа Λ_{mm} принадлежащих $\{\lambda\}$ и бесконечная последовательность таких же собственных значений не принадлежащих $\{\lambda\}$.*

Теорема 5. *Собственные значения λ_{mm} не принадлежат $\{\Lambda\}$.*

Во второй части работы автор доказывает теоремы касающиеся аналогических уравнений с 3-мя и большим числом независимых переменных.

E. ŚLIWIŃSKI (Kraków)

ON A PROBLEM CONCERNING THE MULTIPLICITY OF THE EIGENVALUES AND THE EIGENFUNCTIONS FOR THE PLATE AND THE MEMBRANE

SUMMARY

The author investigates the spectra of the equations:

$$\Delta u + \lambda u = 0 \tag{1}$$

with the boundary condition

$$u = 0 \quad \text{on} \quad F(K) \tag{2}$$

and

$$\Delta(\Delta u) - \Lambda u = 0 \tag{3}$$

with the boundary condition

$$u = \Delta u = 0 \quad \text{on} \quad F(K), \tag{4}$$

where K is the square $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

Let $\{\lambda\}$ denote the spectrum of equation (1) with condition (2) and $\{\Lambda\}$ the spectrum of equation (3) with condition (4). Let further λ_{mn} and Λ_{mn} be the eigenvalues for $\{\lambda\}$ and $\{\Lambda\}$ respectively, having the forms

$$\lambda_{mn} = (m^2+n^2) \quad \text{and} \quad \Lambda_{mn} = (m^2+n^2)^2,$$

respectively. Making use of some theorems of the theory of numbers the author proves the following theorems:

THEOREM 1. *There exists an infinite sequence of eigenvalues common for the spectra $\{\lambda\}$ and $\{\Lambda\}$.*

THEOREM 2. *If m and n are positive integers and $m \neq n$, then Λ_{mn} belongs to $\{\lambda\}$.*

THEOREMS 3 and 4. *There exist an infinite sequence of eigenvalues of the form Λ_{mm} belonging to $\{\lambda\}$ and an infinite sequence of eigenvalues Λ_{mm} which do not belong to $\{\lambda\}$.*

THEOREM 5. *The eigenvalues λ_{mm} do not belong to $\{\Lambda\}$.*

In the second part of the paper the author proves some analogical theorems regarding equations in 3 and more independent variables.