ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA I: PRACE MATEMATYCZNE V (1961)

CI GUAN-FU (Poznań)

O bezwzględnej zbieżności szeregów wielokrotnych Walsha i Fouriera

Praca niniejsza składa się z dwóch części, w których zajmiemy się kolejno pewnymi zagadnieniami, dotyczącymi bezwzględnej zbieżności wielokrotnych szeregów Walsha-Fouriera oraz trygonometrycznych szeregów Fouriera. Wpierw udowodnimy dla wielokrotnych szeregów Walsha-Fouriera twierdzenia o bezwzględnej zbieżności typu Bernsteina-Zygmunda, następnie sformułujemy dla szeregów tych twierdzenie M. Riesza. Wreszcie podamy pewne uogólnienia twierdzenia Lévy'ego-Wienera i pokrewnych twierdzeń dla wielokrotnych szeregów trygonometrycznych Fouriera, dotyczące szeregów postaci

$$\sum_{m_1,\ldots,m_n=-\infty}^{\infty} |C_{m_1\ldots m_n}|^{\alpha} \quad \text{przy} \quad 0<\alpha\leqslant 1.$$

1.0. W dalszym ciągu będziemy się posługiwali definicjami z pracy [3]. Przez $\{R_n(x), n=0,1,2,\ldots\}$ oznaczać będziemy układ Rademachera, a przez $\{W_n(x), n=0,1,2,\ldots\}$ układ Walsha. Operacja „$\dot{+}$" będzie określona w sposób następujący: Niech

$$x, y \in \langle 0,1\rangle, \quad x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n}, \quad y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n}{2^n},$$

gdzie x_n i y_n przyjmują wartość 0 lub 1; w przypadku gdy x lub y jest liczbą diadyczną <1, bierzemy rozwinięcie skończone. Piszemy wówczas

$$x\dot{+}y=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\zeta_n}{2^n}, \quad \text{gdzie} \quad \zeta_n = x_n+y_n (\mathrm{mod}\, 2); \quad \zeta_n=0,1.$$

W przestrzeni euklidesowej n-wymiarowej $E_n=\{(x_1,\ldots,x_n), -\infty< x_1,\ldots,x_n<\infty\}$ określa się układ Walsha wzorem

$$W_{m_1\ldots m_n}(x_1,\ldots,x_n)=W_{m_1}(x_1)\ldots W_{m_n}(x_n),$$

gdzie $W_{m_1}(x_1),\ldots,W_{m_n}(x_n)$ są funkcjami Walsha jednej zmiennej,

$m_1, \ldots, m_n = 0, 1, 2, \ldots$ Układ funkcji $\{W_{m_1 \ldots m_n}(x_1, \ldots, x_n)\}$ jest oczywiście układem ortonormalnym zupełnym w $L(\langle 0, 1\rangle^n)$, a nadto

$$W_{m_1 \ldots m_n}(x_1 \dot{+} y_1, \ldots, x_n \dot{+} y_n) = W_{m_1 \ldots m_n}(x_1, \ldots, x_n) W_{m_1 \ldots m_n}(y_1, \ldots, y_n)$$

dla ustalonego $(y_1, \ldots, y_n)$ i dla wszystkich $(x_1, \ldots, x_n)$ z wyjątkiem zbioru przeliczalnego, zależnego od $(y_1, \ldots, y_n)$. Stąd dla $f(x_1, \ldots, x_n) \in L(\langle 0, 1\rangle^n)$ mamy

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1 \dot{+} y_1, \ldots, x_n \dot{+} y_n) dx_1 \ldots dx_n = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n;$$

dowód powyższej równości przebiega podobnie jak w [3].

1.1. Liczby

$$a_{m_1 \ldots m_n}(f) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_n) W_{m_1 \ldots m_n}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n,$$

nazywamy *współczynnikami Walsha-Fouriera funkcji* $f(x_1, \ldots, x_n)$, a szereg

$$\sum_{m_1, \ldots, m_n = 0}^{\infty} a_{m_1 \ldots m_n}(f) W_{m_1 \ldots m_n}(x_1, \ldots, x_n)$$

szeregiem Walsha-Fouriera tej funkcji. Jasne jest, że bezwzględna zbieżność tego szeregu równoważna jest zbieżności szeregu

$$\sum_{m_1, \ldots, m_n = 0}^{\infty} |a_{m_1 \ldots m_n}(f)|.$$

1.2. W pracy [6] udowodniono twierdzenie typu Bernsteina-Zygmunda dla układu trygonometrycznego w E_n. Wykażemy obecnie, że twierdzenia te są również prawdziwe dla wielokrotnych szeregów Walsha-Fouriera.

1.21. Zdefiniujemy $H = (k_1, \ldots, k_s)$, $\dot{\Delta}^H(f; x_1, \ldots, x_n; h_1, \ldots, h_n)$, $\dot{\omega}^H(x_{l_1}, \ldots, x_{l_{n-s}}; h_1, \ldots, h_n)$, $\dot{\omega}_p^H(h_1, \ldots, h_n)$, $\dot{V}_r^H(f)$ i $A_{\nu_1 \ldots \nu_n}$ tak jak w [6] z tą różnicą, że zamiast zwykłego dodawania „$+$” używamy operacji „$\dot{+}$”, a przedziały $\langle 0, 2\rangle^n$ i $\langle a_1, b_1\rangle \ldots \langle a_n, b_n\rangle$ zastąpimy przedziałem $\langle 0, 1\rangle^n$.

1.22. Przy powyższych oznaczeniach zachodzą następujące twierdzenia.

TWIERDZENIE A. *Załóżmy, że określona w E_n funkcja $f(x_1, \ldots, x_n)$ spełnia następujące warunki:*

1. *$f(x_1, \ldots, x_n)$ jest okresowa z okresem 1 w każdej zmiennej;*
2. *$f \in L^p(\langle 0, 1\rangle^n)$ dla pewnego $1 < p \leqslant 2$;*

3. *dla pewnej klasy $\mathcal{H}$ podzbiorów zbioru $N = (1, 2, \ldots, n)$ przy każdym niepustym $H \in \mathcal{H}$ istnieje taka liczba r_H, że $1 \leqslant r_H \leqslant p$ i $\dot{V}^H_{r_H}(f) < \infty$; dla $H \notin \mathcal{H}$ piszemy $r_H = p$. Prócz tego załóżmy, że dla pewnych $\beta_1, \ldots, \beta_n \geqslant 0$ oraz $0 < \gamma < 2$ zachodzą warunki*

$$(\mathrm{a}_1) \quad \sum_{\nu_{k_1}=1}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_{k_s}=1}^{\infty} 2^{\sum_{i=1}^{s}(\beta_{k_i}+1-\gamma)\nu_{k_i}} \times$$
$$\times \Big\{ \int_0^1 \cdots \int_0^1 [\dot{\omega}^H(x_{l_1}, \ldots, x_{l_{n-s}}); 2^{-\nu_1}, \ldots, 2^{-\nu_n}]^{p-r_H} dx_{l_1} \ldots dx_{l_{n-s}} \Big\}^{\gamma/p}$$
$$\text{dla} \quad H \in \mathcal{H},$$

$$(\mathrm{a}_2) \quad \sum_{\nu_{k_1}=1}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_{k_s}=1}^{\infty} 2^{\sum_{i=1}^{s}[\beta_{k_i}+1-(1-1/p)\gamma]\nu_{k_i}} [\dot{\omega}^H_p(2^{-\nu_1}, \ldots, 2^{-\nu_n})]^{\gamma} < \infty$$
$$\text{dla} \quad H \notin \mathcal{H},\ H \neq 0,$$

gdzie $H = (k_1, \ldots, k_s)$, $\bar{H} = N - H = (l_1, \ldots, l_{n-s})$.

Wówczas $\displaystyle\sum_{m_1, \ldots, m_n = 0}^{\infty} (m_1+1)^{\beta_1} \ldots (m_n+1)^{\beta_n} |a_{m_1 \ldots m_n}(f)|^{\gamma} < \infty.$

TWIERDZENIE B. *Jeżeli w twierdzeniu* A *warunki* (a_1) *i* (a_2) *zastąpimy następującymi:*

$$(\mathrm{b}_1) \quad \dot{\omega}^H(x_{l_1}, \ldots, x_{l_{n-s}}; h_1, \ldots, h_n) \leqslant K_H(x_{l_1}, \ldots, x_{l_{n-s}}) h_{k_1}^{a_1^H} \ldots h_{k_s}^{a_s^H}$$

dla $H \in \mathcal{H}$, *gdzie* $(l_1, \ldots, l_{n-s}) = \bar{H}$,

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 [K_H(x_{l_1}, \ldots, x_{l_{n-s}})]^{p-r_H} dx_{l_1} \ldots dx_{l_{n-s}} < \infty$$

oraz $a_i^H > \dfrac{p(\beta_{k_i}+1-\gamma)}{\gamma(p-r_H)}$ *dla* $r_H \neq p$, $\beta_{k_i} < \gamma - 1$ *dla* $r_H = p$;

$$(\mathrm{b}_2) \quad \dot{\omega}^H_p(h_1, \ldots, h_n) \leqslant K_H h_{k_1}^{a_1^H} \ldots h_{k_s}^{a_s^H}$$

dla $0 \neq H \in \mathcal{H}$, *gdzie* K_H *jest stałą i* $a_i^H > \dfrac{p(\beta_{k_i}+1-\gamma)+\gamma}{\gamma p}$, *to*

$$\sum_{m_1, \ldots, m_n = 0}^{\infty} (m_1+1)^{\beta_1} \ldots (m_n+1)^{\beta_n} |a_{m_1 \ldots m_n}(f)|^{\gamma} < \infty.$$

Zauważmy, że jeżeli klasa $\mathcal{H}$ jest pusta, to twierdzenia powyższe dają uogólnienie twierdzenia Bernsteina, a gdy jest ona klasą wszystkich niepustych podzbiorów zbioru $N = (1, 2, \ldots, n)$, dają one uogólnienie twierdzenia Zygmunda.

1.23. Twierdzenie B wynika z twierdzenia A, to ostatnie wynika natomiast z następującego lematu, tak jak w [6].

LEMAT. *Niech* $1 \leqslant r \leqslant p \leqslant 2$ $(p \neq 1)$, $1/p+1/q = 1$. *Oznaczmy dla danego* $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ *przez* $H = (k_1, \ldots, k_s)$ *zbiór* $H = \{i\colon \nu_i \neq 0\}$ *oraz* $\bar{H} = N-H = \{l_1, \ldots, l_{n-s}\}$. *Niech nadto* $f \in L^p(\langle 0, 1\rangle^n)$.
Wówczas

$$\sum_{(m_1,\ldots,m_n)\in A_{\nu_1\ldots\nu_n}} |a_{m_1\ldots m_n}(f)|^q \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-sq}\Big\{\int_0^1\ldots\int_0^1 [\dot{\omega}^H(x_{l_1}, \ldots, x_{l_{n-s}}; 2^{-\nu_1}, \ldots, 2^{-\nu_n}]^{p-\gamma} \times$$

$$\times\Big[\int_0^1\ldots\int_0^1 |\dot{\Delta}^H(f; x_1, \ldots, x_n; 2^{-\nu_1-1}, \ldots, 2^{-\nu_n-1})\,dx_{k_1}\ldots dx_{k_s}\Big]dx_{l_1}\ldots dx_{l_{n-s}}\Big\}^{1/p-1}.$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że zachodzi następująca równość

$$(*)\qquad a_{m_1\ldots m_n}(\dot{\Delta}^H) = a_{m_1\ldots m_n}(f)\prod_{i=1}^{s}[W_{k_i}(h_{k_i})-1].$$

Równość powyższa wynika przy $s = 1$ z 1.0, a w przypadku ogólnym wystarczy zastosować indukcję zupełną.

Niech teraz $(m_1, \ldots, m_n) \in A_{\nu_1\ldots\nu_n}$ przy $\nu_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Wówczas mamy $2^{\nu_i-1} \leqslant m_i < 2^{\nu_i}$, więc

$$(**)\qquad |W_{m_{k_i}}(2^{-\nu_{k_i}})-1| = 2.$$

Aby wykazać równość $(**)$ zauważmy, że $2^{\nu_{k_i}-1} \leqslant m_{k_i} < 2^{\nu_{k_i}}$, więc $m_{k_i} = 2^{\nu_{k_i}-1}+2^{\tau_2}+2^{\tau_3}+\ldots+2^{\tau_t}$, gdzie $\nu_{k_i}-1 > \tau_2 > \tau_3 > \ldots > \tau_t \geqslant 0$ są liczbami całkowitymi. Stąd

$$W_{m_{k_i}}(2^{-\nu_{k_i}}) = R_{\nu_{k_i}-1}(2^{-\nu_{k_i}})R_{\tau_2}(2^{-\nu_{k_i}})\ldots R_{\tau_t}(2^{-\nu_{k_i}}).$$

Jednak $R_{\nu_{k_i}-1}(x) = -1$ dla $2^{-\nu_{k_i}} \leqslant x < 2^{-\nu_{k_i}+1}$ i $R_{\tau_i}(x) = 1$ dla $0 \leqslant x < 2^{-(\tau_j+1)}$ $(j = 2, 3, \ldots, t)$, a stąd $R_{\tau_j}(2^{-\nu_{k_i}}) = 1$ $(j = 2, 3, \ldots, t)$. Zatem $W_{m_{k_i}}(2^{-\nu_{k_i}}) = -1$, skąd wynika równość $(**)$.

Uwzględniając równości $(*)$ i $(**)$ i nierówność F. Riesza i F. Hausdorffa, otrzymujemy przy $h_i = 2^{-\nu_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$,

$$\sum_{(m_1,\ldots,m_n)\in A_{\nu_1\ldots\nu_n}} |a_{m_1\ldots m_n}(f)|^q = \sum_{(m_1,\ldots,m_n)\in A_{\nu_1\ldots\nu_n}} 2^{-sq}|a_{m_1\ldots m_n}(\dot{\Delta}^H)|^q \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-sq}\Big[\int_0^1\ldots\int_0^1 |\dot{\Delta}^H(f; x_1, \ldots, x_n; 2^{-\nu_1}, \ldots, 2^{-\nu_n})|^p\,dx_1\ldots dx_n\Big]^{q/p} \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-sq}\Big\{\underbrace{\int_0^1\ldots\int_0^1}_{n-s \text{ razy}} [\dot{\omega}^H(x_{l_1}, \ldots, x_{l_{n-s}}; 2^{-\nu_1}, \ldots, 2^{-\nu_n})]^{p-r} \times$$

$$\times\Big[\underbrace{\int_0^1\ldots\int_0^1}_{s \text{ razy}} |\dot{\Delta}^H(f; x_1, \ldots, x_n; 2^{-\nu_1}, \ldots, 2^{-\nu_n})|^r\,dx_{k_1}\ldots dx_{k_s}\Big]dx_{l_1}\ldots dx_{l_{n-s}}\Big\}^{1/(p-1)}.$$

1.3. Sformułujemy teraz dla szeregów wielokrotnych Walsha-Fouriera twierdzenie M. Riesza, znane dla szeregów trygonometrycznych. *

Niech funkcja $f \in L^2(\langle 0,1\rangle^n)$ będzie funkcją okresową o okresie 1 w każdej zmiennej. Szereg Walsha-Fouriera tej funkcji jest bezwzględnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 g(x_1 \dot{+} t_1, \ldots, x_n \dot{+} t_n) h(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \ldots dt_n$$

prawie wszędzie, gdzie funkcje $g, h \in L^2(\langle 0,1\rangle^n)$ są okresowe o okresie 1 w każdej zmiennej.

Dowód powyższego twierdzenia przebiega podobnie jak w przypadku klasycznym (patrz [5]).

1.4. Zamiast układu Walsha o wartościach rzeczywistych rozważać też można uogólniony układ Walsha o p-wartościach zespolonych przy $p \geqslant 2$ (patrz [1]). Analogiczne twierdzenia do 1.22 i 1.3 pozostają wówczas prawdziwe. Co więcej, twierdzenia analogiczne do powyższych można również udowodnić przy odpowiednich założeniach dla *układów ortonormalnych multyplikatywnych rzędu p*. Wystarczy w tym celu odwzorować przedział $\langle 0,1\rangle^n$ na siebie z zachowaniem miary tak, by dany układ multyplikatywny przeszedł na uogólniony układ Walsha o p wartościach (patrz np. [4], str. 52). Jako przykład, sformułujemy założenia dotyczące układu $\{\lambda_k(x)\}$ multyplikatywnego rzędu 2 w przypadku jednej zmiennej x:

Oznaczmy przez $P_k = \{x \colon \lambda_k(x) = 1\}$, $N_k = \{x \colon \lambda_k(x) = -1\}$ oraz $E_k = P_k$ lub N_k. Jeżeli dla prawie wszystkich (dokładniej: z wyjątkiem przeliczalnej ilości) wyborów E_k jako P_k lub N_k, zbiór $\bigcap_k E_k$ składa się z jedynego punktu, wtedy istnieje odwzorowanie T przedziału $\langle 0,1\rangle$ na siebie (z dokładnością do miary zero), takie że

1. T jest prawie wszędzie jedno-jednoznaczne,
2. $\nu_k(x) = W_k(Tx)$,
3. T jest mierzalnym odwzorowaniem,
4. dla każdego zbioru mierzalnego E, $\mu(T^{-1}E) = \mu(E)$, gdzie $\{\nu_k(x)\}$ jest pewnym nowym uporządkowaniem układu $\{\lambda_k(x)\}$, a $\mu(\cdot)$ jest miarą Lebesgue'a (patrz [2]). Stąd

$$\int_0^1 f(x)\nu_k(x)dx = \int_0^1 f(x)W_k(Tx)dx = \int_0^1 f(T^{-1}x)W_k(x)dx,$$

więc jeżeli funkcję $f(x)$ zastąpimy funkcją $g(x) = f(T^{-1}x)$, to zagadnienie dotyczące bezwzględnej zbieżności według układu $\{\nu_k(x)\}$, czyli $\{\lambda_k(x)\}$, redukuje się do rozpatrywania zbieżności bezwzględnej według układu Walsha.

2.0. Udowodnimy obecnie pewne uogólnienie twierdzenia Lévy'ego-Wienera (patrz np. [7], str. 245 i [8]). Będziemy używać następujących oznaczeń:

$x = (x_1, \ldots, x_n)$ — zmienny punkt w n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej E_n,

a — liczba, spełniająca nierówności $0 < a \leqslant 1$,

$f = f(x_1, \ldots, x_n)$ — funkcja całkowalna w $\langle 0, 2\pi\rangle^n$ i okresowa w każdej zmiennej o okresie 2π,

$$C_{m_1 \ldots m_n}(f) = (2\pi)^{-n} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} f(x_1, \ldots, x_n) e^{-i(m_1x_1 + \ldots + m_nx_n)} dx_1 \ldots dx_n,$$

$$f = f(x_1, \ldots, x_n) \sim \sum_{m_1, \ldots, m_n = -\infty}^{\infty} C_{m_1 \ldots m_n}(f) e^{-i(m_1x_1 + \ldots + m_nx_n)},$$

$$\|f\|^{(a)} = \sum_{m_1, \ldots, m_n = -\infty}^{\infty} |C_{m_1 \ldots m_n}(f)|^a.$$

2.1. Podamy teraz dwa lematy, potrzebne w dalszym ciągu.

LEMAT 1. *Zachodzą następujące związki*:

$$\|kf\|^{(a)} = |k|^a \|f\|^{(a)} \quad (k \text{ — } \textit{liczba zespolona}),$$

$$\Big\|\sum_i f_i\Big\|^{(a)} \leqslant \sum_i \|f_i\|^{(a)}, \qquad \|f_1 f_2\|^{(a)} \leqslant \|f_1\|^{(a)} \|f_2\|^{(a)}.$$

LEMAT 2. *Załóżmy, że pochodne*

$$\frac{\partial^{(p_1 + \ldots + p_n)} f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_n^{p_n}} \quad (0 \leqslant p_1, \ldots, p_n \leqslant p;\ pa > 1),$$

istnieją i są ciągłe w $\langle 0, 2\pi\rangle^n$. *Wówczas*

$$\|f\|^{(a)} \leqslant K \sum_{p_1 = 0, p} \ldots \sum_{p_n = 0, p} \left[\max_{x \in \langle 0, 2\pi\rangle^n} \left| \frac{\partial^{(p_1 + \ldots + p_n)} f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_n^{p_n}} \right| \right]^a = A_f,$$

gdzie K jest stałą niezależną od f.

Dowód.

$$C_{m_1 \ldots m_n}(f) = \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot \frac{1}{(im_1)^{p_1} \ldots (im_n)^{p_n}} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \frac{\partial^{(p_1 + \ldots + p_n)} f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_n^{p_n}} \times$$
$$\times e^{-i(m_1x_1 + \ldots + m_nx_n)} dx_1 \ldots dx_n,$$

gdzie $p_i = p$ przy $m_i \neq 0$, $p_i = 0$ przy $m_i = 0$; w tym ostatnim przypadku oznaczymy $(im_i)^{p_i} = |m_i|^{p_i} = |m_i|^{p_i a} = 0^0 = 1$. Stąd

$$C_{m_1 \ldots m_n}(f) \leqslant \frac{1}{|m_1|^{p_1} \ldots |m_n|^{p_n}} \max_{x \in \langle 0, 2\pi\rangle^n} \left| \frac{\partial^{(p_1 + \ldots + p_n)} f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_n^{p_n}} \right|,$$

więc

$$\|f\|^{(a)} = \sum_{m_1,\ldots,m_n=-\infty}^{\infty} |C_{m_1\ldots m_n}(f)|^a \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{m_1,\ldots,m_n=0}^{\infty} \frac{1}{|m_1|^{p_1 a}\ldots|m_n|^{p_n a}} \left[\max_{x\in\langle 0,2\pi\rangle^n} \left|\frac{\partial^{(p_1+\ldots+p_n)} f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1^{p_1}\ldots\partial x_n^{p_n}}\right|\right]^a \leqslant$$

$$\leqslant K \sum_{p_1=0,p} \ldots \sum_{p_n=0,p} \left[\max_{x\in\langle 0,2\pi\rangle^n} \left|\frac{\partial^{(p_1+\ldots+p_n)} f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_1^{p_1}\ldots\partial x_n^{p_n}}\right|\right]^a.$$

2.2. TWIERDZENIE 1. *Jeżeli*

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{m_1,\ldots,m_n=-\infty}^{\infty} C_{m_1\ldots m_n}(f)\, e^{-i(m_1x_1+\ldots+m_nx_n)}, \quad \|f\|^{(a)} < \infty$$

oraz $C = \{\zeta\colon \zeta = f(x),\, x\in\langle 0, 2\pi\rangle^n\}$, *a* $\Phi(\zeta)$ *jest funkcją zmiennej zespolonej analityczną na* C, *to*

$$\|\Phi[f]\|^{(a)} < \infty.$$

Dowód. Ponieważ C jest zbiorem zwartym, więc istnieje taka liczba $0<\varrho<1$, że $\Phi(\zeta)$ jest analityczną w każdym kole $K\big(f(x); 2\varrho\big) = \{\zeta\colon |\zeta - f(x_1,\ldots,x_n)| < 2\varrho\}$. Niech $\varrho = S(x) = S(x_1,\ldots,x_n)$ będzie sumą częściową szeregu Fouriera funkcji $f(x_1,\ldots,x_n)$, taką że

$$[\max_{x\in\langle 0,2\pi\rangle^n} |f(x)-S(x)|]^a \leqslant \|f-S\|^{(a)} < \tfrac{1}{2}\varrho.$$

Ponieważ

$$|S(x)+\varrho e^{i\theta} - f(x)| \leqslant |S(x)-f(x)| + \varrho \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x\in\langle 0,2\pi\rangle^n} |S(x)-f(x)| + \varrho \leqslant \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{1/a} + \varrho \leqslant 2\varrho$$

dla każdego $x\in\langle 0,2\pi\rangle^n$, więc $\Phi[S(x)+\varrho e^{i\theta}]$ jest analityczna ze względu na każdą zmienną x_i oraz wszystkie pochodne cząstkowe tej funkcji są funkcjami ciągłymi $n+1$ zmiennych $x_1,\ldots,x_n$ i θ. Stąd na mocy lematu 2 $\|\Phi[S(x)+\varrho e^{i\theta}]\|^{(a)} \leqslant A_\Phi$, gdzie A_Φ jest stałą niezależną od θ.

Niech teraz

$$g(x;\theta) = g(x_1,\ldots,x_n;\theta) = \frac{\Phi[S(x)+\varrho e^{i\theta}]}{S(x)+\varrho e^{i\theta}-f(x)}\, \varrho e^{i\theta},$$

to

$$g(x;\theta) = \Phi[S(x)+\varrho e^{i\theta}] \sum_{k=0}^{\infty} (f-S)^k \varrho^{-k} e^{-ik\theta},$$

więc wraz z nierównością

$$\max_{\substack{x\in\langle 0,2\pi\rangle^n\\ \theta\in\langle 0,2\pi\rangle}} |\Phi[S(x)+\varrho e^{i\theta}]| \leqslant \{\|\Phi[S(x)+\varrho e^{i\theta}]\|^{(a)}\}^{1/a} \leqslant (A_\Phi)^{1/a},$$

otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\Phi[S(x)+\varrho e^{i\theta}](f-S)^k \varrho^{-k} e^{-ik\theta}| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} (A_\Phi)^{1/a}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^{k/a} \varrho^{-k} < \infty.$$

Znaczy to, że szereg jest jednostajnie zbieżny ze względu na x i θ, a więc ze wzoru Cauchy'ego wynika, że

$$\Phi[f] = \Phi[f(x)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\Phi[S(x)+\varrho e^{i\theta}]}{S(x)+\varrho e^{i\theta}-f(x)}\, \varrho e^{i\theta} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x;\theta)\,d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \varrho^{-k}(f-S)^k \times$$

$$\times \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi[S(x)+\varrho e^{i\theta}]e^{-ik\theta}\,d\theta\right\}.$$

Jednak

$$\|\psi(x;k)\|^{(a)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi[S(x)+\varrho e^{i\theta}]e^{-ik\theta}\,d\theta$$

spełnia założenia lematu 2, zatem

$$\|\psi(\cdot;k)\|^{(a)} \leqslant K \sum_{p_1=0,p}\cdots\sum_{p_n=0,p}\left\{\max_{x\in\langle 0,2\pi\rangle^n}\left|\frac{\partial^{(p_1+\ldots+p_n)}\Phi[S(x)+\varrho e^{i\theta}]}{\partial x_1^{p_1}\ldots\partial x_n^{p_n}}\right|\right\}^a \leqslant A_\Phi$$
$$(k = 0, 1, \ldots);$$

skąd, uwzględniając lemat 1, ostatecznie otrzymujemy

$$\|\Phi[f]\|^{(a)} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \|\varrho^{-k}\|^{(a)} \|(f-S)\|^{(a)} \|\psi(\cdot;k)\|^{(a)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \varrho^{-ka}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^k A_\Phi \leqslant 2A_\Phi < \infty.$$

TWIERDZENIE 2. *Jeżeli*

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{m_1,\ldots,m_n=-\infty}^{\infty} C_{m_1\ldots m_n}(f)\, e^{-i(m_1x_1+\cdots+m_nx_n)},$$

$\|f\|^{(a)} < \infty$, *ciąg* $\{\Phi_k(\zeta)\}$ *jest jednostajnie zbieżny do* 0 *w pewnym otoczeniu krzywej* C, *wartości funkcji* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *i wszystkie* $\Phi_k(\zeta)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *są analityczne w tym samym otoczeniu krzywej* C, *to*

$$\lim_{k\to\infty} \|\Phi_k[f]\|^{(a)} = 0.$$

Dowód. Z założeń wynika, że jeżeli w twierdzeniu 1 zastąpimy funkcję $\Phi(\zeta)$ funkcją $\Phi_k(\zeta)$, to będziemy mogli wybrać takie ϱ i $S(x)$, które będą niezależne od k. Stąd, zupełnie tak samo jak w twierdzeniu 1, otrzymujemy

$$\|\Phi_k[f]\|^{(a)} \leqslant 2A_{\Phi_k} = 2K \sum_{p_1=0,p} \ldots \sum_{p_n=0,p} \left\{ \max_{\substack{x\in\langle 0,2\pi\rangle^n \\ \theta\in\langle 0,2\pi\rangle}} \left| \frac{\partial^{(p_1+\ldots+p_n)} \Phi_k[S(x)+\varrho e^{i\theta}]}{\partial x_1^{p_1}\ldots\partial x_n^{p_n}} \right| \right\}^a.$$

Ponieważ $\{\Phi_k(\zeta)\}$ jest jednostajnie zbieżny do 0, więc z twierdzenia Weierstrassa o jednostajnie zbieżnym szeregu funkcji analitycznych wynika, że $\lim\limits_{k\to\infty} \|\Phi_k[f]\|^{(a)} = 0$.

TWIERDZENIE 3. *Jeżeli*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{m_1,\ldots,m_n=-\infty}^{\infty} C_{m_1\ldots m_n}(f) e^{-i(m_1x_1+\ldots+m_nx_n)}, \qquad \|f\|^{(a)} < \infty,$$

to

$$\lim_{k\to\infty} (\|f^k\|^{(a)})^{1/k} = (\max_{x\in\langle 0,2\pi\rangle^n} |f|)^a.$$

Dowód. Niech stała $M > \max\limits_{x\in\langle 0,2\pi\rangle^n} |f|$, a $\Phi_k(\zeta) = \zeta^k/M^k$; z twierdzenia 2 wynika, że

$$\left\| \frac{f^k}{M^k} \right\|^{(a)} = \|\Phi_k[f]\|^{(a)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

więc $\|f^k\|^{(a)} \leqslant LM^{ka}$, gdzie $0 < L < \infty$ jest pewną stałą, skąd

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} (\|f^k\|^{(a)})^{1/k} \leqslant M^a,$$

a zatem

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} (\|f^k\|^{(a)})^{1/k} \leqslant (\max_{x\in\langle 0,2\pi\rangle^n} |f|)^a.$$

Ponadto mamy

$$(\max_{x\in\langle 0,2\pi\rangle^n} |f|)^a = (\max_{x\in\langle 0,2\pi\rangle^n} |f^k|)^{a/k} \leqslant (\|f^k\|^{(a)})^{1/k},$$

skąd

$$(\max_{x\in\langle 0,2\pi\rangle^n} |f|)^a \leqslant \underline{\lim_{k\to\infty}} (\|f^k\|^{(a)})^{1/k};$$

z ostatniego wzoru otrzymujemy

$$\lim_{k\to\infty}(\|f^k\|^{(a)})^{1/k} = (\max_{x\epsilon\langle 0,2\pi\rangle^n}|f|)^a.$$

W zakończeniu pragnę podziękować prof. dr W. Orliczowi za życzliwą pomoc i cenne uwagi w trakcie pisania pracy.

Prace cytowane

[1] H. E. Chrestenson, *A class of generalized Walsh functions*, Pacific Journ. of Math. 5 (1955), str. 17-31.

[2] P. Civin, *Multiplicative closure and the Walsh functions*, ibidem 3 (1952), str. 291-295.

[3] N. J. Fine, *On the Walsh functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 65 (1949), str. 372-414.

[4] — *On groups of orthonormal functions* (I), Pacific Journ. of Math. 5 (1955), str. 51-59.

[5] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *On the absolute convergence of Fourier series*, Journ. London Math. Soc. 3 (1925), str. 250-253.

[6] J. Musielak, *On absolute convergence of multiple Fourier series*, Ann. Polon. Math. 5 (1958), str. 107-120.

[7] A. Zygmund, *Trigonometric series*, Vol. I, second edition, Cambridge 1959.

[8] И. Е. Жак, *Об одной теореме Леви об абсолютной сходимости рядов Фурье*, Успехи Мат. Наук 10, 1 (63) (1955), str. 107-112.

Чи Гуан-фу (Познань)

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ КРАТНЫХ РЯДОВ УОЛЬША И ФУРЬЕ

РЕЗЮМЕ

Работа состоит из двух частей. В первой части рассматривается некоторые вопросы, касающиеся абсолютной сходимости кратных рядов Уольша-Фурье. Сначала доказывается теоремы типа Бернштейна-Зигмунда, затем формируется теорему М. Рисса о свертке. Аналогичные теоремы можно доказать для мультипликативных ортонормальных систем. Во второй части распространяется теорему Леви-Винера об абсолютной сходимости рядов Фурье и некоторые ее следствия на кратные ряды Фурье; исследуется сходимость рядов вида

$$\sum_{m_1,\dots,m_n=-\infty}^{\infty}|C_{m_1\dots m_n}|^a, \quad \text{где} \quad 0<a\leqslant 1.$$

В классической теореме рассматривается лишь случай $n = a = 1$.

CI GUAN-FU (Poznań)

ON ABSOLUTE CONVERGENCE OF MULTIPLE WALSH AND FOURIER SERIES

SUMMARY

This paper consist of two parts. In the first part we deal with some questions concerning the absolute convergence of multiple Walsh-Fourier series. First, we prove theorems of the Berstein-Zygmund type, then we formulate M. Riesz's theorem on convolution. Similar theorems may also be proved for multiplicative orthonormal systems. In the second part we give a generalization of the Lévy-Wiener theorem on the absolute convergence of Fourier series and some of its corollaries for multiple trigonometrical Fourier series, concerning the series of the form

$$\sum_{m_1,\ldots,m_n=-\infty}^{\infty} |C_{m_1\ldots m_n}|^a, \quad \text{where} \quad 0 < a \leqslant 1.$$

In the classical formulation, only the case $n = a = 1$ is considered.