

J. MIODUSZEWSKI (Wrocław)

Funkcje ciągłe o stałej krotności skończonej na odcinku i prostej

§ 1. Pojęcia wstępne. W pracy tej rozważane są funkcje ciągłe o stałej krotności skończonej k , tj. przyjmujące każdą swą wartość dla dokładnie k wartości zmiennej, odwzorowujące odcinek lub prostą, które to przestrzenie oznaczane są dalej stałe przez $\mathcal{X}$, w przestrzeń $\mathcal{Y}$ będącą $\mathcal{L}^*$ ([4], I, str. 83) (a więc nie konieczne przestrzenią topologiczną). Funkcje te będą dla skrótu nazywane także *funkcjami ciągłymi k -krotnymi na $\mathcal{X}$* . Wiadomo ([3]), że na odcinku nie istnieją funkcje ciągłe 2-krotne (p. także [1] i [5]) i że nie istnieją one na prostej (p. [1] i [5]). Łatwo natomiast podać przykłady funkcji ciągłych o stałej krotności na odcinku i prostej dla wszelkich krotności $k \neq 2$. Niżej podane będą takie przykłady. Konstrukcje ich i na innych przestrzeniach topologicznych nie przedstawiają większych trudności. Zauważmy jednak, że nie istnieją funkcje ciągłe k -krotne rzeczywiste na odcinku. Dowód jest elementarny.

Wraz z każdą funkcją ciągłą k -krotną f rozważać będziemy na $\mathcal{X}$ funkcję wielowartościową Φ określoną wzorem

$$(1) \Phi(x) = f^{-1}f(x) = (x^1) \cup (x^2) \cup \dots \cup (x^k), \text{ gdzie } x^1 = x \text{ oraz}$$

$$(2) x^i \neq x^j \quad \text{dla} \quad i \neq j.$$

Wiadomo ([4], I, (1.5)), że ⁽¹⁾

$$(3) \text{ Jeśli } \mathcal{X} \text{ jest odcinkiem, to } \text{Ls}_{\xi \rightarrow x} \Phi(\xi) \subset \Phi(x) \text{ dla wszelkich } x \in \mathcal{X}.$$

Jeśli $\mathcal{X}$ jest prostą, a więc zbiorem homeomorficznym z przedziałem otwartym, to przez $\mathcal{X}^*$ będziemy oznaczać okrąg, który powstaje z tego przedziału po dołączeniu doń jego końców i ich zlepieniu. $\mathcal{X}^*$ różni się więc od $\mathcal{X}$ jednym punktem, który oznaczać będziemy przez p . Wiadomo ([4], I, (1.5)), że

$$(4) \text{ Jeśli } \mathcal{X} \text{ jest przedziałem otwartym, to } \text{Ls}_{\xi \rightarrow x} \Phi(\xi) \subset \Phi(x) \cup (p) \text{ dla wszelkich } x \in \mathcal{X}.$$

⁽¹⁾ Symbole Ls, Li i Lim oznaczają odpowiednio granicę topologiczną górną, granicę topologiczną dolną oraz granicę topologiczną; (p. pracę poprzednią).

Funkcja wielowartościowa Φ jest ciągła w punkcie $x \in X$, jeśli istnieje granica topologiczna $\lim_{\xi \rightarrow x} \Phi(\xi)$ i $\lim_{\xi \rightarrow x} \Phi(\xi) = \Phi(x)$. Punkty ciągłości funkcji Φ będziemy nazywać także *punktami regularności funkcji* f . Ich zbiór oznaczmy przez X_Φ . Wiadomo (np. [4], I, (1.11)), że jest on otwarty i gęsty w X . Komponenty zbioru X_Φ będziemy nazywać *komponentami regularności funkcji* f .

Opierać się będziemy na następującej własności funkcji Φ (p. [5], I, (3.1)):

(5) *Na to, by $x \in X_\Phi$, potrzeba i wystarcza, by istniał ciąg $\{\xi_n\}$ zbieżny do x i takie dwa ciągi $\{u_n\}$ i $\{v_n\}$ punktów należących do zbiorów $\Phi(\xi_n)$, gdzie $u_n \neq v_n$ dla wszelkich n , takich że albo jeden z tych ciągów jest zbieżny do p , albo $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$.*

Własność ta jest łatwą konsekwencją tego, że krotność funkcji ciągłej f jest stała, a w szczególności własności (3) i (4).

Praca niniejsza poświęcona jest zbadaniu funkcji ciągłych k -krotnych na odcinku i prostej (przedziale otwartym) ze względu na ich komponenty regularności. O podanych w § 2 przykładach będzie dowiedzione w § 5 i § 7, że są z tego punktu widzenia możliwie najprostsze. Z dowiedzionych twierdzeń (§ 4 i § 6) wynika między innymi nieistnienie odwzorowań symplecjalnych odcinka o stałej krotności skończonej oraz nieistnienie odwzorowań symplecjalnych prostej o stałej krotności skończonej parzystej. Postawione wreszcie w § 8 zagadnienie ma na celu sprecyzowanie istotniejszej różnicy, która, jak się wydaje, zachodzi między funkcjami o stałej krotności parzystej a funkcjami o stałej krotności nieparzystej na odcinku i prostej.

§ 2. Przykłady. 1. *Funkcje ciągłe o stałej krotności nieparzystej $k \geq 3$ na odcinku.* Określimy najpierw na odcinku $0 \leq x \leq 1$ funkcje p_{2n+1} , $n = 1, 2, \dots$, takie że

$$p_{2n+1}(j/(2n+1)) = \begin{cases} 0 & \text{dla } j = 0, 2, \dots, 2n, \\ 1 & \text{dla } j = 1, 3, \dots, 2n+1 \end{cases}$$

i które są w przedziałach $j/(2n+1) < x < (j+1)/(2n+1)$, $j = 1, 2, \dots, 2n$, liniowe.

Z kolei określimy funkcje rzeczywiste ciągłe q_{2n+1} , $n = 1, 2, \dots$, na odcinku $0 \leq x \leq 1$:

$q_{2n+1}(x) = 2^{-m} (1 + p_{2n+1}(2^m(x - 2^{-m})))$ dla $2^{-m} \leq x \leq 2^{-m+1}$, $m = 1, 2, \dots$ (rys. 1).

Funkcje $q_{2n+1}^*(x) = e^{2\pi i q_{2n+1}(x)}$, odwzorowujące odcinek $0 \leq x \leq 1$ na okrąg, są funkcjami ciągłymi $(2n+1)$ -krotnymi na tym odcinku. Kompo-

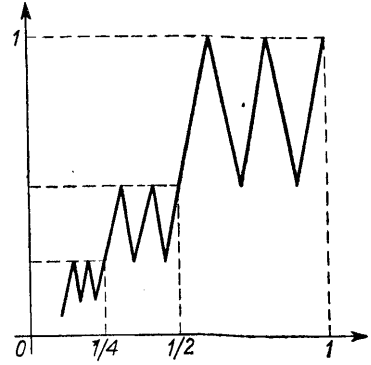
mentami regularności funkcji q_{2n+1}^* są przedziały $2^{-m}(1+j/(2n+1)) < x < 2^{-m}(1+(j+1)/(2n+1))$, $j = 0, 1, \dots, 2n$, $m = 1, 2, \dots$

2. *Funckje ciągłe o stałej krotności skończonej (dowolnej) $k \geq 3$ na odcinku.* Określmy najpierw na odcinku $0 \leq x \leq k-2$, $k = 3, 4, \dots$, funckje r_k (rzeczywiste i ciągłe), dla których

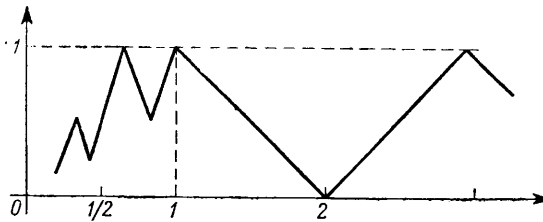
$$r_k(x) = \begin{cases} q_3(x) & \text{dla } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{dla } x \text{ parzystych,} \\ 1 & \text{dla } x \text{ nieparzystych} \end{cases}$$

i które są liniowe w przedziałach $j < x < j+1$, $j = 1, 2, \dots, k-3$ (rys. 2).

Funckje $r_k^*(x) = e^{2\pi i r_k(x)}$, odwzorowujące odcinek $0 \leq x \leq k-2$ na okrąg, są ciągłe i k -krotne na tym odcinku. Komponentami regularności funkcji r_k są przedziały $j + 2^{-m}(1+i/3) < x < j + 2^{-m}(1+(i+1)/3)$, $i = 0, 1$ oraz 2 , $m = 1, 2, \dots$, $j = 0, 1, \dots, k-3$.



Rys. 1. Funckja q_{2n+1} , $n = 2$



Rys. 2. Funckja r_k

3. *Funckje ciągłe o stałej krotności nieparzystej $k \geq 3$ na przedziale otwartym.* Takimi funckjami są funckje

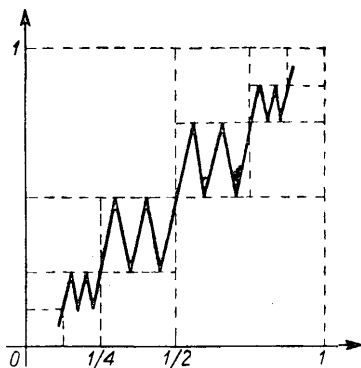
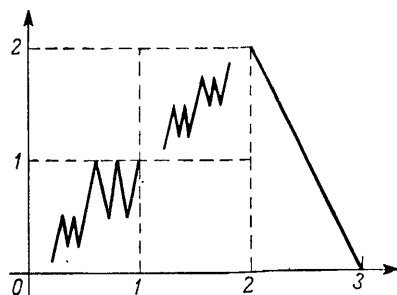
$$s_{2n+1}(x) = \begin{cases} 2^{-1} \cdot q_{2n+1}(2x) & \text{dla } 0 < x \leq 2^{-1}, \\ 1 - 2^{-1} \cdot q_{2n+1}(2(1-x)) & \text{dla } 2^{-1} \leq x < 1, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots,$$

określone na przedziale $0 < x < 1$ (rys. 3).

Komponentami regularności funkcji s_{2n+1} są przedziały

$$2^{-m}(1+j/(2n+1)) < x < 2^{-m}(1+(j+1)/(2n+1)), \quad j = 0, 1, \dots, 2n,$$

$m = 2, 3, \dots$, oraz przedziały do nich symetryczne względem punktu $x = 2^{-1}$. Zauważmy, że funckje s_{2n+1} są domknięte i że zbiór punktów, w których nie są regularne, jest izolowany. Każda z nich określa odwzorowanie symplecjalne przedziału $0 < x < 1$ na siebie.

Rys. 3. Funkcja s_{2n+1} , $n = 2$ Rys. 4. Funkcja u_{4n} , $n = 1$

4. *Funkcje ciągłe o stałej krotności $k = 4n$, $n = 1, 2, \dots$, na przedziale otwartym.* Określimy najpierw funkcje rzeczywiste i ciągłe u_{4n} odwzorowujące przedziały $0 < x < n+2$ na przedziały z jednym końcem $0 < y \leq n+1$ jak następuje:

$$u_{4n}(x) = \begin{cases} q_{4n-1}(x) & \text{dla } 0 < x \leq 1, \\ j + s_{4n-1}(x) & \text{dla } j < x < j+1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ (n+1)(n+2) & \text{dla } n+1 \leq x < n+2 \end{cases}$$

(rys. 4).

Jeśli teraz przekształcimy odcinek $0 < y \leq n+1$ w sposób polegający na zlepianiu punktów $y = 1, 2, \dots, n+1$, to superpozycja tego zlepiania i funkcji u_{4n} da funkcję u_{4n}^* ciągłą i $4n$ -krotną na przedziale $0 < x < n+2$.

Zauważmy, że funkcje u_{4n}^* są funkcjami domkniętymi, ale w odróżnieniu od funkcji s_{2n+1} punkty, w których nie są one regularne, nie stanowią zbioru izolowanego (punktami skupienia tego zbioru są między innymi wszystkie punkty całkowite).

5. *Funkcje ciągłe o stałej krotności $k = 4n+2$, $n = 1, 2, \dots$, na przedziale otwartym.* Określimy, jak i poprzednio, najpierw funkcje ciągłe rzeczywiste, mianowicie funkcje v_{4n+2} , odwzorowujące przedziały $0 < x < 4n+4$ na przedziały z jednym końcem $0 < y \leq 2n+2$ jak następuje:

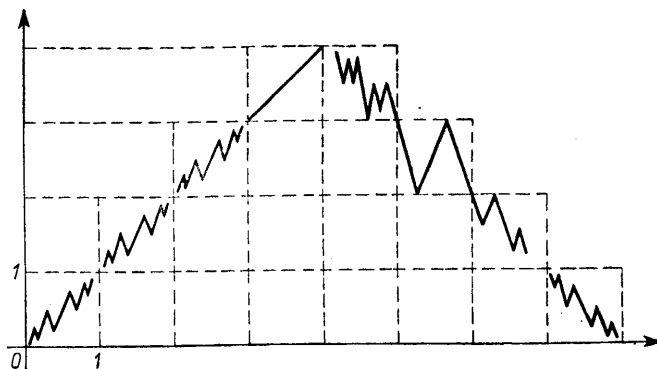
$$v_{4n+2}(x) = \begin{cases} j + s_{2n+1}(x-j) & \text{dla } j < x < j+1, \quad j = 0, 1, \dots, 2n, \\ 2n+1 + q_{2n-1}(x-2n-1) & \text{dla } 2n+1 \leq x \leq 2n+2, \\ 2n+2 + q_{2n+3}(x-2n-2) & \text{dla } 2n+2 \leq x \leq 2n+3, \\ 2n + p_{2n-1}(4-x+2n) & \text{dla } 2n+3 \leq x \leq 2n+4, \\ 2n-1 + q_{2n+1}(5-x+2n) & \text{dla } 2n+4 \leq x \leq 2n+5 \end{cases}$$

oraz

$$v_{4n+2}(2n+2+z) = v_{4n+2}(2n+2-z) \quad \text{dla} \quad z \geq 3 \quad (\text{rys. 5}).$$

Jeśli teraz odcinek $0 < y \leq 2n+1$ przekształcimy w sposób polegający na zlepianiu punktów $y = 1, 2, \dots, n-1, 2n+1$ i $2n+2$ oraz punktów $y = n, n+1, \dots, 2n-1$ i $2n$, to superpozycja tego zlepiania z funkcją v_{4n+2} da funkcję v_{4n+2}^* , która jest ciągła i $(4n+2)$ -krotna na przedziale $0 < x < 4n+4$.

Funckje v_{4n+2}^* są, jak i poprzednie, domknięte. Zbiór punktów, w których nie są regularne, nie jest izolowany.



Rys. 5. Funckja v_{4n+2} , $n = 1$

§ 3. Zachowanie się funkcji Φ w otoczeniu swego punktu ciągłości. Skorzystamy z pewnych własności funkcji Φ , udowodnionych w [5] ogólnie dla przestrzeni topologicznych lokalnie zwartych $\mathcal{X}$. Mianowicie:

(6) *Jeśli $x \in \mathcal{X}_\Phi$, to istnieje otoczenie $U \subset \mathcal{X}_\Phi$ punktu $x = x^1$ i takie otoczenia V_i , rozłączne po domknięciu, punktów x^i , gdzie $\bar{U} \subset V_i$ oraz $i = 1, 2, \dots, k$, że $\varphi_i(\xi) = \Phi(\xi) \cap V_i$ są homeomorfizmami na $\bar{U}$. Jest przy tym $\varphi_i(\bar{U}) = \overline{\varphi_i(U)} = \bar{U}_i \subset V_i$ oraz $\Phi(\xi) = \bigcup_{i=1}^k \varphi_i(\xi)$.*

Od tego miejsca, jeśli to nie będzie zaznaczone inaczej, $\mathcal{X}$ oznaczać będzie odcinek lub prostą. Odcinek zawsze będzie odcinkiem $0 \leq x \leq 1$. Zamiast prostej będzie się rozważać najczęściej przedział otwarty $0 < x < 1$.

Łatwo zauważyć, że

(7) *Jeśli $x \in \mathcal{X}_\Phi$ i $0 \neq x \neq 1$, to obrazy $U_i = \varphi_i(U)$ są otoczeniami punktów x^i i wszystkie x^i są różne od 0 i 1.*

Jeśli otoczenie U jest przedziałem, to oczywiście wszystkie U_i są też przedziałami. Jest wtedy

(8) $U_i \subset \mathcal{X}_\Phi - (0) - (1)$.

Istotnie, na mocy (6), dla $\xi \in U_i$ jest $\Phi(\xi) = \bigcup_{j=1}^k \varphi_j \varphi_i^{-1}(\xi)$. Z równości

tej i z (5) wynika wobec rozłączności przedziałów U_j , że każdy punkt $\xi \in U_i$ jest punktem ciągłości funkcji Φ .

Z (8) wynika, że

$$(9) \quad \Phi(\mathcal{X}_\phi - (0) - (1)) \subset \mathcal{X}_\phi - (0) - (1).$$

Oznaczmy przez U_i^* maksymalne przedziały U_i spełniające warunki z (6). Oznaczmy dalej przez a i b końce przedziału $U^* = U_1^*$. Przez a_i i b_i oznaczmy końce przedziału $(^2)$ U_i^* w ten sposób, że

$$(10) \quad a_i = \lim_{\xi \rightarrow x, \xi \in U^*} \varphi_i(\xi) \quad \text{oraz} \quad b_i = \lim_{\xi \rightarrow x, \xi \in U^*} \varphi_i(\xi).$$

W myśl tych oznaczeń jest $a_1 = a$ i $b_1 = b$.

Założmy, co dla krotności $k \geq 3$ zawsze da się zrobić przez odpowiedni dobór numeracji przedziałów U_i , że $0 \neq a \neq 1$. Wtedy na mocy (3)

$$(11) \quad \text{Jeśli } a_i \in \mathcal{X}, \text{ to } a_i \in \Phi(a).$$

Udowodnimy, że

$$(12) \quad \text{Jeśli } 0 \neq a_i \neq 1, \text{ to } a_i \in \mathcal{X}_\phi.$$

Istotnie, przypuśćmy, że $a_i \in \mathcal{X}_\phi$. Z (6) i (8) wynika wtedy istnienie otoczenia W punktu a_i takiego, że $\Phi(W) = \bigcup_{j=1}^k W_j$, gdzie W_j są przedziałami, rozłącznymi po domknięciu, zawierającymi punkty a_j , zawartymi w $\mathcal{X}_\phi$ i nie zawierającymi ani 0 ani 1 oraz ponadto takimi, że $\Phi(\xi) \cap W_j$ jest homeomorfizmem przedziału W na przedział W_j . Wszystkie a_i byłyby więc w $\mathcal{X}_\phi$ i byłyby różne od 0 i 1.

Rozważmy dwa przypadki: 1° $b = 0$ lub 1 i 2° $0 \neq b \neq 1$.

1° $b = 0$. Wszystkie b_i , jeśli tylko należą do $\mathcal{X}$, są w tym przypadku na mocy (5) punktami nieciągłości funkcji Φ ; leżą więc one wszystkie poza zbiorem $\bigcup_{j=1}^k W_j$. W rezultacie zbiory $U_j^* \cup W_j$ byłyby przedziałami rozłącznymi, większymi od U_j^* spełniającymi wszystkie warunki z (6), wbrew temu, że U_j^* są *ex definitione* maksymalnymi przedziałami tego rodzaju.

2° $0 \neq b \neq 1$. Wtedy $0 \neq b_i \neq 1$ oraz $b_i \in \Phi(b)$. Musi być zatem $\Phi(a) \cap \Phi(b) = 0$. Z niepustości tego zbioru wynikałoby bowiem na mocy (2), że $\Phi(a) = \Phi(b)$, skąd $\Phi(a) = \Phi(a) \cup \Phi(b)$. Zbiór $\Phi(a)$, jako zawierający wszystkie końce (wszystkie różne od 0 i 1) k przedziałów rozłącznych na $\mathcal{X}$, zawierałby więc co najmniej $k+1$ punktów różnych, wbrew temu, że jest stale $\overline{\Phi(\xi)} = k$. Z udowodnionej równości $\Phi(a) \cap \Phi(b) = 0$ wynikałoby więc, że można tak dobrać przedziały W_i , żeby wszystkie b_i leżały poza zbiorem $\bigcup_{j=1}^k W_j$. Dalszy dowód przebiega jak w przypadku 1°.

(²) Końce a i b , jak również ogólniej końce a_i i b_i mogą nie należeć do $\mathcal{X}$, jeśli $\mathcal{X}$ jest przedziałem.

Z własności (12) i z (8) wynika natychmiast:

(13) Przedziały U_i^* są identyczne z komponentami regularności H_i punktów x^i , $i = 1, 2, \dots, k$.

Udowodnione własności można zebrać w następujące twierdzenie:

(14) Jeśli $x \in \mathcal{X}_\Phi$ a H_i są komponentami regularności punktów x^i określonych wzorem (1), to H_i są rozłączne i wyrażenie $\varphi_i(\xi) = \Phi(\xi) \cap H_i$ określa homeomorfizm komponenty regularności $H = H_1$ na komponentę regularności H_i .

Zauważmy jeszcze, że

(15) Jeśli $\mathcal{X}$ jest odcinkiem oraz a i b są końcami komponenty regularności H punktu x , to $\Phi(a) \cap \Phi(b) = 0$.

Istotnie, z $\Phi(a) \cap \Phi(b) \neq 0$ wynikałoby, że $\Phi(a) = \Phi(b) = \Phi(a) \cup \Phi(b)$. Zbiór $\Phi(a)$ zawierałby więc wszystkie końce odcinków $\bar{H}_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, wśród których jest co najmniej $k+1$ różnych, wbrew temu, że jest stale $\overline{\Phi(\xi)} = k$.

Analogiczna do (15) własność w przypadku, gdy $\mathcal{X}$ jest przedziałem, nie ma miejsca. Istotnie, rozważmy funkcję ciągłą w' 3-krotną na przedziale $0 < x < 4$, która odwzorowuje go na zbiór złożony z okręgu i odcinka $0 \leq y < 1$ mającego z tym okręgiem punkt $y = 0$ wspólny; niech punkt ten ma współrzędną $\varphi = 0$ w układzie współrzędnych biegunowym o początku w środku okręgu. Tę funkcję w' określamy w następujący sposób: jeśli $0 < x \leq 3$, to wartości $w'(x)$ są punktami okręgu o współrzędnych $\varphi = x(\bmod 1)$, a jeśli $3 < x < 4$, to wartości $w'(x)$ są punktami odcinka o współrzędnych $y = s_3(x)$, gdzie s_3 jest funkcją z przykładu 3 na str. 82. Przedział $1 < x < 2$ jest komponentą regularności funkcji w' . Mamy jednak $\Phi(1) = \Phi(2)$.

Innym przykładem tego rodzaju funkcji ciągłej 3-krotnej na przedziale jest funkcja w'' odwzorowująca przedział $0 < x < 4$ na dwa okręgi styczne w punkcie, którego współrzędne biegunowe względem obu okręgów są równe 0. Określona jest ona następująco: jeśli $0 < x \leq 2$, to $w''(x)$ są punktami pierwszego okręgu o współrzędnych $\varphi = x(\bmod 1)$, jeśli $2 < x < 3$, to $w''(x)$ są punktami drugiego okręgu o współrzędnych $\varphi = s_3(x-2)$ i wreszcie dla $3 < x < 4$ wartości $w''(x)$ są znów punktami pierwszego okręgu o współrzędnych $\varphi = x(\bmod 1)$. Przedział $1 < x < 2$ jest tu, podobnie jak poprzednio, komponentą regularności i $\Phi(1) = \Phi(2)$.

Obie te funkcje nie są domknięte. Dostatecznie małe przedziały $0 < x \leq \varepsilon$, które są domknięte w $\mathcal{X}$, mają jako obrazy zbiory nie domknięte w $\mathcal{Y}$. Obrazy te nie zawierają swego punktu skupienia, którym jest w pierwszym przykładzie punkt wspólny okręgu i odcinka, a w drugim punkt wspólny dwu okręgów.

Przypadek $\Phi(a) = \Phi(b)$ jest jednak bardzo szczególny. Wykażemy bowiem ($\mathcal{X}$ jest tu oczywiście nadal przedziałem), że

(16) Jeśli H jest komponentą regularności o końcach a i b należących do $\mathcal{X}$ i $\Phi(a) = \Phi(b)$, to $\bigcup_{i=1}^k \bar{H}_i$ jest przedziałem z jednym końcem lub dwoma takimi przedziałami rozłącznymi. Zbiór $\Phi(a)$ jest wtedy identyczny ze zbiorem $A \cup B$, gdzie $A = \mathcal{X} \cap \bigcup_{i=1}^k (a_i)$ oraz $B = \mathcal{X} \cap \bigcup_{i=1}^k (b_i)$, gdzie a_i i b_i określone są przez wzór (10).

Istotnie, z $\Phi(a) = \Phi(b)$ wynika, że zbiór $\Phi(a)$ zawiera wszystkie końce odcinków $\bar{H}_i$ zawarte w $\mathcal{X}$. Gdyby zbiór $\bigcup_{i=1}^k \bar{H}_i$ miał więcej niż dwie komponenty, to końców tych byłoby więcej niż k , co jest niemożliwe. Z tych samych powodów każda z tych komponent musi mieć jeden koniec w 0 lub 1. Równość $\Phi(a) = A \cup B$ wynika stąd już bezpośrednio.

§ 4. Pewne oszacowania liczbowe. Niech H będzie komponentą regularności funkcji f , punkt a zaś jednym z jej końców, różnym od 0 i 1. Oznaczmy przez H_i , $i = 1, 2, \dots, k$, komponenty regularności zlepione z H przez funkcję f , tj. takie, że $\Phi(H) = \bigcup_{i=1}^k H_i$, gdzie $H_1 = H$. Niech a_i będą końcami komponent H_i odpowiadającymi końcowi a w myśl umowy (10). Przyjmijmy oznaczenie: $A = \mathcal{X} \cap \bigcup_{i=1}^k (a_i)$. W przypadku, gdy $\mathcal{X}$ jest odcinkiem, mamy oczywiście $A = \bigcup_{i=1}^k (a_i)$. Jest oczywiście także $A \subset \Phi(a)$.

Niech z kolei G będzie komponentą regularności funkcji f różną od wszystkich H_i , a c jednym z jej końców różnym od 0 i 1. Niech G_j , $j = 1, 2, \dots, k$, będą komponentami regularności zlepionymi z G przez funkcję f , a c_j ich końcami odpowiadającymi końcowi c w myśl umowy (10). Niech wreszcie $C = \mathcal{X} \cap \bigcup_{j=1}^k (c_j)$. Jest oczywiście $C \subset \Phi(c)$.

Jeśli $A \cap C \neq \emptyset$, to będziemy mówić, że układ komponent regularności $\{H_i\}$ przylega do układu komponent regularności $\{G_j\}$ na zbiorach A i C . Założmy więc, że $A \cap C = \emptyset$. Będziemy obliczać przy tym założeniu ilość punktów w zbiorze $M = A \cup C$ w rozmaitych przypadkach, zależnie od tego, czy zbiory $\bigcup_{i=1}^k (a_i)$ i $\bigcup_{j=1}^k (c_j)$ zawierają punkty 0 i 1 czy nie.

Oznaczmy przez α ilość tych punktów a_i , które są różne od wszelkich a_j , $j \neq i$, oraz różne od 0 i 1 (inaczej mówiąc, α jest ilością końców zbioru $\bigcup_{i=1}^k \bar{H}_i$ różnych od 0 i 1). Taką samą liczbę dla końców c_j oznaczmy przez γ .

Wreszcie przez ε oznaczmy ilość punktów wspólnych zbiorów $\bigcup_{i=1}^k (a_i)$ i $\bigcup_{j=1}^k (c_j)$. Jest oczywiście zawsze

$$(17) \quad \varepsilon \leq \min(\alpha, \gamma),$$

gdyż punkty wspólne tych zbiorów znajdują się jedynie wśród końców zbiorów $\bigcup_{i=1}^k \bar{H}_i$ i $\bigcup_{j=1}^k \bar{G}_j$.

Zauważmy, że z tego, iż punkt 0 lub 1 należy do $\bigcup_{j=1}^k (a_i)$ wynika, że nie należy on do $\bigcup_{j=1}^k (c_j)$. Rozpatrzmy 4 przypadki:

1° oba punkty 0 i 1 należą do $\bigcup_{i=1}^k (a_i)$,

2° $0 \in \bigcup_{i=1}^k (a_i)$, a $1 \in \bigcup_{j=1}^k (c_j)$,

3° $0 \in \bigcup_{i=1}^k (a_i)$, a $1 \notin \bigcup_{j=1}^k (c_j) \cup \bigcup_{i=1}^k (a_i)$,

4° żaden z punktów 0 i 1 nie należy do $\bigcup_{i=1}^k (a_i)$ i $\bigcup_{j=1}^k (c_j)$.

Pozostałe przypadki należenia lub nie punktów 0 i 1 do zbiorów $\bigcup_{i=1}^k (a_i)$ i $\bigcup_{j=1}^k (c_j)$ sprowadzają się przez zamianę ról 0 i 1 do powyższych czterech.

Wykażemy najpierw, że

(18) *Jeśli $\mathcal{X}$ jest odcinkiem, to przypadki 1°-3° nie mogą mieć miejsca.*

Istotnie, w przypadku 1° jest $\bar{A} = 2^{-1}(k + \alpha + 2)$, $\bar{C} = 2^{-1}(k + \gamma)$ i w rezultacie $\bar{M} = k + 1 + 2^{-1}(\alpha + \gamma - 2\varepsilon)$. Ta ostatnia liczba jest na mocy (17) większa od k , co jest sprzeczne z tym, że $M \subset \Phi(a) = \Phi(c)$.

W przypadku 2° jest $\bar{A} = 2^{-1}(k + \alpha + 1)$, $\bar{C} = 2^{-1}(k + \gamma + 1)$ i w rezultacie $\bar{M} = k + 1 + 2^{-1}(\alpha + \gamma - 2\varepsilon)$, a w przypadku 3° jest $\bar{A} = 2^{-1}(k + \alpha + 1)$, $\bar{C} = 2^{-1}(k + \gamma)$ i w rezultacie $\bar{M} = k + 2^{-1} + 2^{-1}(\alpha + \gamma - 2\varepsilon)$. W obu tych przypadkach liczba $\bar{M}$ jest na mocy (17) większa od k , co jest, jak poprzednio, niemożliwe.

W przypadku 4° (niezależnie od tego, czy $\mathcal{X}$ jest odcinkiem, czy przedziałem otwartym) ilości punktów w zbiorach A , C i M są: $\bar{A} = 2^{-1}(k + \alpha)$, $\bar{C} = 2^{-1}(k + \gamma)$ i $\bar{M} = k + 2^{-1}(\alpha + \gamma - 2\varepsilon)$. Wynika stąd na mocy (17) i inkluzji $M \subset \Phi(a) = \Phi(c)$, że $\alpha + \gamma - 2\varepsilon = 0$, czyli że wszystkie punkty zbioru $A \cup C$ są zawarte we wnętrzu zbioru $\bigcup_{i=1}^k \bar{H}_i \cup \bigcup_{j=1}^k \bar{G}_j$.

Obliczymy jeszcze ilości punktów w zbiorach A , C i M w przypadkach 1°-3°, jeśli $\mathcal{X}$ jest przedziałem otwartym. Jest wtedy: w przypadku 1° $\bar{A} = 2^{-1}(k + \alpha - 2)$, $\bar{C} = 2^{-1}(k + \gamma)$ i $\bar{M} = k - 1 + 2^{-1}(\alpha + \gamma - 2\varepsilon)$, w przypadku 2° $\bar{A} = 2^{-1}(k + \alpha - 1)$, $\bar{C} = 2^{-1}(k + \gamma - 1)$ i $\bar{M} = k - 1 + 2^{-1}(\alpha + \gamma - 2\varepsilon)$

oraz w przypadku 3° $\bar{A} = 2^{-1}(k + \alpha - 1)$, $\bar{C} = 2^{-1}(k + \gamma)$ i $\bar{M} = k - 2^{-1} + 2^{-1}(\alpha + \gamma - 2\varepsilon)$. Wobec (17) i $M \subset \Phi(a) = \Phi(c)$, w przypadkach 1° i 2° jest $\alpha + \gamma - 2\varepsilon \leq 2$, a w przypadku 3° jest $\alpha + \gamma - 2\varepsilon = 1$.

§ 5. Nieistnienie funkcji ciągłych k -krotnych o skończonej liczbie komponent regularności. We wszystkich podanych poprzednio przykładach funkcje ciągłe k -krotne na odcinku i przedziale otwartym miały nieskończenie wiele komponent regularności. Wykażemy, że tak jest zawsze. Konsekwencją niżej udowodnionego twierdzenia jest między innymi nieistnienie odwzorowań symplecjalnych odcinka o stałej krotności skończonej.

TWIERDZENIE. *Nie istnieją funkcje ciągłe k -krotne o skończonej ilości komponent regularności na odcinku i prostej (przedziale otwartym).*

Dowód. 1. $\mathcal{X}$ jest odcinkiem $0 \leq x \leq 1$. Przypuśćmy, że funkcja taka istnieje. Wtedy punkt $a = 0$ jest końcem pewnej komponenty regularności H tej funkcji. Dla uzyskania sprzeczności wystarczy wobec (18) wykazać istnienie układu komponent regularności $\{G_j\}$ przyległego do $\{H_i\}$ na zbiorze A (oznaczenia z § 4). Taki układ G_j oczywiście istnieje, jeśli $\bar{A} < k$. Niech więc $\bar{A} = k$. Wtedy (p. dowód przesłanki (18)) jest $\alpha = 2^{-1}(k - 2)$ w przypadku 1° i $\alpha = 2^{-1}(k - 1)$ w przypadkach 2° i 3° . Jest więc zawsze $\alpha > 0$, jeśli $k \geq 3$. Oznacza to, że zbiór A zawiera końce zbioru $\bigcup_{i=1}^k \bar{H}_i$. Niech jednym z nich będzie c . Układem przyległym do $\{H_i\}$ jest układ komponent regularności $\{G_j\}$, gdzie $G = G_1$ jest komponentą regularności o końcu c , różną od wszystkich H_i .

2. $\mathcal{X}$ jest przedziałem otwartym $0 < x < 1$. Przypuśćmy, że istnieje taka funkcja. Wtedy punkt $a = 0$ jest końcem pewnej komponenty regularności H . Zachowując oznaczenia § 4, dostajemy na mocy rachunków zrobionych w przypadkach 1° - 3° i na mocy (17) nierówność $\bar{A} < k$. Wynika stąd istnienie układu komponent regularności $\{G_j\}$ przyległego do $\{H_i\}$ na zbiorze A . Niech $G_1 = G$. Niech c , $0 \neq c \neq 1$, będzie końcem przedziału G , takim że $A \cap C \neq \emptyset$. Jest oczywiście $M = A \cup C \subset \Phi(c)$. Rozważmy dla tych zbiorów liczbę $\alpha + \gamma - 2\varepsilon$.

Jeśli $\alpha + \gamma - 2\varepsilon = 0$ (przypadek 3° nie może tu mieć miejsca), to $\bar{M} = k - 1$. Istnieje zatem punkt $e \in \Phi(c) - M$, który na mocy (8) nie należy do zbioru $\mathcal{X}_\Phi$, a zatem jest końcem pewnej komponenty regularności K różnej od wszystkich H_i i G_j . Oznaczmy przez K_m , $m = 1, 2, \dots, k$, komponenty regularności zlepiane przez funkcję f z komponentą regularności K , gdzie $K = K_1$, a przez e_m końce przedziałów K_m odpowiadające w myśl umowy (10) końcowi e . Jest $\mathcal{X} \cap \bigcup_{m=1}^k (e_m) \subset \Phi(c)$. Ponieważ $\bar{M} = k - 1$, więc wszystkie punkty zbioru M leżą we wnętrzu zbioru $\bigcup_{i=1}^k \bar{H}_i \cup \bigcup_{j=1}^k \bar{G}_j$.

Zatem wszystkie punkty e_m leżą poza zbiorem M . Jest to niemożliwe, ponieważ punktów e_m , które są wszystkie różne od 0 i 1, jest (jeśli $k \geq 3$) zawsze więcej niż 1.

Jeśli $\alpha + \gamma - 2\varepsilon = 1$ (jest to możliwe tylko w przypadku 3°), to $\bar{M} = k$ i dokładnie jeden z końców a_i i c_j nie leży we wnętrzu zbioru $\bigcup_{i=1}^k \bar{H}_i \cup \bigcup_{j=1}^k \bar{G}_j$. Oznaczmy ten koniec przez e . Niech K , K_m i e_m mają to samo znaczenie co poprzednio. Jest $\mathcal{X} \cap \bigcup_{m=1}^k (e_m) \subset \Phi(e)$. Jest to niemożliwe, gdyż zbiór ten, jeśli $k \geq 3$, ma co najmniej jeden punkt leżący poza M .

Jeśli wreszcie $\alpha + \gamma - 2\varepsilon = 2$ (przypadek 3° jest tu znów wykluczony), to $\bar{M} = k$ i istnieją dwa punkty wśród a_i i c_j nie należące do wnętrza zbioru $\bigcup_{i=1}^k \bar{H}_i \cup \bigcup_{j=1}^k \bar{G}_j$. Oznaczmy jeden z nich przez e . Niech K , K_m i e_m mają to samo znaczenie co poprzednio. Jest więc $\bigcup_{m=1}^k (e_m) \subset \Phi(e)$. Jest to w przypadku $k > 3$ niemożliwe, gdyż wtedy zbiór $\bigcup_{m=1}^k (e_m)$ ma co najmniej jeden punkt należący do $\mathcal{X} - M$. Zauważmy na koniec, że dla $k = 3$ równość $\alpha + \gamma - 2\varepsilon = 2$ nie może mieć miejsca.

Z uwagi na to, że nie ma funkcji ciągłych o stałej krotności 2 na prostej, dowód drugiej części twierdzenia jest zakończony.

§ 6. O zbiorze wartości funkcji ciągłych k -krotnych na odcinku i prostej (przedziale otwartym). Załóżmy, że w przestrzeni $\mathcal{Y} = f(\mathcal{X})$ jest określona w następujący sposób topologia: otoczeniem punktu $y \in \mathcal{Y}$ jest każdy zbiór W punktów $y' \in \mathcal{Y}$, dla których zbiory $\Phi(x')$, gdzie $f(x') = y'$, zawarte są w zbiorze $U \cup V$, gdzie U jest dowolnym nadzbiorem otwartym w $\mathcal{X}$ zbioru $\Phi(x)$, $f(x) = y$, a V otoczeniem w przestrzeni $\mathcal{X}^*$ (p. str. 79) punktu p , przy czym $\Phi(x') \cap U \neq \emptyset$. Tak stopologizowana przestrzeń $\mathcal{Y}$ jest przestrzenią T_2 (p. [4], I, 6). Udowodnimy, że przy tej topologii przestrzeni $\mathcal{Y}$

(19) *Jeśli H jest komponentą regularności funkcji f , to funkcja częściowa $f|H$ jest homeomorfizmem i $f(H)$ jest zbiorem otwartym w $\mathcal{Y}$.*

Istotnie, funkcja $f|H$ jest różnowartościową. Gdyby bowiem dla dwóch różnych punktów ξ' i ξ'' zbioru H było $f(\xi') = f(\xi'')$, to $\xi'' \in \Phi(\xi')$ wbrew temu, że na mocy (14) komponenty regularności dwóch różnych punktów tego samego zbioru $\Phi(\xi)$ są różne.

Wykażemy dalej, że funkcja odwrotna $f^{-1}|f(H)$ jest ciągła. Niech bowiem $\eta \in f(H)$ i $\xi = f^{-1}(\eta) \in H$. Niech $\{\eta_n\}$ będzie dowolnym ciągiem punktów zbioru $f(H)$ zbieżnym do η i niech $\xi_n = f^{-1}(\eta_n) \in H$. Przy przyjętej topologii jest (p. [4], I, (6.2)) $\text{Ls } \Phi(\xi_n) \subset \Phi(\xi) \cup \{p\}$. Ponieważ na mocy (14) jest $H \cap \Phi(\xi_n) = \xi_n$ i $H \cap \Phi(\xi) = \xi$, więc $\lim \xi_n = \xi$, czyli $\lim f^{-1}(\eta_n) = f^{-1}(\eta)$.

Wreszcie, zbiór $f(H)$ jest otwarty w $\mathcal{Y}$. Niech bowiem $\eta \in f(H)$ i niech $\{\eta_n\}$ będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do η . W myśl przyjętej w $\mathcal{Y}$ topologii jest (p. [5]) $\text{Ls } \Phi(\xi_n) \subset \Phi(\xi) \cup (p)$ oraz $[\text{Li } \Phi(\xi_n)] \cap \Phi(\xi) \neq \emptyset$, gdzie ξ i ξ_n są dowolnymi punktami takimi, że $f(\xi) = \eta$ i $f(\xi_n) = \eta_n$. Bez zmniejszenia ogólności można założyć, że $\xi \in \Phi(\xi) \cap \text{Li } \Phi(\xi_n)$ i że $\lim \xi_n = \xi$. Punkt ξ i prawie wszystkie ξ_n należą w myśl (7) do pewnej komponenty regularności H_i , gdzie $i = 1, 2, \dots, k$. Rozważmy punkty $\xi' = \varphi_i^{-1}(\xi)$ oraz $\xi'_n = \varphi_i^{-1}(\xi_n)$, gdzie φ_i są homeomorfizmami z (6). Jest $\xi' \in H$, $\xi'_n \in H$, a w rezultacie $\eta_n = f(\xi_n) = f(\xi'_n) \in f(H)$ dla prawie wszystkich n . Otwartość zbioru $f(H)$ w przestrzeni $\mathcal{Y}$ jest więc udowodniona.

Z (19) wynika łatwo, że

(20) *Zbiór $f(H)$ jest łukiem bez końców, rozłącznym z resztą zbioru $\mathcal{Y} = f(\mathcal{X})$.*

Jeśli $\mathcal{X}$ jest odcinkiem, to wynika stąd na mocy (15), że zbiór $\overline{f(H)}$ jest odcinkiem rozłącznym poza swymi końcami z resztą zbioru $\mathcal{Y} = f(\mathcal{X})$.

§ 7. Odwzorowania symplecjalne przedziału otwartego o stałej krotności skończonej. Dla funkcji dających takie odwzorowania zbiór $\mathcal{X} - \mathcal{X}_\Phi$ jest izolowany.

Zauważmy najpierw, że dla tego rodzaju funkcji

(21) *Jeśli H jest komponentą regularności o końcach a i b różnych od 0 i 1, to $\Phi(a) \neq \Phi(b)$.*

Jeśli bowiem dla takiej komponenty regularności H jest $\Phi(a) = \Phi(b)$, to na mocy (16) zbiór $\bigcup_{i=1}^k \overline{H}_i$ jest przedziałem z jednym końcem lub dwoma takimi przedziałami. Bez zmniejszenia ogólności można założyć, że a jest końcem jednego z tych przedziałów. Istnieje więc układ komponent regularności przyległy do $\{H_i\}$, oznaczmy go $\{G_j\}$, gdzie końcem jednej komponenty G_j , np. $G = G_1$, jest punkt $c = a$. Jest $C \subset \Phi(a)$. Z (16) wynika, że $\overline{A} \cup \overline{B} = k$, skąd wobec inkluzji $A \cup B \subset \Phi(a)$ wnioskujemy, że każdy z c_j jest równy pewnemu a_i lub b_i . Dla $k \geq 3$ jest to niemożliwe, gdyż punkty a_i lub b_i równe pewnym c_j są tylko wśród końców zbioru $\bigcup_{i=1}^k \overline{H}_i$, a takich końców zawartych w $\mathcal{X}$ jest na mocy (16) co najwyżej dwa.

Z (21) wynika na mocy (20), że

(22) *Jeśli $\mathcal{X} - \mathcal{X}_\Phi$ jest izolowany, to dla każdej komponenty regularności H o końcach różnych od 0 i 1, zbiór $\overline{f(H)}$ jest łukiem, rozłącznym poza swymi końcami z resztą zbioru $\mathcal{Y} = f(\mathcal{X})$.*

Wykażemy z kolei, że

(23) *Funkcja ciągła k -krotna, dla której zbiór $\mathcal{X} - \mathcal{X}_\Phi$ jest izolowany, jest rzeczywista.*

Dla dowodu rozważmy komponentę regularności H o końcach a i b różnych od 0 i 1. Udowodnimy, że $\text{ord}_{f(a)}f(\mathcal{X}) \leq 2$ ⁽³⁾, zakładając tymczasem, że wszystkie a_i są różne od 0 i 1. W tym celu wykażemy najpierw, że istnieje co najwyżej jeden układ komponent regularności przyległy do $\{H_i\}$ na zbiorze A . Niech $\{G_j\}$ będzie takim układem, a c_j końcami G_j , takimi, że $A \cap C \neq \emptyset$. Rozważmy dla $\{H_i\}$ i $\{G_j\}$ przypadki 1°-4° z § 4.

Przypadki 1° i 2° są dla funkcji o zbiorze $\mathcal{X} - \mathcal{X}_\phi$ izolowanym niemożliwe. Rozważmy więc przypadek 3°, gdy dokładnie jeden z punktów 0 lub 1 jest końcem c_j oraz przypadek 4°, gdy żaden nim nie jest.

Przypadek 3° jest również niemożliwy. Na mocy § 4 jest wtedy bowiem $\alpha + \gamma - 2\varepsilon = 1$, tj. zbiór $\bigcup_{i=1}^k \bar{H}_i \cup \bigcup_{j=1}^k \bar{G}_j$ ma poza swym wnętrzem dokładnie jeden z punktów a_i i c_j . Oznaczmy go przez e i rozważmy komponentę regularności K o końcu e różną od wszystkich H_i i G_j . Niech K , K_m i e_m , $m = 1, 2, \dots, k$, mają to samo znaczenie, co w dowodzie twierdzenia w § 5. Ponieważ zbiór $\mathcal{X} - \mathcal{X}_\phi$ jest izolowany, więc co najwyżej jeden z punktów 0 lub 1 jest punktem e_m . Ponieważ wszystkie punkty e_m , oprócz e , leżą we wnętrzu zbioru $\bigcup_{i=1}^k \bar{H}_i \cup \bigcup_{j=1}^k \bar{G}_j$, więc wszystkie te e_m , oprócz e , leżą poza $A \cup C$. Zbiór $M = A \cup C$ ma, na mocy § 4, w rozważanym przypadku $k-1$ punktów. Zbiór $\Phi(e)$ zawierający wszystkie te a_i , c_j i e_m , które są zawarte w $\mathcal{X}$, miałby zatem, jeśli $k \geq 3$, więcej niż k punktów.

W przypadku 4° jest, na mocy § 4, $\alpha + \gamma - 2\varepsilon = 0$. Wszystkie punkty a_i i c_j leżą we wnętrzu zbioru $\bigcup_{i=1}^k \bar{H}_i \cup \bigcup_{j=1}^k \bar{G}_j$ i $M = A \cup C$ ma wtedy k punktów. Nieistnienie innego niż $\{G_j\}$ układu przyległego do $\{H_i\}$ na A jest oczywiste.

Zauważmy na koniec, że jeśli ξ dąży do 0 lub 1 po zbiorze $\mathcal{X}_\phi$, to jest zawsze $\lim f(\xi) \neq f(a)$, gdyż, jeśli $\mathcal{X} - \mathcal{X}_\phi$ jest izolowany, to komponenty regularności zbieżne (w sensie topologicznym) do 0 lub 1 odwzorowywane są przez funkcję Φ (w sposób określony w (6)) na komponenty regularności zbieżne do 0 lub 1. To dowodzi ostatecznie, że $\mathcal{Y}$ jest w pewnym otoczeniu punktu $f(a)$ złożona jedynie z łuków $f(H)$ i $f(G)$, gdyż dla dostatecznie małego otoczenia U zbioru $\Phi(a)$ i dla punktów ξ dostatecznie bliskich 0 lub 1 jest $\Phi(\xi) \cap U = \emptyset$. Jest zatem $\text{ord}_{f(a)}f(\mathcal{X}) \leq 2$.

Dla zakończenia dowodu (23) zauważmy, że założenie $0 \neq a_i \neq 1$, $i = 1, 2, \dots, k$, nie zmniejsza ogólności. Jeśli bowiem jeden z końców a_i jest równy 0 lub 1, to $\bar{A} \leq k-1$. Istnieje wtedy komponenta regularności

⁽³⁾ $\text{ord}_a A$ oznacza rząd punktu a w zbiorze A w sensie Menger'a (p. [4], II, str. 200).

G różna od wszystkich H_i o końcu c różnym od 0 i 1 takim, że $\Phi(c) = \Phi\left(\bigcup_{i=1}^k (a_i)\right)$. Niech G_j i c_j oznaczają to co zwykle. Z uwagi na twierdzenie § 4 wszystkie c_j muszą być różne od 0 i 1. Dowód sprowadza się więc do rozważonego już przypadku, gdzie role H i G są zamienione.

Następujące twierdzenie wyróżnia w pewnym stopniu zachowanie się funkcji ciągłych o stałej krotności parzystej na prostej.

TWIERDZENIE. *Nie istnieją funkcje ciągłe o stałej krotności parzystej na prostej (przedziale otwartym), dla których zbiór $\mathcal{X} - \mathcal{X}_\Phi$ jest izolowany.*

Z twierdzenia tego wynika, że nie istnieją odwzorowania sympleksyjne prostej mające stałą krotność skończoną.

Dowód. Wobec (23) sprowadza się on do przypadku funkcji rzeczywistych, o których bez zmniejszenia ogólności założymy, że są określone na przedziale $0 < x < 1$ i że zbiorem ich wartości jest prosta. Załóżmy ponadto, co również nie zmniejsza ogólności, że $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$. Niech y będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Ilość tych punktów x w zbiorze $f^{-1}(y)$, w których funkcja f nie ma lokalnego ekstremum jest dla takiej funkcji nieparzysta. Punkty, w których f ma lokalne ekstremum należą do zbioru $\mathcal{X} - \mathcal{X}_\Phi$. Ponieważ zbiór ten jest izolowany, więc dla punktów y' dostatecznie bliskich punktu y , zbiór $f^{-1}(y')$ miałby nieparzystą ilość punktów, wbrew temu, że f ma wszędzie krotność parzystą.

§ 8. Zagadnienia. Niech $\mathcal{X}$ będzie teraz przedziałem otwartym $0 < x < 1$. Funkcja f nazywa się *gasnącą* na końcach tego przedziału, gdy

$$(24) \quad \lim_{x \in \mathcal{X}_\Phi} \Phi(x) = (a); \quad \text{gdzie} \quad a = 0 \quad \text{lub} \quad 1 \quad \text{i} \quad x \rightarrow a.$$

Funckje s_{2n+1} z przykładu 3 spełniają warunek (24), są więc gasnące.

Wydaje się, że jest niemożliwe skonstruowanie na prostej (przedziale otwartym) funkcji ciągłej o stałej krotności parzystej, która byłaby gasnąca. Wydaje się, że jest to jedną z cech istotnych funkcji o stałej krotności parzystej.

Dzięki temu, że można zbudować funkcje ciągłe o stałej krotności nieparzystej na prostej spełniające warunek (24) na z góry zadany podprzedziale przestrzeni $\mathcal{X}$, można je łatwo zbudować na dowolnym grafie, tj. zbiorze złożonym z odcinków mających co najwyżej końce wspólne. Dla krotności parzystych konstruacje takie są trudne (p. [2], str. 484) i nie wiadomo, czy są możliwe dla wszystkich grafów. Rozwiązanie tego zagadnienia jest w sposób widoczny związane z rozwiązaniem poprzedniego.

Prace cytowane

- [1] P. Civin, *Two-to-one mappings of manifolds*, Duke Math. Journal 10 (1943), str. 49-57.
 [2] P. W. Gilbert, *n-to-one mappings on linear graphs*, Duke Math. Journal 9 (1942), str. 475-486.
 [3] O. G. Harrold, *The non-existence of certain type of continuous transformations*, Duke Math. Journal 5 (1939), str. 789-793.
 [4] C. Kuratowski, *Topologie*, t. I (1948) i II (1950), Warszawa-Wrocław.
 [5] J. Mioduszewski, *On two-to-one continuous functions*, Rozprawy Matem., w druku.

Е. Мёдушевский (Вроцлав)

О НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЯХ ПОСТОЯННОЙ КОНЕЧНОЙ КРАТНОСТИ НА ОТРЕЗКЕ И ПРЯМОЙ

РЕЗЮМЕ

Пусть X топологическое пространство. Функция $f: X \rightarrow Y$ кратности k , если все прообразы $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, имеют точно k точек, а Y топологическое пространство T_2 . X_Φ обозначает множество всех тех точек $x \in X$, в которых многозначная функция $\Phi(x) = f^{-1}f(x)$ непрерывна. Известно, что множество X_Φ открыто и плотно в X .

ТЕОРЕМА. Если $k > 1$ и X замкнутый отрезок или прямая, то X_Φ имеет бесконечное множество компонент.

ТЕОРЕМА. Если k четно и X прямая, то множество $X - X_\Phi$ не изолированное множество в X .

J. MIODUSZEWSKI (Wrocław)

ON k -TO-ONE CONTINUOUS FUNCTIONS ON THE CLOSED INTERVAL AND THE STRAIGHT LINE

SUMMARY

Let X be a topological space. A function $f: X \rightarrow Y$ is called k -to-one if for every y the set $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, consists of exactly k points and Y is a topological T_2 -space. X_Φ denotes the set of all points $x \in X$ at which the multi-valued function $\Phi(x) = f^{-1}f(x)$ is continuous. It is known that X_Φ is dense and open in X .

THEOREM. If $k > 1$ and X is a closed interval or a straight line, then X_Φ consists of infinitely many components.

THEOREM. If k is even and X is a straight line, then $X - X_\Phi$ cannot be isolated in X .