ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA I: PRACE MATEMATYCZNE V (1961)

W. STAŚ (Poznań)

O pewnym oszacowaniu reszty w twierdzeniu o rozkładzie ideałów pierwszych

1. Wprowadzamy następujące oznaczenia: K — dowolne ciało algebraiczne stopnia ν, Δ — wyróżnik ciała K, $\zeta_K(s)$ — funkcja Dedekinda zdefiniowana w ciele K, $G(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, — współczynniki rozwinięcia funkcji $-\dfrac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s)$ na szereg Dirichleta.

Resztą w twierdzeniu o rozkładzie ideałów pierwszych nazywamy wyrażenie

$$\Delta(x) = \sum_{n\leqslant x} G(n) - x. \tag{1.1}$$

W pracy opublikowanej w Acta Arithmetica ([3]) udowodniłem następujące twierdzenie:

Jeżeli $\zeta_K(s)$ przyjmuje wartość zero w punkcie $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ $(\frac{1}{2} \leqslant \beta_0 \leqslant 1)$ i jeżeli

$$T > \max(c, c_K, c_{\varrho_0}),$$

gdzie

$$c_K = \max\left(\exp(c_1^\nu |\Delta|^{3/2}), \exp\exp(\tfrac{3}{2}\nu + 2)^8\right),$$

$$c_{\varrho_0} = \exp\exp(|\varrho_0| + |\varrho_0|^{28})$$

(c, c_1 oznaczają stałe numeryczne dające się efektywnie wyznaczyć), to

$$\max_{1\leqslant x\leqslant T} |\Delta(x)| > T^{\beta_0} \exp\left\{-2\frac{\log T \log\log\log T}{\log\log T}\right\}. \tag{1.2}$$

2. Celem niniejszej pracy jest wzmocnienie oszacowania reszty (1.2), również w sensie lokalizacji maksimum $|\Delta(x)|$.

Klasyczny przypadek ciała $K = K(1)$ został rozpatrzony w [4].

W dalszym ciągu pracy udowodnię

TWIERDZENIE. *Jeżeli $\zeta_K(\varrho_0) = 0$, $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ $(\frac{1}{2} \leqslant \beta_0 \leqslant 1)$ i*

$$T > \max(c, c_K, c_{\varrho_0}), \tag{2.1}$$

gdzie

$$c_K = \exp\exp\exp(\nu+\log|\Delta|), \tag{2.2}$$

$$c_{\varrho_0} = \exp\exp(2|\varrho_0|) \tag{2.3}$$

(c, c_1 *oznaczają stałe numeryczne dające się efektywnie wyznaczyć*), *to*

$$\max_{T^{1-\delta(T)}\leqslant x\leqslant T}\Big|\sum_{n\leqslant x}G(n)-x\Big| > T^{\beta_0}\exp\left\{-4\frac{\log T}{\log\log T}\right\} \tag{2.4}$$

oraz

$$\delta(T) = 2\frac{\log\log\log T}{(\log\log T)^2}. \tag{2.5}$$

3. Zestawię obecnie te twierdzenia teorii funkcji ζ Dedekinda, które będą używane w dalszym ciągu.

(a) *Funkcje* $\zeta_K(s)$ *są regularne na całej płaszczyźnie z wyjątkiem punktu* $s=1$, *w którym mają biegun jednokrotny* ([1], tw. 155).

(b) *W półpłaszczyźnie* $\sigma>1$, $\zeta_K(s)\neq 0$ ([1], tw. 141).

(c) *Dla* $\sigma>1$

$$-\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s) = \sum_{n=1}^{\infty}G(n)n^{-s}, \tag{3.1}$$

gdzie

$$G(n) = \sum_{(N\mathfrak{p})^m=n}\log N\mathfrak{p}. \tag{3.2}$$

i szereg powyższy jest bezwzględnie zbieżny dla $\sigma>1$ ([1], tw. 184).

(d) *Jeżeli przez* $V(T)$ *oznaczymy liczbę zer funkcji* $\zeta_K(s)$ *w równoległoboku* $\sqrt{\delta}\leqslant x\leqslant 1$, $T\leqslant y\leqslant T+1$, $0<\delta<100^{-1}$, *wówczas*

$$V(T)\leqslant c_1(\delta, K)\log(|T|+3) \tag{3.3}$$

dla każdego rzeczywistego T *i*

$$c_1(\delta, K) = c_2\delta^{-5/6}(\nu+\log|\Delta|) \tag{3.4}$$

([3], Lemma 8).

(e) *Jeżeli* $N(T)$ *oznacza liczbę zer funkcji* $\zeta_K(s)$ *w równoległoboku* $\sqrt{\delta}\leqslant x\leqslant 1$, $|y|\leqslant T$, $T>0$, *to*

$$N(T)\leqslant c_3(\delta, K)(T+1)\log(T+3) \tag{3.5}$$

oraz

$$c_3(\delta, K) = c_3\delta^{-5/6}(\nu+\log|\Delta|). \tag{3.6}$$

([3], Lemma 9).

(f) *Jeżeli* $0 < \delta < 10^{-30}$, *to w pasie* $\delta^{1/10} \leqslant x \leqslant 2\delta^{1/10}$ *płaszczyzny zespolonej można skonstruować taką łamaną o bokach równoległych do osi układu, że dla jej punktów zachodzą następujące oszacowania:*

Jeżeli oznaczymy przez T_k *rzędne punktów leżących na odcinkach równoległych do osi* X, *to dla każdej liczby całkowitej* k, *dla której* $k < T_k < k+1$,

$$\left|\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(z)\right| < c_4(\delta, K)\log^2(|k|+6) \tag{3.7}$$

oraz

$$c_4(\delta, K) = c_4\delta^{-5/3}(\nu+\log|\Delta|)^2; \tag{3.8}$$

c_4 *jest stałą numeryczną.*

Na odcinkach równoległych do osi Y *zachodzi*

$$\left|\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(z)\right| < c_5(\delta, K)\log^2(|y|+5) \tag{3.9}$$

oraz

$$c_5(\delta,K) = c_5\delta^{-53/30}(\nu+\log|\Delta|)^2, \tag{3.10}$$

c_5 *jest stałą numeryczną.*

4. Oznaczmy przez $c_6, c_7, \ldots$ stałe dające się efektywnie wyznaczyć. Dla prostoty dowodu wprowadzamy następujące oznaczenia:

Obieramy $T > 10^3$

$$A_0 = \log\log T, \tag{4.1}$$

$$B_0 = (\log\log T)^{-1}. \tag{4.2}$$

Oznaczmy dalej

$$m = (A_0-B_0)^{-1}\log\left(T\exp\left(-\frac{\log T\log\log\log T}{(\log\log T)^2}\right)\right), \tag{4.3}$$

$$L_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\log T\log\log\log T}{(\log\log T)^3}; \tag{4.4}$$

wówczas dla $T > c_6$

$$m > L_0. \tag{4.5}$$

O liczbie całkowitej k zakładamy na razie tylko tyle, że

$$m \leqslant k \leqslant (A_0+B_0)^{-1}\log T. \tag{4.6}$$

Dla $T > c_7$ mamy

$$m+L_0 \leqslant (A_0+B_0)^{-1}\log T. \tag{4.7}$$

5. Bierzemy pod uwagę całkę

$$(5.1)\qquad I_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty}\left(e^{A_0 w}\frac{e^{B_0 w}-e^{-B_0 w}}{2B_0 w}\right)^k F(w)\,dw,$$

gdzie

$$(5.2)\qquad F(w) = -\left(\zeta(w)+\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(w)\right);$$

$\zeta(w)$ jest funkcją ζ Riemanna, a $\zeta_K(w)$ jest funkcją ζ Dedekinda.

Dla $\sigma > 1$ wobec (3.1) mamy

$$(5.3)\qquad F(w) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{G(n)-1}{n^w}.$$

Jeżeli podstawimy (5.3) do (5.1), to dla $\sigma > 1$

$$(5.4)\qquad I_k = \sum_n \big(G(n)-1\big)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty}\left(e^{A_0 w}\frac{e^{B_0 w}-e^{-B_0 w}}{2B_0 w}\right)^k\frac{dw}{n^w}.$$

Ostatnią całkę napiszmy w postaci

$$(2B_0)^{-k}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty}w^{-k}\left(\frac{e^{A_0 k+B_0(2j-k)}}{n}\right)^w dw$$

i zastosujmy znaną formułę:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{2-i\infty}^{2+i\infty}w^{-k}r^w\,dw = \begin{cases}\dfrac{1}{(k-1)!}\log^{k-1}r, & r\geqslant 1,\\ 0, & 0<r<1.\end{cases}$$

Otrzymamy wówczas

$$(5.5)\qquad I_k = (2B_0)^{-k}\frac{1}{(k-1)!}\sum_n\big(G(n)-1\big)H(n),$$

$$e^{(A_0-B_0)k}\leqslant n\leqslant e^{(A_0+B_0)k}.$$

$$(5.6)\qquad H(n) = \sum_j(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\big(2B_0 j+(A_0-B_0)k-\log n\big)^{k-1},$$

$$\frac{1}{2B_0}\big(\log n+(B_0-A_0)k\big)\leqslant j\leqslant k.$$

Sumując częściowo, otrzymujemy:

(5.7) $$|I_k| \leqslant \exp(2k+4\log k)\max_x |\Delta(x)|, \qquad e^{(A_0-B_0)k} \leqslant x \leqslant e^{(A_0+B_0)k}.$$

Dla $T > c_8$ wobec (4.1), (4.2) i (4.6) mamy wówczas,

(5.8) $$|I_k| \leqslant \exp\left(3\frac{\log T}{\log\log T}\right) \max_{T^{1-\delta(T)} \leqslant x \leqslant T} |\Delta(x)|,$$

gdzie $\delta(T)$ jak w (2.5).

Aby uzyskać oszacowanie I_k z dołu, korzystamy z twierdzenia Cauchy'ego.

Oznaczmy przez (L) łamaną z lematu (f) i obierzmy

(5.9) $$\delta = (2\cdot 10^3)^{-10}.$$

Mamy wówczas

(5.10) $$I_k = -\sum_{\varrho}\left(e^{A_0\varrho}\frac{e^{B_0\varrho}-e^{-B_0\varrho}}{2B_0\varrho}\right)^k - \\ -\frac{1}{2\pi i}\int_{(L)}\left(e^{A_0 w}\frac{e^{B_0 w}-e^{-B_0 w}}{2B_0 w}\right)^k\left(\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(w)+\zeta(w)\right)dw,$$

gdzie ϱ oznacza zera funkcji $\zeta_K(s)$ leżące po lewej stronie łamanej.

Jeżeli oznaczymy przez D ostatnią całkę, to

(5.11) $$D = \int_{(L')} + \int_{(L'')}$$

i $\int_{(L')}$ oznacza całkę po odcinkach prostopadłych łamanej, a $\int_{(L'')}$ — całkę po odcinkach poziomych łamanej.

Z lematu (f) i znanego oszacowania dla funkcji ζ Riemanna, mamy

(5.12) $$\left|\int_{(L')}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{2}{(2B_0)^k} e^{2\delta^{1/10}(A_0+B_0)k}\int_{-\infty}^{+\infty}(\delta^{2/10}+t^2)^{-k/2}\times \\ \times\left(c_9\{1+(|t|+2)^{\frac{1}{2}(1-\delta^{1/10})}\}\log(|t|+2)+\left((1-2\delta^{1/10})^2+t^2\right)^{-1/2}+ \\ +c_5\delta^{-53/30}(\nu+\log|\Delta|)^2\log^2(|t|+5)\right)dt.$$

Dla drugiej całki

(5.13) $$\left|\int_{(L'')}\right| \leqslant \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty}\int_{\delta^{1/10}}^{2\delta^{1/10}} 2(2B_0)^{-k}\exp\left(k(A_0+B_0)\sigma\right)\frac{1}{(\sigma^2+j^2)^{k/2}}\times \\ \times\left(c_9\left(1+(|j|+2)^{\frac{1}{2}(1-\sigma)}\right)\log(|j|+2)+\left((1+\sigma)^2+j^2\right)^{-1/2}+ \\ +c_4\delta^{-5/3}(\nu+\log|\Delta|)^2\log(|j|+6)\right)d\sigma.$$

Z (5.12), (5.13) wobec (4.1), (4.2), (4.6) i (5.9), mamy dla $T > c_{10}$

$$|D| \leqslant c_{11}(\nu+\log|\Delta|)^2 T^{2\delta^{1/10}+\frac{\log T \log\log\log T}{\log\log T}}. \tag{5.14}$$

W dalszym ciągu obieramy

$$l = \frac{\log T}{(\log\log T)^4}. \tag{5.15}$$

Sumę w (5.10) dzielimy na dwie sumy

$$\sum_{\varrho=\beta+\gamma i} = \sum_{\substack{\varrho=\beta+\gamma i\\ |\gamma|<T_l}}' + \sum_{\substack{\varrho=\beta+\gamma i\\ |\gamma|\geqslant T_l}}''. \tag{5.16}$$

Dla drugiej sumy zachodzi wobec (4.7), (4.6) i (3.3) dla $T > c_{11}$ następujące oszacowanie

$$\Big|\sum_{\substack{\varrho=\beta+\gamma i\\ |\gamma|\geqslant T_l}}''\Big| \leqslant c_{12}(\nu+\log|\Delta|)\frac{e^{(A_0+B_0)k}}{B_0^k([l]-1)^{k-2}(k-2)} \leqslant (\nu+\log|\Delta|)T^{0,03}. \tag{5.17}$$

Pierwszą sumę szacujemy opierając się na następującym twierdzeniu Turána ([6], tw. X, [2]):

Jeżeli $|z_1| \geqslant |z_2| \geqslant \ldots \geqslant |z_n|$ *oznaczają dowolne liczby zespolone,* $m > 0$ *i* $n \leqslant L_0$, *to istnieje taka liczba całkowita* μ, *że*

$$m \leqslant \mu \leqslant m+L_0$$

i

$$|z_1^\mu + z_2^\mu + \ldots + z_n^\mu| \geqslant \left(\frac{L_0}{23(m+L_0)}\right)^{L_0}|z_1|^\mu. \tag{5.18}$$

Jako k obieramy μ z twierdzenia (5.18) i m obieramy tak jak w (4.3).

Aby warunek (4.6) na k był spełniony, należy wykazać, że liczba składników pierwszej sumy jest mniejsza od L_0. Liczba ta wobec (3.5) jest

$$2N(T_l) \leqslant 2c_3\delta^{-5/6}(\nu+\log|\Delta|)(T_l+1)\log(T_l+3);$$

ale wobec (5.15) mamy

$$2N(T_l) \leqslant c_{13}(\nu+\log|\Delta|)\frac{\log T}{(\log\log T)^3}, \tag{5.19}$$

i dla $T > \max\big(c_{14}, \exp\exp\exp(\nu+\log|\Delta|)\big)$ rzeczywiście liczba ta jest mniejsza od L_0.

Na podstawie twierdzenia Turána można tak obrać k, że

$$\left|\sum_{\substack{\varrho=\beta+\gamma i\\ |\gamma|<T_l}}{}'\right| \geqslant \left(\frac{L_0}{23(m+L_0)}\right)^{L_0} |z_1|^k. \tag{5.20}$$

Wobec (2.1) i (5.15) mamy $|\varrho_0| < T_l$.

Dla z_1 w (5.18) zachodzi

$$|z_1|^k \geqslant \exp(kA_0\beta_0)\left|\frac{e^{B_0\varrho_0}-e^{-B_0\varrho_0}}{2B_0\varrho_0}\right|^k. \tag{5.21}$$

Z (2.1) i (4.5) wnioskujemy, że $|B_0\varrho_0| < \frac{1}{2}$.

Stąd

$$|z_1|^k \geqslant \exp(kA_0\beta_0)\left(1-\frac{|B_0\varrho_0|^2}{3}\right)^k \geqslant \tag{5.22}$$

$$\geqslant T^{\beta_0}\exp\left[-\left(\frac{\log T\log\log\log T}{(\log\log T)^2}+\frac{\log T}{\log\log T}\right)\right].$$

Wobec (4.3) i (4.4) dla $T > c_{16}$ mamy ostatecznie

$$\left(\frac{L_0}{23(m+L_0)}\right)^{L_0} \geqslant \exp\left(-2\frac{\log T(\log\log\log T)^2}{(\log\log T)^3}\right); \tag{5.23}$$

z (5.10) i (5.16) mamy dalej

$$|I_k| \geqslant \left|\sum_{|\gamma|<T_l}{}'\right| - \left(\left|\sum_{|\gamma|\geqslant T_l}{}''\right| + |D|\right). \tag{5.24}$$

Wobec (5.8), (5.17), (5.14), (5.20), (5.23) dla T spełniających warunek (2.1) zachodzi nierówność

$$T^{\beta_0}\exp\left\{-\left(\frac{\log T\log\log\log T}{(\log\log T)^2}+\frac{\log T}{\log\log T}\right)\right\}\exp\left\{-2\frac{\log T(\log\log\log T)^2}{(\log\log T)^3}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{3\frac{\log T}{\log\log T}\right\}\max_{T^{1-\delta(T)}\leqslant x\leqslant T}|\Delta(x)| + (\nu+\log|\Delta|)T^{0,03} +$$

$$+c_{11}(\nu+\log|\Delta|)^2 T^{2^{\delta_1/10}+\frac{\log T\log\log\log T}{\log\log T}}.$$

Z powyższych nierówności wynika łatwo twierdzenie (2.4).

Prace cytowane

[1] E. Landau, *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale*, Leipzig und Berlin 1927.

[2] V. T. Sós and P. Turán, *On some new theorems in the theory of diophantine approximation*, Acta Math. Hung. 6 (1955), str. 241-257.

[3] W. Staś, *Über eine Anwendung der Methode von Turán, auf die Theorie des Restgliedes in Primidealsatz*, Acta Arithm. 5 (1959), str. 179-195.

[4] — *Über eine Abschätzung des Restgliedes im Primzahlsatz*, Acta Arithm. 5 (1959), str. 427-434.

[5] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, Oxford 1951.

[6] P. Turán, *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen*, Budapest 1953.

В. Стась (Познань)

О НЕКОТОРОЙ ОЦЕНКЕ ОСТАТКА В ТЕОРЕМЕ

РЕЗЮМЕ

Пусть K — произвольное алгебраическое тело степени ν, Δ — дискриминант тела, $\zeta_K(s)$ — функция Дедекинда определённая на теле K, $G(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, коэффициенты разложения функции $\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s)$ в ряд Дирихле. Доказываю следующую теорему.

Если $\zeta_K(\varrho_0) = 0$, $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma$ $(\frac{1}{2} \leqslant \beta_0 \leqslant 1)$, *то*

$$\max_x \Big|\sum_{n\leqslant x} G(n) - x\Big| > T^{\beta_0}\exp\{-4\log T/\log\log T\}, \qquad T^{1-\delta(T)} \leqslant x \leqslant T,$$

для $T > \max(c, c_K, c_{\varrho_0})$.

Постоянные c, c_K, c_{ϱ_0} определяю в работе *explicite*.

Вышеприведённое утверждение является усилением, в смысле локализации максимум, одной теорему автора [3].

W. Staś (Poznań)

ON A CERTAIN ESTIMATION OF THE REMAINDER IN A THEOREM

SUMMARY

Let K denote an arbitrary algebraic field of degree ν, Δ the exponent of the field, $\zeta_K(s)$ a Dedekind function defined on the field K, $G(n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, the coefficients of the expansion of the function $\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s)$ in a Dirichlet series. I prove the following theorem:

If $\zeta_K(\varrho_0) = 0$, $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ $(\frac{1}{2} \leqslant \beta_0 \leqslant 1)$, *then*

$$\max_{T^{1-\delta(T)} \leqslant x \leqslant T} \Big|\sum_{n\leqslant x} G(n) - x\Big| > T^{\beta_0}\exp\{-4\log T/\log\log T\}$$

for $T > \max(c, c_K, c_{\varrho_0})$.

The constants c, c_K, c_{ϱ_0} are determined *explicite* in the paper.

The above theorem is a strengthening, in the sense of localization of the maximum, of my theorem [3].
