ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
SERIA I: PRACE MATEMATYCZNE V (1961)

M. WOJTAS (Wrocław)

O pewnej własności wyznaczników symetrycznych typu przekątniowego

W pracy niniejszej zajmuję się wyznacznikami

(1) $$A_m(a_1, \ldots, a_m) = |a_{ij}|_1^m, \quad \text{gdzie} \quad a_{ij} = a_{|i-j|+1},$$

mającymi zastosowania w teorii funkcji analitycznych o części rzeczywistej dodatniej i współczynnikach rzeczywistych w rozwinięciu na szereg Maclaurina w kole jednostkowym ([1]).

TWIERDZENIE. *Wyróżnik W trójmianu kwadratowego $A_m(a_1, \ldots, a_m)$ względem a_m jest równy*

$$-4A_{m-1}^2(a_1, \ldots, a_{m-1}).$$

Dowód. Korzystając z metody podanej przez Muira ([2]) mogę przedstawić $A_m(a_1, \ldots, a_m)$ w postaci

(2) $$A_m(a_1, \ldots, a_m) = |p_{ij}|_1^{n+1} \cdot |q_{ij}|_1^n, \quad \text{gdy} \quad m = 2n+1,$$

przy czym

$$p_{ij} = \begin{cases} a_{|i-j|+1} + a_{2n+3-i-j} & \text{dla} \quad j \neq n+1, \\ a_{|i-j|+1} & \text{dla} \quad j = n+1, \end{cases}$$

$$q_{ij} = a_{|i-j|+1} - a_{i+j+1},$$

oraz

(3) $$A_m(a_1, \ldots, a_m) = |r_{ij}|_1^n \cdot |s_{ij}|_1^n, \quad \text{gdy} \quad m = 2n,$$

przy czym

$$r_{ij} = a_{|i-j|+1} + a_{2n+2-i-j},$$

$$s_{ij} = a_{|i-j|+1} - a_{i+j}.$$

Istotnie, jeżeli w wyznaczniku (1), gdzie $m = 2n+1$, dodam kolumnę $(2n+1)$-szą do pierwszej, $2n$-tą do drugiej, ..., w końcu $(n+2)$-gą do n-tej i w wyznaczniku otrzymanym w ten sposób odejmę wiersz pierwszy od $(2n+1)$-ego, drugi od $2n$-tego, ..., w końcu $(2n+2)$-gi od n-tego, otrzymam, na podstawie uogólnionego twierdzenia Laplace'a, wzór (2).

Analogicznie otrzymuję (3) w przypadku $m = 2n$.

$A_m(a_1, \ldots, a_m)$ jest trójmianem kwadratowym względem a_m. Z powyższego widać, że $A_m(a_1, \ldots, a_m)$ da się przedstawić w postaci $A_m(a_1, \ldots, a_m) = (Aa_m+B)(Ca_m+D)$, gdzie A, B, C, D są wielomianami współczynników $a_1, \ldots, a_{m-1}$.

Obliczę wyróżnik W trójmianu

$$A_m(a_1, \ldots, a_m) = (Aa_m+B)(Ca_m+D) = \\ = ACa_m^2+(AD+BC)a_m+BD,$$

tzn.

$$W = -(AD+BC)^2+4ACBD = -(AD-BC)^2.$$

Wyznaczę teraz A, B, C, D. Rozważę osobno dwa przypadki 1° $m = 2n+1$, 2° $m = 2n$.

1° A jest podwyznacznikiem elementu (a_1+a_{2n+1}) w pierwszym z wyznaczników wzoru (2), C jest podwyznacznikiem elementu (a_1-a_{2n+1}) w drugim z nich. B otrzymam przyjmując $a_{2n+1} = 0$ w pierwszym, D przyjmując $a_{2n+1} = 0$ w drugim z wyznaczników wzoru (2).

Macierze wyznaczników A, B, C, D oznaczam odpowiednio przez $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$.

Biorę iloczyn

$$AD = \left|\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{P} \\ \hline 0 & \boldsymbol{D} \end{array}\right|,$$

gdzie $\boldsymbol{P} = (a_{ij})_1^n$, $a_{ij} = a_{n+1-i+j}$.

W wyznaczniku tym odejmuję kolumnę $(2n-1)$-szą od pierwszej, $(2n-2)$-gą od drugiej, ..., w końcu $(n+1)$-szą od $(n-1)$-szej. Kolumnę n-tą pozostawiam bez zmiany. Następnie dodaję wiersz pierwszy do $(2n-1)$-ego, drugi do $(2n-2)$-ego, ..., w końcu $(n-1)$-szy do $(n+1)$-ego. Wiersz n-ty pozostawiam bez zmiany.

Iloczyn AD jest teraz wyznacznikiem, którego $2n$-ty wiersz jest równy

$$a_{2n}-a_2 \quad a_{2n-1}-a_3 \quad \ldots \quad a_2-a_{2n} \quad a_1,$$

a pozostałe są identyczne z wierszami wyznacznika $A_{2n}(a_1, \ldots, a_{2n})$. AD można więc przedstawić jako różnicę wyznaczników, z których pierwszy jest równy $A_{2n}(a_1, \ldots, a_{2n})$, a drugi różni się od $A_{2n}(a_1, \ldots, a_{2n})$ tylko ostatnim wierszem, który jest tu równy

$$a_2 \ a_3 \ \ldots \ a_{2n} \ 0.$$

Oznaczam ostatni wyznacznik przez A'_{2n}. Zatem

$$AD = A_{2n}-A'_{2n}.$$

Biorę iloczyn

$$-BC = \left|\begin{array}{c|c} \mathbf{B} & \mathbf{Q} \\ \hline 0 & \mathbf{C} \end{array}\right|,$$

gdzie $\mathbf{Q}$ jest macierzą prostokątną wymiaru $(n+1)\times(n-1)$, $\mathbf{Q} = (a_{ij})$, $a_{ij} = a_{n+2-i+j}$.

W wyznaczniku tym odejmuję kolumnę $2n$-tą od drugiej, $(2n-1)$-szą od trzeciej, ..., w końcu $(n+2)$-gą od n-tej. Kolumny pierwszą i $(n+1)$-szą pozostawiam bez zmiany. Następnie dodaję wiersz drugi od $2n$-tego, trzeci do $(2n-1)$-ego, ..., w końcu n-ty do $(n+2)$-ego.

Iloczyn $-BC$ jest teraz wyznacznikiem, którego pierwsza kolumna jest równa

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2+a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{2n}+a_2 \end{bmatrix},$$

a pozostałe są identyczne z odpowiednimi kolumnami wyznacznika $A_{2n}(a_1, \dots, a_{2n})$.

$-BC$ można więc przedstawić jako sumę wyznaczników, z których pierwszy jest równy $A_{2n}(a_1, \dots, a_{2n})$, a drugi, jak łatwo zauważyć, A'_{2n}.

Zatem

$$-BC = A_{2n}+A'_{2n},$$

a stąd

$$W = -(AD-BC)^2 = -[(A_{2n}-A'_{2n})+(A_{2n}+A'_{2n})]^2 = -4A^2_{2n},$$

co kończy dowód dla $m = 2n+1$.

2° Podobnie jak dla $m = 2n+1$ wyznaczam A, B, C, D. Macierze wyznaczników A, B, C, D oznaczam odpowiednio przez $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$.

Biorę iloczyn

$$AD = \left|\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{P} \\ \hline 0 & \mathbf{D} \end{array}\right|,$$

gdzie $\mathbf{P}$ jest macierzą prostokątną wymiaru $(n-1)\times n$, $\mathbf{P} = (a_{ij})$, $a_{ij} = a_{n-i+j}$.

W wyznaczniku tym odejmuję kolumnę $(2n-2)$-gą od pierwszej, $(2n-3)$-cią od drugiej, ..., w końcu n-tą od $(n-1)$-ej. Następnie dodaję wiersz pierwszy do $(2n-2)$-ego, drugi do $(2n-3)$-ego, ..., w końcu $(n-1)$-szy do n-tego.

Iloczyn AD jest teraz wyznacznikiem, którego wiersz $(2n-1)$-szy jest równy

$$a_{2n-1}-a_2 \quad a_{2n-2}-a_3 \quad \dots \quad a_2-a_{2n} \quad a_1,$$

a pozostałe są identyczne z wierszami wyznacznika $A_{2n-1}(a_1, \dots, a_{2n-1})$.

AD można więc przedstawić jako różnicę wyznaczników, z których pi-szy jest równy $A_{2n-1}(a_1, \ldots, a_{2n-1})$, a drugi różni się od $A_{2n-1}(a_1, \ldots, a_{2}$ tylko ostatnim wierszem, który jest tu równy

$$a_2 \; a_3 \; \ldots \; a_{2n-1} \; 0 .$$

Oznaczam drugi wyznacznik przez A'_{2n-1}. Mam więc $AD = A_{2n-1} - A'_{2n-1}$.

Biorę iloczyn

$$-BC = \left| \begin{array}{c|c} B & Q \\ \hline 0 & C \end{array} \right| ,$$

gdzie Q jest macierzą prostokątną wymiaru $n \times (n-1)$, $Q = (a_{ij})$, $a_{ij} = a_{n+1-i+j}$.

W wyznaczniku tym odejmuję kolumnę $(2n-1)$-szą od drugiej, $(2n-2)$-gą od trzeciej, ..., w końcu $(n+1)$-szą od n-tej. Następnie dodaję wiersz drugi do $(2n-1)$-ego, trzeci do $(2n-2)$-ego, ..., w końcu n-ty do $(n+1)$-ego. Iloczyn $-BC$ jest teraz wyznacznikiem, którego pierwsza kolumna jest równa

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 + a_{2n-1} \\ \vdots \\ a_{2n-1} + a_2 \end{bmatrix} ,$$

a pozostałe są identyczne z odpowiednimi kolumnami wyznacznika $A_{2n-1}(a_1, \ldots, a_{2n-1})$.

$-BC$ można więc przedstawić jako sumę wyznaczników, z których pierwszy jest równy $A_{2n-1}(a_1, \ldots, a_{2n-1})$, a drugi, jak łatwo zauważyć, A'_{2n-1}. Więc

$$-BC = A_{2n-1} + A'_{2n-1} .$$

W końcu

$$W = -(AD - BC)^2 = -[(A_{2n-1} - A'_{2n-1}) + (A_{2n-1} + A'_{2n-1})]^2 = \\ = -4A^2_{2n-1} \qquad \text{c. b. d. o.}$$ [1]

Z powyższego oraz z twierdzenia Caratheodory'ego ([1]) wynika bezpośrednio następujący

WNIOSEK. *Niech liczby rzeczywiste $c_1, c_2, \ldots, c_p$ spełniają nierówności*

$$A_{n+1}(2, c_1, c_2, \ldots, c_n) > 0 \quad dla \quad n = 1, 2, \ldots, p .$$

Istnieje wtedy funkcja analityczna $f(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$, $|z| < 1$, o współczynnikach $a_1, a_2, \ldots$ rzeczywistych i części rzeczywistej dodatniej wewnątrz tego koła i taka, że $a_n = c_n$ dla $n = 1, 2, \ldots, p$.

Dowód. Wystarczy wykazać, że istnieje ciąg liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots$, przy czym $a_n = c_n$ dla $n = 1, 2, \ldots, p$, który spełnia nierówności

$$A_{n+1}(2, a_1, a_2, \ldots, a_n) > 0 \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

Z założenia p liczb spełnia warunek (4). Przypuszczam, że wyznaczyłem już m liczb ($m \geqslant p$) spełniających warunek dla $n = 1, 2, \ldots, m$. Pokażę, że można dobrać liczbę a_{m+1} spełniającą wraz z liczbami $a_1, \ldots, a_m$ warunki (4) dla $n = 1, 2, \ldots, (m+1)$.

Mamy

$$A_{m+2}(2, a_1, \ldots, a_m, x) \equiv a(x - x_1)(x - x_2).$$

Łatwo zauważyć, że $a = -A_m(2, a_1, \ldots, a_{m-1}) < 0$. Ponieważ $W = -4A_{m+1}^2 \neq 0$, więc $x_1 \neq x_2$. Przyjmując $a_{m+1} = \frac{x_1 + x_2}{2}$, otrzymam $A_{m+2}(2, a_1, \ldots, a_{m+1}) > 0$.

Prace cytowane

[1] C. Carathéodory, Rendiconti del Circolo di Matematico di Palermo 32 (1911), str. 193-217.

[2] T. Muir, Quart. Jour. of Math. 18 (1881), str. 166-177.

М. Войтас (Вроцлав)

О НЕКОТОРОМ СВОЙСТВЕ СИММЕТРИЧНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ДИАГОНАЛЬНОГО ТИПА

РЕЗЮМЕ

Обозначим

$$A_m(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_m \\ a_2 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{m-1} \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & a_{m-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \ldots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Целью статьи является доказательство следующего утверждения: *дискриминант W квадратного трёхчлена $A_m(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ относительно a_m равен*

$$-4A_{m-1}^2(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}).$$

Определители $A_m(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ находят применение в теории аналитических функций.

M. WOJTAS (Wrocław)

ON A CERTAIN PROPERTY OF SYMMETRIC DETERMINANTS

SUMMARY

Write

$$A_m(a_1, a_2, \ldots, a_m) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_m \\ a_2 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{m-1} \\ a_3 & a_2 & a_1 & \ldots & a_{m-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \ldots & a_1 \end{vmatrix}.$$

The object of the paper is the proof of the following theorem: *The discriminant W of the trinomial of the second degree $A_m(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ with respect to a_m is equal to*

$$-4A_{m-1}(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}).$$

The determinants $A_m(a_1, \ldots, a_m)$ are applicable in the theory of analytic functions.