



R. HAMPEL (Warszawa)

## O zagadnieniu Catalana

**1. Uwagi wstępne.** W matematyce od przeszło wieku nazywa się *twierdzeniem Catalana* następujące przypuszczenie:

Równanie diofantyczne

$$(1) \quad x^z - y^t = 1 \quad (x, y, z, t - \text{liczby naturalne} \geq 2)$$

nie ma innych rozwiązań w liczbach naturalnych prócz rozwiązania trywialnego  $x = 3, y = 2, z = 2, t = 3$ , tzn.  $3^2 - 2^3 = 1$ .

Zagadnienie to, znane i nie rozwiązane od stuleci, sformułował ogólnie po raz pierwszy w 1842 r. Eugène Charles Catalan (1814-1894) [8], matematyk belgijski pochodzenia francuskiego.

Dotychczas rozwiązano tylko szczególne przypadki.

Jeszcze w późnym średniowieczu Żyd hiszpański Levi ben Gerson, zwany Leo Hebraeus (1288-1344), dowiódł [3], że równanie

$$3^n \pm 1 = 2^m$$

przy  $n > 2$  nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych. Matematyk francuski Frenicle de Bessy (1605-1675) [1] dowiódł w swej łacińskiej pracy z 1657 r. (odnalezionej po raz pierwszy dopiero w 1921 r. w Paryżu, Clermont-Ferrand i na koniec w Berlinie), że równanie

$$p^n + 1 = x^2$$

nie ma rozwiązań, gdy  $n \geq 2$ , a liczba  $p \geq 3$  jest liczbą pierwszą. Twierdzenia tego dowiódł on również w przypadku  $p = 2, n \geq 4$ . Wynik ten stanowił rozwiązanie jednego z problemów teorii liczb, które postawił Francuz (z zawodu prawnik) Pierre Fermat (1601-1665).

Wielki matematyk szwajcarski Leonard Euler (1707-1783) dowiódł [4], że równanie  $x^3 + 1 = y^2$  ( $x > 2$ ) nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.

V. A. Lebesgue (1791-1875) [9] dowiódł w 1850 r. niemożliwości równania  $x^2 + 1 = y^n; n \geq 2$ .

C. G. Gerono w 1870 r. udało się dowieść częściowo hipotezy Catalana w przypadku, gdy liczby  $x$  lub  $y$  są pierwsze [5]. Matematyk szwedzki Trygve Nagell (ur. w 1895 r.) wykazał [12], że równanie  $x^3 \pm 1 = y^n$  nie ma rozwiązań, gdy  $x \geq 2$ ;  $n > 2$ . T. Nagell podał również inne przypadki szczególne [11].

Cenne wyniki otrzymał współczesny matematyk węgierski Richard Oblath (ur. w 1882 r.), który opierając się na wynikach innych matematyków, między innymi matematyka polskiego Salomona Lubelskiego (zginął w 1941 r.), dowiódł niemożliwości równania  $x^2 - 1 = y^p$  w przypadku, gdy  $p$  jest liczbą pierwszą spełniającą jedną z niżej podanych kongruencyj [13]:

$$(a) \quad 2^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2},$$

$$(b) \quad 3^{p-1} \not\equiv 1 \pmod{p^2},$$

ponadto

(c) dla wszelkich  $p \leq 25000$  (z wyjątkiem rozwiązań trywialnych  $x, y = 0, -1; 1, 0; 3, 2, p = 3$ ).

We wszystkich pozostałych przypadkach, opierając się na twierdzeniu C. Siegela, dowodzi R. Oblath, że równanie  $x^2 - 1 = y^p$  może mieć co najwyżej jedno rozwiązanie [14]. Ponadto R. Oblath [15] dowiódł, że równanie (1) jest niemożliwe, jeżeli jedna z liczb  $x$  lub  $y$  składa się wyłącznie z czynników pierwszych postaci  $2^{\alpha_i} + 1$  lub  $2^{\alpha_i} \cdot 3^{\beta_i} + 1$ .

Roman Hampel, Richard Oblath i Andrzej Schinzel [16], [18], [7] dowiedli niezależnie od siebie, że równanie (1) poza przypadkiem podanym wyżej jest niemożliwe, jeżeli  $|x - y| = 1$  [16].

W. J. Le Veque [21] wykazał w 1952 r., że równanie  $a^x - b^y = 1$  dla ustalonych naturalnych  $a$  i  $b$  ma najwyżej jedno całkowite rozwiązanie  $x, y$ ; wyjątek stanowi przypadek  $a = 3, b = 2$ , kiedy są dwa rozwiązania:

$$3 - 2 = 3^1 - 2^0 = 1.$$

Dowód dla parzystych  $a$  jest prosty, dla nieparzystych zaś znacznie trudniejszy. Jako wniosek otrzymano, że dla całkowitych  $s, r, t$  tożsamość

$$\sum_{k=1}^n k^s = \left( \sum_{k=1}^n k^t \right)^r$$

zachodzi jedynie w przypadku  $s = 3, t = 1, r = 2$ .

J. W. S. Cassels [2] dowiódł w 1953 r., że równanie nieoznaczone  $a^x - b^y = 1$  ma nie więcej niż jedno rozwiązanie. Rozwiązaniami mogą być tylko najmniejsze wykładniki spełniające kongruencję  $a^x \equiv 1 \pmod{B}$ ,  $b^y \equiv -1 \pmod{A}$ , gdzie  $A$  i  $B$  są odpowiednio iloczynami nieparzystych dzielników pierwszych liczb  $a$  i  $b$ .

Twierdzenie to ma dwa wyjątki:

1) jeżeli  $a = 2^k - 1$ , to istnieje rozwiązanie  $x = 2$ ,  $y = 1$ , chociaż  $a \equiv 1 \pmod{B}$ ;

2) równanie  $3^x - 2^y = 1$  ma dwa rozwiązania:  $x = 1$ ,  $y = 1$  oraz  $x = 2$ ,  $y = 3$ .

Dowodzi się również, że jeżeli  $(x, y) = 1$ , to  $y \equiv 1 \pmod{2}$ , gdy  $x > 1$  oraz że równanie  $2^x - b^y = 1$  nie ma rozwiązań, dla których  $x > 1$ ,  $y > 1$ .

A. P. Łursmanaszwili [10] wykazał w 1957 r., że równanie  $x^m - y^n = 1$  dla  $y \equiv 1 \pmod{2}$ ,  $y \leq 99$ , nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych  $x, y, m, n > 1$ .

Niżej zajmę się dalszymi przypadkami niemożliwości rozwiązania równania (1).

**2.  $x$  lub  $y$  jest postaci  $10^r$ .** A. Załóżmy, że

$$y = 10^r \quad (r \geq 1).$$

Wtedy

$$(2) \quad x^z - 1 = (x-1) \sum_{k=0}^{z-1} x^k = 10^{rt}, \quad x \equiv 1 \pmod{2}.$$

Udowodnię, że musi być  $z \equiv 1 \pmod{2}$ , tzn.  $z \geq 3$ .

Istotnie, w przeciwnym przypadku mielibyśmy

$$x^z - 1 = (x-1)(x+1) \sum_{i=0}^{\frac{z}{2}-1} x^{2i} = 10^{rt},$$

$$(3) \quad x - 1 = 2^\alpha \cdot 5^\beta \quad (\alpha \geq 1; \beta \geq 0),$$

$$(4) \quad x + 1 = 2^\alpha \cdot 5^\beta + 2 = 2(1 + 2^{\alpha-1} \cdot 5^\beta) \quad (\alpha \neq 0, \text{ gdyż } x \equiv 1 \pmod{2}).$$

Równość (4) jest niemożliwa w żadnym przypadku; a mianowicie: jeżeli  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ , wtedy  $x = 3$  i przypadek jest niemożliwy [5]; jeżeli  $\alpha > 1$ ,  $\beta = 0$ , to  $x + 1 = 2(1 + 2^{\alpha-1})$ , co jest również niemożliwe, gdyż  $1 + 2^{\alpha-1}$  nie może być potęgą samych piątek [19];

jeżeli  $\alpha = 1$ ,  $\beta \geq 1$ , to w skład  $x + 1 = 2(1 + 5^\beta)$  wchodzi czynniki  $\neq 2$  i  $5$ ;

wreszcie jeżeli  $\alpha \geq 2$ ,  $\beta \geq 1$ , to  $1 + 2^{\alpha-1} \cdot 5^\beta \equiv 1 \pmod{2}$  i  $\pmod{5}$ , skąd sprzeczność.

Mamy zatem  $z \equiv 1 \pmod{2}$ , wobec tego

$$\sum_{k=0}^{z-1} x^k \equiv 1 \pmod{2}, \quad \text{gdyż } x \equiv 1 \pmod{2}.$$

Ze wzoru (2) i (3) wynika, że  $a = rt$ , więc

$$(5) \quad x-1 = 2^{rt} \cdot 5^\beta,$$

tzn.

$$(6) \quad (2^{rt} \cdot 5^\beta + 1)^z - 1 = 2^{rt} \cdot 5^{rt}, \quad 0 \leq \beta < rt; \quad z \geq 3.$$

Równość (6) jest niemożliwa; istotnie, jeżeli  $z = 3$ ,  $\beta = 0$ , to

$$(7) \quad (2^{rt} + 1)^3 - 1 = 2^{rt} \cdot 5^{rt}$$

lub, po podzieleniu obu stron (7) przez  $2^{rt}$ ,

$$(8) \quad 2^{2rt} + 3 \cdot 2^{rt} + 3 = 5^{rt}; \quad r \geq 1; \quad t \geq 2.$$

Równość (8) jest niemożliwa, gdyż

$$(9) \quad 2^{2rt} + 3 \cdot 2^{rt} + 3 \equiv \begin{cases} 2 \\ 3 \pmod{5} \\ 1 \end{cases}, \quad \text{jeżeli} \quad r \cdot t \equiv \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \text{ lub } 3 \end{cases} \pmod{4};$$

jeżeli

$$z = 3, \quad 1 \leq \beta \leq rt - 1,$$

to lewa strona równości (6) (po podzieleniu przez  $5^\beta$ )  $\not\equiv 0 \pmod{5}$ , podczas gdy prawa strona  $= 2^{rt} \cdot 5^{rt-\beta} \equiv 0 \pmod{5}$ , skąd sprzeczność.

Jeżeli wreszcie  $z \geq 5$ ;  $\beta \geq 0$ , to równość (6) jest również niemożliwa, gdyż

$$x^z - 1 = (2^{rt} \cdot 5^\beta + 1)^z - 1 > (2^{rt} \cdot 5^\beta)^z \geq 2^{rtz} \geq (2^5)^{rt} > 10^{rt}.$$

B. Niech  $x = 10^r$ . Wtedy równanie (1) przyjmie postać

$$y^t = 10^{rz} - 1 = 9 \cdot \sum_{k=0}^{rz-1} 10^k; \quad r \geq 1; \quad rz \geq 2.$$

Innymi słowy, wystarczy wykazać, że z banalnym wyjątkiem  $3^2 = 9$  żadna potęga ( $> 1$ ) liczby naturalnej nie może składać się z samych dziewiątek. Dowód pomijam, gdyż został podany w 1956 r. przez R. Oblatha; por. [17] i [20].

**3.  $x$  lub  $y$  jest postaci  $2^r \cdot 3^s$  ( $r, s$ , liczby naturalne).** A. Niech  $y = 2^r \cdot 3^s$ ,

$$(10) \quad x^z - 1 = (x-1) \cdot \sum_{k=0}^{z-1} x^k = 2^{rt} \cdot 3^{st}; \quad rt \geq 2; \quad st \geq 2.$$

Zatem  $x-1 = 2^a \cdot 3^\beta$ ;  $1 \leq a \leq r \cdot t$ ;  $0 \leq \beta \leq st$ ,  $x+1 = 2^a \cdot 3^\beta + 2$  (przypadek  $a = 0$  wykluczony, gdyż  $x \equiv 1 \pmod{2}$ ).

Jeżeli  $z \equiv 0 \pmod{2}$ , to równanie (10) możemy zapisać

$$x^z - 1 = (x-1)(x+1) \cdot \prod_{i=0}^{\frac{z}{2}-1} x^{2i} = 2^{rt} \cdot 3^{st},$$

czyli

$$(11) \quad 2^{\alpha+1} \cdot 3^\beta \cdot (2^{\alpha-1} \cdot 3^\beta + 1) \cdot \prod_{i=0}^{\frac{z}{2}-1} x^{2i} = 2^{rt} \cdot 3^{st}.$$

Równość (11) jest niemożliwa. Jeżeli bowiem  $\alpha = 1$ ;  $\beta = 0$ , to  $x = 3$  [5]; jeżeli zaś  $\alpha = \beta = 1$ , to  $x = 7$  [15]. We wszystkich pozostałych przypadkach czynnik

$$\frac{x+1}{2} = 2^{\alpha-1} \cdot 3^\beta + 1$$

albo sam jest liczbą pierwszą  $\neq 2$  i 3, albo posiada dzielniki pierwsze  $\neq 2$  i 3.

Załóżmy więc, że  $z \equiv 1 \pmod{2}$ . Załóżmy ponadto najpierw  $\beta = 0$ ; wtedy  $x = 2^\alpha + 1$ ,  $2 \leq \alpha \leq rt$ . (Łatwo wykazać, że  $\alpha = rt$ ).

Równość (10) jest niemożliwa, gdyż  $2^\alpha \equiv 1$  lub  $2 \pmod{3}$ .

Łatwo stwierdzić, że przy nieparzystym  $z$  obydwa przypuszczenia prowadzą do sprzeczności. Jeżeli bowiem  $2^\alpha \equiv 1 \pmod{3}$ , to  $x^z - 1 = (2^\alpha + 1)^z - 1 \equiv 1 \pmod{3}$ ; jeżeli  $2^\alpha \equiv 2 \pmod{3}$ , to  $x^z - 1 = (2^\alpha + 1)^z - 1 \equiv 2 \pmod{3}$ ; jeżeli zaś  $z \equiv 1 \pmod{2}$ ,  $\beta > 0$ , to we wzorze (10)  $\sum_{k=0}^{z-1} x^k \equiv 1 \pmod{2}$ ; musi więc być  $\sum_{k=0}^{z-1} x^k \equiv 0 \pmod{3}$ , ale  $\sum_{k=0}^{z-1} x^k \equiv z \pmod{3}$ , więc  $z \equiv 0 \pmod{3}$ , czyli  $z = 3u$ , tzn.

$$x^z - 1 = x^{3u} - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) \cdot \sum_{i=0}^{u-1} x^{3i}.$$

Więc  $x^2 + x + 1$ , jako liczba nieparzysta, musiałoby być iloczynem samych 3, co jest niemożliwe. Istotnie,

$$(12) \quad x^2 + x + 1 = 3(2^{2\alpha} \cdot 3^{2\beta-1} + 2^{\alpha+1} \cdot 3^{\beta-1} + 2^\alpha \cdot 3^{\beta-1} + 1) \equiv 3 \pmod{9}$$

i wyrażenie w nawiasie z prawej strony (12)  $\equiv 3 \pmod{9}$  również w przypadku  $\beta = 1$ .

B. Załóżmy, że  $x = 2^r \cdot 3^s$ . Wtedy równanie (1) przyjmie postać

$$2^{rz} \cdot 3^{sz} = y^t + 1; \quad r \geq 1, s \geq 1, z \geq 2; t \geq 2$$

(przypadek, gdy  $r$  lub  $s = 0$  patrz [19] ewentualnie [9]).

Liczba  $y$  musi być nieparzysta, ponadto  $y^t + 1 \equiv 0 \pmod{4}$ , skąd wynika, że  $y = 12n + 11$ , a  $t = 6m + 3$ ,  $n, m = 1, 2, 3, \dots$  ( $n = 0$  patrz [5],  $m = 0$  patrz [12]).

Istotnie, mamy:

$$\begin{aligned} (12n+1)^t + 1 &\equiv 2 \pmod{3}, & (12n+3)^t + 1 &\equiv 1 \pmod{3}, \\ (12n+5)^t + 1 &\equiv 2 \pmod{4}, & (12n+7)^t + 1 &\equiv 2 \pmod{3}, \\ (12n+9)^t + 1 &\equiv 1 \pmod{3}. \end{aligned}$$

Analogicznie wykażę, że  $t$ , które musi być nieparzyste (w przeciwnym razie byłoby  $y^t + 1 \equiv 2 \pmod{4}$ ), jest postaci  $6m + 3$ . Łatwo stwierdzić bowiem, że

$$\begin{aligned} (12n+11)^{6m+1} + 1 &\equiv 11^{6m+1} + 1 \equiv 2^{6m+1} + 1 \equiv 3 \pmod{9}, \\ (12n+11)^{6m+5} + 1 &\equiv 11^{6m+5} + 1 \equiv 2^{6m+5} + 1 \equiv 6 \pmod{9}. \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymaliśmy hipotetyczną równość

$$\begin{aligned} (13) \quad 2^{xz} \cdot 3^{yz} &= (12n+11)^{3(2m+1)} + 1 = [(12n+11)^3 + 1] \cdot \sum_{i=0}^{2m} (-1)^i \cdot (12n+11)^{3i} = \\ &= 12(n+1) \cdot (144n^2 + 252n + 111) \cdot \sum_{i=0}^{2m} (-1)^i \cdot (12n+11)^{3i}. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że  $n+1$ , jako dzielnik lewej strony (13), musi być postaci  $2^a 3^\beta$ ,  $a \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ , tzn.  $n = 2^a 3^\beta - 1$ . Dalej,  $144n^2 + 252n + 111 = 3[12n(4n+7) + 37]$ , ale wyrażenie  $12n(4n+7) + 37$  dla naturalnych  $n$  albo samo jest liczbą pierwszą, albo ma dzielniki pierwsze wszystkie różne od 2 i od 3. Mamy np.

$n$	$12n(4n+7) + 37$
0	37 (liczba pierwsza)
1	169 = 13 <sup>2</sup>
2	397 (liczba pierwsza)
3	721 = 7 · 103
4	1141 = 7 · 163
5	1657 (liczba pierwsza)

**4. Zakończenie.** Opierając się na wynikach zawartych w pracach [15], [5] oraz na rezultatach niniejszej pracy łatwo stwierdzić, że równanie (1) jest niemożliwe, jeżeli chociaż jedna z liczb  $x, y$  jest mniejsza

od 20, tzn.  $\min(x, y) < 20$ , lub jeżeli jedna przynajmniej z liczb  $x, y$  jest dowolną naturalną potęgą liczby mniejszej niż 20 (z wyjątkiem liczby 14).

W tym celu wystarczy zauważyć, że dla  $x$  lub  $y =$

- 2 (dowód w [5]),
- 3 =  $2^1 + 1$  (dowód w [15] lub [5]),
- 4 =  $2^2$  (dowód w [5]),
- 5 =  $2^2 + 1$  (dowód w [5] i [15]),
- 6 =  $2 \cdot 3$  (dowód w ust. 3 niniejszej pracy),
- 7 =  $2 \cdot 3 + 1$  (dowód w [15] i [5]),
- 8 =  $2^3$  (dowód w [5]),
- 9 =  $3^2$  (dowód w [14] lub [4]),
- 10 (dowód w ust. 2 niniejszej pracy),
- 11 (dowód w [5]),
- 12 =  $2^2 \cdot 3$  (dowód w ust. 3 niniejszej pracy),
- 13 =  $2^2 \cdot 3 + 1$  (dowód w [15] lub [5]),
- 14 (brak dowodu),
- 15 =  $(2^1 + 1)(2^2 + 1)$  (dowód w [15] lub [5]),
- 16 =  $2^4$  (dowód w [5]),
- 17 =  $2^4 + 1$  (dowód w [15] lub [5]),
- 18 =  $2^1 \cdot 3^2$  (dowód w ust. 3 niniejszej pracy),
- 19 =  $2^1 \cdot 3^2 + 1$  (dowód w [15] lub [5]).

#### Prace cytowane

- [1] F. de Bessy, *Solutio duorum problematum circa numeros cubos et quadratos*, 1657.
- [2] J. W. S. Cassels, *On the equation  $a^x - b^y = 1$* , Amer. J. of Math. 1953.
- [3] L. E. Dickson, *History of the theory of numbers II, The diophantine analysis*, New York 1934.
- [4] L. Euler, *Theorematum quorundam arithmeticonum demonstrationes*, 1738.
- [5] C. G. Gerono, *Nouvelles Annales de Mathématiques* 1870, 1871.
- [6] A. Gloden, *Histoire du „Problème de Catalan”*, Actes du Septième Congrès International d'Histoire des Sciences, Jérusalem-Août 1953.
- [7] R. Hampel, *Annales Polonici Math.* III (1956).
- [8] E. Catalan, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 27, Nouv. Ann. I.
- [9] V. A. Lebesgue, *Nouvelles Annales de Mathématiques* 9, I (1850).
- [10] А. П. Луреманашвили, *Тр. Груз. Политехи. Института* 4 (1957).
- [11] T. Nagell, *Der Kongelige Norsk Videnskabers Selskab Forhandling* VII. 38 (1934).
- [12] — *Norsk Matematisk Forenings Skrifter Serie I*, Nr 2.8 (1921-22).
- [13] R. Oblath, *Mathematica Jaargang VIII*, 1939-1940.
- [14] — Szamokró, 1940.
- [15] — *Revista Matematica Hispano-Americana*, Serie 4, t. 1 (1941).
- [16] — *Annales Pol. Math.* I (1954).
- [17] — *Une propriété des puissances parfaites*, *Mathesis* 45 (1956).

[18] A. Schinzel, *Annales Pol. Math.* I (1954).

[19] W. Sierpiński *O rozwiązywaniu równań w liczbach całkowitych*, Warszawa 1956.

[20] — *Czym się zajmuje teoria liczb*, Warszawa 1957.

[21] W. J. Le Veque, *On the equation  $a^x - b^y = 1$* , *Amer. J. of Math.* 1952.

Р. ГАМПЕЛЬ (Варшава)

### О ПРОБЛЕМЕ КАТАЛАНА

#### РЕЗЮМЕ

Автор занимается проблемой Каталана, т. е. утверждением, что уравнение

$$(1) \quad x^z - y^t = 1$$

( $x, y, z, t$  натуральные числа  $\geq 2$ ) не имеет других решений кроме тривиального:

$$(2) \quad x = 3, y = 2, z = 2, t = 3,$$

(т. е.  $3^2 - 2^3 = 1$ ).

Проблема эта, поставлена Каталаном в 1842 г., еще пока не решена в общем виде.

Автор доказывает, что уравнение (1) не возможно, когда одно из чисел  $x$  или  $y$  имеет форму  $10^m, 2^n \cdot 3^m$ .

Наконец, опираясь на результаты, доказанные Героном и Рихардом Обла- том, автор получает, как следствие доказанного, что (1) не возможно для любых натуральных степеней чисел  $a$  и  $b$ , меньшее из которых не превосходит 19 (за исключением 14), т. е. уравнение  $x^z - y^t = 1$  ( $x, y, z, t \geq 2$ ) невозможно, если  $x = a^m, y = b^n$  ( $m, n = 1, 2, \dots$ ),  $c = \min(a, b) < 20, c \neq 14$ , за исключением цитированного выше тривиального решения (2).

R. HAMPÉL (Warszawa)

### ON THE PROBLEM OF CATALAN

#### SUMMARY

The paper is devoted to the problem of Catalan, i. e. to the assertion that the equation

$$(1) \quad x^z - y^t = 1 \quad (x, y, z, t \text{ natural numbers } \geq 2)$$

has no other solutions except of the trivial one:

$$(2) \quad x = 3, y = 2, z = 2, t = 3$$

(i. e.  $3^2 - 2^3 = 1$ ).

This problem formulated by Catalan in 1842 is not yet resolved in the general form.

The author proves the impossibility of equation (1), when one of the numbers  $x, y$  is of the form  $10^m, 2^n \cdot 3^m$ .

Finally, referring to the results obtained by G. Gerono and R. Oblath [5], [15], the author concludes that equation (1) is impossible for any natural powers of numbers  $a$  and  $b$  smaller of which does not exceed 20 (except the number 14). Otherwise, the equation  $x^s - y^t = 1$  ( $x, y, z, t \geq 2$ ) is impossible, when  $x = a^m, y = b^n$  ( $m, n = 1, 2, \dots$ ),  $c = \min(a, b) < 20, c \neq 14$ , excluding trivial case (2) quoted above.

---