ANNALES SOCIETATIS MATHEMATICAE POLONAE
Series I: COMMENTATIONES MATHEMATICAE
ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE
XLVII (2) (2007), 255-283

Andrzej Kapcia

Sur la méthode de l'intégrale particulière et sur ses conséquences pour l'équation de Riccati et pour les équations différentielles linéaires et homogènes d'ordre supérieur

Abstract. This paper presents the method of particular solution for solving the Riccati equation and linear homogenous equations of second and third order, as well as its certain application to linear homogenous equations of n-th order. The conditions of effective integrability for equations (0.1) and (0.2) are expressed in symbolic (operator) form and also for equation (0.3) in fully expanded form. There have been proved three theorems which state the following: for any subclass of differential equations of the form (0.1), (0.2), (0.3), if there are known, respectively: a particular solution y_0, a particular solution u_0, two linearly independent particular solutions u_1, u_2, then it is possible to construct superclasses of differential equations of the given class, using classes cited in [6, 7, 8, 9]. Moreover, one may obtain their effectively integrable generalizations. Numerous examples provided illustrate the above results. The article presents also a practical way of applying the method of particular solution to linear equations of n-th order. This method enables us to integrate more general equations than those described in [4, 5, 14] of the form (0.1), (0.2), (0.3), (0.4) for which the particular solutions are cited therein.

2000 Mathematics Subject Classification: Primary 34A, Secondary 34L.

Key words and phrases: differential equation, linear, homogenous, order, particular solution, superclass, subclass, inverse operator, linearly independent, effective integrability, general solution.

0. Introduction. Dans ce travail nous allons présenter la méthode de l'intégrale particulière en forme symbolique pour les équations suivantes:
l'équation de Riccati:

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \qquad (a, b, c \in C_X, a \neq 0), \tag{0.1}$$

l'équation linéaire du second ordre:

$$f(x)u'' + g(x)u' + h(x)u = 0 \qquad (f, g, h \in C_X, f \neq 0), \tag{0.2}$$

l'équation linéaire du troisième ordre:

$$p_0(x)u''' + p_1(x)u'' + p_2(x)u' + p_3(x)u = 0 \qquad (p_i \in C_X, i = 0, \dots, 3; p_0 \neq 0), \tag{0.3}$$

et certaine proposition de considérer l'équation linéaire du n-ième ordre

$$p_0(x)u^{(n)} + p_1(x)u^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)u' + p_n(x)u = 0, \tag{0.4}$$

où $p_i \in C_X, i = 0, \dots, n; p_0 \neq 0$, à l'aide de cette méthode. Nous nous concentrons sur les équations (0.1)–(0.3), parce que cette méthode donne pour ces équations les plus meilleurs résultats, et aussi que ces équations sont très importantes dans des applications. Le but principal de ce travail est de donner les théorèmes obtenus en conséquence de l'application de cette méthode pour construire les nouvelles équations (0.1)–(0.3) effectivement intégrables.

Nous introduisons dans les chapitres 2, 3, 4, 5 les significations suivantes: pour les équations (0.1), (0.2), (0.3), (0.4) pour lesquelles leurs solutions particulières sont connues – les coefficients par les lettres: (0.1): a, b, c; (0.2): f, g, h; (0.3): p_0, p_1, p_2, p_3; (0.4): $p_0, p_1, \dots, p_n$, et pour les équations généralisées: (0.1): A, B, C; (0.2): F, G, H; (0.3): P_0, P_1, P_2, P_3; (0.4): $P_0, P_1, \dots, P_n$.

La possibilité de constructions effectives de solutions générales de ces équations est garantie: par la formule

$$y = y_0 + \exp\int(2ay_0 + b)dx\Big[C - \int\big(a\exp\int(2ay_0 + b)dx\big)dx\Big]^{-1} \tag{0.5}$$

pour l'équation (0.1), et d'après la formule de J. Liouville (cf. [3] p. 235 ou [12] p. 341–342) pour les équations (0.2) et (0.3) par les expressions respectivement en formes:

$$u = K_1u_0 + K_2u_0\int u_0^{-2}\exp\big(-\int(g/f)dx\big)dx, \tag{0.6}$$

$$\begin{aligned} u = &K_1u_1 + K_2u_2 \\ &+K_3u_1\int\Big[(u_2/u_1)'_x\int\big[\big(u_1/w^2(u_1,u_2)\big)\exp\big(-\int(p_1/p_0)dx\big)\big]dx\Big]dx, \end{aligned} \tag{0.7}$$

où: C, K_i – Ctes réelles arbit., $w(u_1, u_2)$ – wronskien de solutions u_1 et u_2.

D'après la formule de J. Liouville (cf. p. ex. [3] p. 235) la construction analogique comme la dernière peut être faire pour l'équation (0.4), si l'on connaît $n-1$ ses solutions particulières. Il est évident que les profits de méthode de l'intégrale particulière décroissent si l'ordre de l'équation (0.4) croit. D'autre part, l'application de cette méthode à l'équation (0.3) constitue l'un bon exemple de s'application aux équations linéaires si $n > 2$.

Nous remarquons que la méthode présentée permet de construire les solutions particulières des équations (0.1)–(0.3) en dépendance de leurs coefficients (au plus trois pour (0.1) et (0.2)) et certaines fonctions arbitraires: μ_k, β_j, α_i et β_i respectivement (cf. [7, 8, 9]), alors elle assure – d'après les formules (0.5)–(0.7) – leur intégrabilité effective.

En généralisant la notion de l'intégrabilité effective donnée par le mathématicien polonais W. Nikliborc dans [15] p. 91, nous introduisons la définition

DÉFINITION 0.1 On dit que l'équation différentielle du n-ième ordre

$$F\big(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\big) = 0 \tag{0.8}$$

est effectivement intégrable (résoluble), selon de l'exemple, si l'on peut trouver en forme élémentaire toutes ses solutions p. ex.: en forme de solution générale paramétrique ou en forme explicite respectivement:

$$x = x(t, C_1, \ldots, C_n), \quad y = y(t, C_1, \ldots, C_n); \tag{0.9}$$

$$y = f(x, C_1, \ldots, C_n), \tag{0.10}$$

où respectivement: $t \in T, x \in X, C_i$ – Ctes réelles arbit. $(i = 1, \ldots, n)$; ou en forme de l'intégrale générale de l'équation (0.8)

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0; \tag{0.11}$$

ou finalment en forme d'un système convenable de solutions particulières – si cela permet de construire sa solution générale (0.9) ou (0.10) ou son intégrale (0.11) (cf. p. ex. les formules (0.5)–(0.7)).

Nous remarquons que: 1) l'intégrabilité effective est ici liée avec le type fixé de l'équation (0.8); 2) la forme élémentaire, il faut ici interpréter comme la quantité finie d'opérations arithmétiques, d'intégrations et de différentations sur les fonctions données par l'équation (0.8) (non nécessairement élémentaires) et sur les fonctions élémentaires.

Remarquons encore que les monographies de E. Kamke [4, 5] et G. Murphy [14] comprennent quelques centaines d'équations différentielles des types (0.1)–(0.4) pour lesquels les solutions générales ou particulières sont dans eux citées. Beaucoup de ces équations est très simples et leurs solutions sont y présentées. De cela résulte le problème de trouver les critères pour lesquels on obtient possiblement beaucoup d'équations des formes (0.1) et (0.2) comprennent dans [4, 5, 14]. Dans ce but j'introduisais l'une méthode qui j'appele ,,la méthode de l'intégrale particulière" – symboliquement MIP, laquelle on profit directement et méditerement dans le cycle de travaux [6]–[11]. L'idée générale de cette méthode était présentée la première fois dans le travail [6], p. 120–121. Elle introduit la dépendance l'un des coefficients de l'équation (0.1) d'une fonction arbit. $\mu(x)$ et d'autres coefficients restants cf. [6], p. 121. Dans les neufs classes de l'équation (0.1) citées dans [6] il n'y a pas des fonctions $\mu(x)$ parce qu'elles toutes sont égales zéro. Le même fait a lieu dans le travail [11] pour l'équation (0.2) dans lequel les fonctions $\mu(x)$ sont aussi égales à zéro. Les critères introduits dans [6] et [11] (au total plus de quatorze) sont satisfaits par les coefficients plus de quatre cent équations citées dans [4, 5, 14]. Mais on peut les obtenir de moindre nombre des critères. Ces faits témoignent que le rôle fondamental en la désignation des solutions particulières possèdent les fonctions arbit. $\mu_k(x)$ (k – le nombre entier). Ces fonctions étaient introduites dans les travaux [7, 10].

Nous remarquons encore que dans le fin des années soixantièmes et puis soixante-dixièmes on publie les travaux dans lesquels ils se trouvent des solutions particulières d'équations (0.1) et (0.2) en formes des fonctions qui dépendent de leurs coefficients et de certaines fonctions arbit. cf. [1, 13] et l'exemple 3.9 de ce travail. Elles étaient obtenues par d'autre méthode comme la MIP introduit par le travail [6]. C'est pourquoi dans mes travaux [7, 8, 9, 10] dans lesquels les résultats sont obtenus par la MIP dans les critères et solutions en là présentées il y a toujours les fonctions arbitraires μ_k, β_j, α_i, β_i respectivement pour les équations considérées. Dans ces travaux on donne avant tout les résultats obtenus par la MIP, mais la seule méthode est faiblemant présentée. La nouveauté dans ce travail-ci est la présentation de la MIP en forme symbolique opératorielle. On donne cette présentation pour chaque type d'équations (0.1)–(0.4) séparément. Les nouveautés constituent les théorèmes: Th. 2.1, Th. 3.1 et Th. 4.1 et leurs démonstrations, les corollaires: 2.5, 2.6, 3.6, 3.7, 4.5, et 4.6, qui possèdent le caractère global, et aussi les chapitres 4 et 5. Dans les succéssifs chapitres de ce travail sont décrites: 1. L'introduction de l'inscription opératorielle des équations (0.1)–(0.4); 2, 3, 4: La présentation de la MIP respectivement pour les équations (0.1), (0.2) et (0.3). Dans le chapitre 5 on donne les remarques consacrées à la méthode de l'intégrale particulière pour les équations différentielles linéaires et homogènes d'ordre n-ième. Quelques-unes nouvelles généralisations sont données comme les exemples.

J'exprime mes sincères remerciments au Monsieur R. Siejakowski qui a bien voulu transcrire ce travail dans le système LaTeX.

1. L'inscription symbolique des équations considérées. La méthode de l'intégrale particulière était introduite dans le travail [6] et appliquée aux travaux [7, 8, 9]. Dans cette méthode on profite de l'hypothèse sur la connaissence d'une solution partuculière (pour (0.1) et (0.2)) ou d'un système convenable de solutions particulières (pour (0.3) et (0.4)), et la possibilité de présentation de l'équation considérée dans la forme profitable pour s'application. Nous introduisons maintenant l'inscription symbolique des équations (0.1)–(0.4):

L'équation de Riccati (0.1) peut être présentée dans les formes lui équivalentes

$$R_{2k-1}(y) = R_{2k}(y) \qquad (k = 1, \dots, 6), \tag{0.1*}$$

où les opérateurs $R_{2k-1}(y)$ et $R_{2k}(y)$ ont respectivement les formes:

$$
(1.1)\qquad
\begin{aligned}
R_1(y) &\equiv y' - ay^2, & R_2(y) &\equiv by + c;\\
R_3(y) &\equiv y' - by, & R_4(y) &\equiv ay^2 + c;\\
R_5(y) &\equiv y' - c, & R_6(y) &\equiv ay^2 + by;\\
R_7(y) &\equiv y' - ay^2 - c, & R_8(y) &\equiv by;\\
R_9(y) &\equiv y' - by - c, & R_{10}(y) &\equiv ay^2;\\
R_{11}(y) &\equiv y', & R_{12}(y) &\equiv ay^2 + by + c.
\end{aligned}
$$

Pour l'équation linéaire du second ordre de la forme (0.2) on a

$$
(0.2^*)\qquad L_{2j-1}(u) = L_{2j}(u) \qquad (j = 1, \dots, 3),
$$

où les opérateurs $L_{2j-1}(u)$ et $L_{2j}(u)$ sont définis par les rélations:

$$
(1.2)\qquad
\begin{aligned}
L_1(u) &\equiv fu'', & L_2(u) &\equiv -gu' - hu;\\
L_3(u) &\equiv gu', & L_4(u) &\equiv -fu'' - hu;\\
L_5(u) &\equiv hu, & L_6(u) &\equiv -fu'' - gu'.
\end{aligned}
$$

L'équation linéaire du troisième ordre (0.3) peut être écrite dans les formes lui équivalentes

$$
(0.3^*)\qquad L_{2i-1}(u) = L_{2i}(u) \qquad (i = 1, \dots, 7),
$$

où les opérateurs $L_{2i-1}(u)$ et $L_{2i}(u)$ ont respectivement les formes:

$$
(1.3)\qquad
\begin{aligned}
L_1(u) &\equiv p_0u''', & L_2(u) &\equiv -p_1u'' - p_2u' - p_3u;\\
L_3(u) &\equiv p_1u'', & L_4(u) &\equiv -p_0u''' - p_2u' - p_3u;\\
L_5(u) &\equiv p_2u', & L_6(u) &\equiv -p_0u''' - p_1u'' - p_3u;\\
L_7(u) &\equiv p_3u, & L_8(u) &\equiv -p_0u''' - p_1u'' - p_2u';\\
L_9(u) &\equiv p_0u''' + p_1u'', & L_{10}(u) &\equiv -p_2u' - p_3u;\\
L_{11}(u) &\equiv p_1u'' + p_2u', & L_{12}(u) &\equiv -p_0u''' - p_3u;\\
L_{13}(u) &\equiv p_0u''' + p_2u', & L_{14}(u) &\equiv -p_1u'' - p_3u.
\end{aligned}
$$

Nous remarquons que cette notation est à peu près identique comme appliquée dans les travaux [7]–[10]. La manière de sa présentation ici, permet facilement obtenir presque tous les critères donnés dans les travaux [6]–[9].

On sait bien, que si l'une solution particulière y_0 de l'équation (0.1) est connue, si l'une solution particulière u_0 de l'équation (0.2) est connue, ainsi que les deux solutions particulières linéairment indépendantes u_1 et u_2 de l'équation (0.3) sont connues, alors les équations correspondantes (0.1), (0.2) et (0.3) sont effectivement intégrables. Cela entraîne le fait que les équations correspondant (0.1*), (0.2*) et (0.3*) sont aussi résolubles effectivement pour tout k, j et i respectivement.

On peut aussi appliquer la méthode de l'intégrale particulière à l'équation linéaire du n-ième ordre (0.4) en l'écrivant dans les formes convenables.

Soit

$$
L(u) \equiv p_0(x)u^{(n)} + p_1(x)u^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)u' + p_n(x)u
$$

un opérateur linéaire. L'équation (0.4) peut être donc écrite en les formes lui équivalentes

$$(0.4^*) \qquad L^1_{k,n-k}(u) = L^2_{k,n-k}(u) \qquad (k = 0, 1, \dots, n),$$

où les opérateurs $L^1_{k,n-k}(u)$ et $L^2_{k,n-k}(u)$ sont définis comme suit:

$$(1.4) \qquad L^1_{k,n-k}(u) \equiv p_k(x)u^{(n-k)}, \qquad L^2_{k,n-k}(u) \equiv -L(u) + L^1_{k,n-k}(u);$$

ou

$$(0.4^{**}) \qquad L^3_{k,n-k}(u) = L^4_{k,n-k}(u) \qquad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

où les opérateurs $L^3_{k,n-k}(u)$ et $L^4_{k,n-k}(u)$ ont les formes

$$(1.5) \qquad \begin{aligned} &L^3_{k,n-k}(u) \equiv p_k(x)u^{(n-k)} + p_{k+1}(x)u^{(n-(k+1))}, \\ &L^4_{k,n-k}(u) \equiv -L(u) + L^3_{k,n-k}(u). \end{aligned}$$

Dans le cas si aucun des coefficients de l'équation (0.4) n'est pas identiquement égal à zéro, alors les opérateurs inverses:

$$L^{1^{-1}}_{k,n-k} \quad , \quad L^{3^{-1}}_{k,n-k}$$

sont toujours effectivement déterminables, par contre les opérateurs inverses par rapport aux opérateurs $L^2_{k,n-k}$, $L^4_{k,n-k}$, en général ne sont pas effectivement pour obtenir. On peut introduire les autres formes de l'équation (0.4) – par exemple:

$$(0.4^{***}) \qquad L^5_{k,n-k}(u) = L^6_{k,n-k}(u) \qquad (k = 0, 1, \dots, n-2),$$

où les opérateurs $L^5_{k,n-k}(u)$ et $L^6_{k,n-k}(u)$ sont définis par les rélations

$$(1.6) \qquad \begin{aligned} &L^5_{k,n-k}(u) \equiv p_k(x)u^{(n-k)} + p_{k+2}(x)u^{(n-(k+2))}, \\ &L^6_{k,n-k}(u) \equiv -L(u) + L^5_{k,n-k}(u), \end{aligned}$$

mais elles sont inutiles du point de vue de méthode de l'intégrale particulière. Remarquons encore que, si on connaît $n-1$ solutions particulières linéairement indépendantes de l'équation (0.4), alors elle est effectivement intégrable. De là résulte que les équations (0.4*), (0.4**) et (0.4***) sont effectivement intégrables pour tout k.

Évidemment, on peut considérer beaucoup de cas particuliers – quelques-uns coefficients p_k sont identiquement égaux à zéro – alors les opérateurs inverses par rapport aux opérateurs $L^2_{k,n-k}$, $L^4_{k,n-k}$, $L^6_{k,n-k}$ peuvent être dans quelques-uns cas effectivement déterminables. Nous ne nous occuperons pas ici de tels cas.

Remarquons encore que les représentations de l'équation (0.4) en formes (0.4*) et (0.4**) épuisent tous les profitables cas de formes de cette équation pour $n = 2, 3$ (au moins pour un des côtes de l'équation (0.4), on peut trouver l'opérateur inverse).

2. Présentation symbolique de méthode de l'intégrale particulière pour l'équation de Riccati. La méthode de l'intégrale particulière pour l'équation (0.1) se fonde sur l'hypothèse de connaissance sa solution particulière y_0, sur de profiter ses équations (0.1*) – ce que conduit à l'existence des fonctions continues μ_k $(k = 1, \dots, 6)$, déterminées par les égalités

$$R_{2k-1}(y_0) \equiv \mu_k, \tag{2.1}$$

$$R_{2k}(y_0) \equiv \mu_k; \tag{2.2}$$

sur de trouver les opérateurs inverses R^{-1}_{2k-1}, R^{-1}_{2k} par rapport aux opérateurs R_{2k-1}, R_{2k}; sur l'introduction des conditions d'intégrabilité effective en forme

$$R_{2k-1}\big(R^{-1}_{2k}(\mu_k)\big) \equiv \mu_k, \tag{2.3}$$

$$R_{2k}\big(R^{-1}_{2k-1}(\mu_k)\big) \equiv \mu_k, \tag{2.4}$$

où $y_0 = R^{-1}_{2k-1}(\mu_k)$ designe les solutions symboliques successives de l'identité (2.1), et $y_0 = R^{-1}_{2k}(\mu_k)$ les solutions symboliques successives de l'identité (2.2) $(k = 1, \dots, 6)$.

La condition (2.3) pour $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ prend successivement les formes explicites: (2.2), (3.4), (4.4), (5.2), (6.4) et (7.4) du travail [7]; et la condition (2.4) pour $k = 2, 3, 5, 6$ prend successivement les formes explicites (3.2), (4.2), (6.2) et (7.2) de [7]. Cette condition-ci pour $k =: 1, 4$ possède seulement l'importance symbolique.

Des conditions (2.3) et (2.4), on détermine – si cela est possible – les classes de l'équation (0.1) effectivement intégrables – c.-à-d. telles classes pour lesquelles les fonctions

$$y_0 = R^{-1}_{2k}(\mu_k), \tag{2.5}$$

$$y_0 = R^{-1}_{2k-1}(\mu_k) \tag{2.6}$$

sont respectivement leurs solutions particulières. On cite ces classes dans les corollaires II.1–VII.1 de [7] (quinze classes). Des formes d'identités (2.1) et (2.2) résulte qu'on peut obtenir effectivement les opérateurs inverses R^{-1}_j pour les nombres $j = 2, \dots, 6, 8, \dots, 12$, et que seulement dans les cas si $k = 1$ et $k = 4$, on ne peut pas obtenir effectivement des opérateurs R^{-1}_{2k-1}. Malgé cela, on peut donner les autres très générales conditions d'intégrabilité effective de l'équation (0.1) (cf. [7] p.: 117, 123 les critères (2.4) et (5.5)). Ces dernières conditions ne possèdent pas la forme (2.4) pour $k =: 1, 4$, mais elles font les certaines généralisations de conditions (2.3) pour les mêmes k.

Dans le travail [7] on donne 15 classes d'équations (0.1) pour lesquelles leurs solutions particulières sont en là citées. Aux équations les plus générales obtenues dans [7] appartiennent les classes: (3.5), (3.7), (4.5), (4.6), (6.5), (7.5) – (7.7). Nous choisissons la classe (3.7) et nous la signifions par

$$\begin{aligned} y' &= a(x)y^2 + b(x)y + \mu_2(x) \\ &\quad - a(x)\exp\Big(2\int b(x)dx\Big)\Big[\int \mu_2(x)\exp\Big(-\int b(x)dx\Big)dx + K\Big]^2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Sa solution particulière est la fonction

$$y_0 = \exp\Big(\int b(x)\,dx\Big)\Big[\int \mu_2(x)\exp\Big(-\int b(x)\,dx\Big)\,dx + K\Big], \tag{2.8}$$

où K – Cte arbit. réelle (cf. [7] p. 118, 120). On peut l'obtenir de la condition (2.4) pour $k = 2$ de ce travail.

Remarquons encore, que l'ensemble d'équations (0.1) pour lesquelles leurs solutions particulières sont connues est toujours élargi. Ici, il suffit citer les travaux [1, 6, 7]. Mais dans le temps fixé il est constant. Le but principal de ce travail est de démontrer que tous les résultats connus jusqu'à présent, on peut obtenir seulement de l'une suffisamment générale équation en forme (0.1) et que pour cela permettait la MIP. De plus, nous remarquons que tous les résultats obtenus à l'avenir, on pourra obtenir des équations citées dans le travail [7].

Théorème 2.1 Soit y_0 une solution particulière de l'équation donnée (0.1) satisfaisant aux hypothèses suivantes: $a, b, c \in C_X$, $ac \neq 0$ et $y_0 \neq 0$ sur X, alors: 1) on peut la construire au moins d'un des critères:

(A)

$$a(x)\exp\Big(2\int b(x)\,dx\Big)\Big[\int \Big(\mu_2(x)\exp\Big(-\int b(x)\,dx\Big)\Big)\,dx + K\Big]^2 - \mu_2(x) + c(x) = 0,$$
$$\mu_2(x) \neq c(x);$$

(B)

$$a(x)\Big[\int \big(c(x) + \mu_3(x)\big)\,dx + K\Big]^2 + b(x)\Big[\int \big(c(x) + \mu_3(x)\big)\,dx + K\Big] - \mu_3(x) = 0,$$
$$\mu_3(x) \neq -c(x);$$

(C)
$$a(x)\exp\Big(2\int b(x)\,dx\Big)\Big[\int \big(\mu_5(x) + c(x)\big)\,dx + K\Big]^2 - \mu_5(x) = 0,$$
$$\mu_5(x) \neq -c(x);$$

(D)
$$a(x)\Big[\int \mu_6(x)\,dx + K\Big]^2 + b(x)\Big[\int \mu_6(x)\,dx + K\Big] + c(x) - \mu_6(x) = 0,$$
$$\mu_6^2(x) + K^2 > 0;$$

où K – Cte réelle arbit. en trouvant la fonction $\mu_k(x)$, $k = 2, 3, 5, 6$ et choisissant les constantes arbitraires (si cela est nécessaire); 2) on peut construire au moins l'une équation différentielle en forme (0.1) plus générale de l'équation donnée et possédant la même solution particulière y_0 ou la solution particulière y_0^* correspondant à l'équation généralisée.

Remarque 2.2 Les critères (A), (B), (C) et (D) ce sont précisement les plus généraux critères: (3.2), (4.2), (6.2) et (7.2) du travail [7]. Ces critères sont satisfaits si les fonctions correspondant (3.1), (4.1), (6.1), (7.1) de [7] signifiées par:

$$(\mathrm{A}^*)\qquad y_0 = \exp\Big(\int b(x)\,dx\Big)\Big[\int \mu_2(x)\exp\Big(-\int b(x)\,dx\Big)\,dx + K\Big],$$

$$(\mathrm{B}^*)\qquad y_0 = \int \big(c(x) + \mu_3(x)\big)\,dx + K,$$

$$(\mathrm{C}^*)\qquad y_0 = \exp\Big(\int b(x)\,dx\Big)\Big[\int \Big(\big(\mu_5(x) + c(x)\big)\exp\Big(-\int b(x)\,dx\Big)\Big)\,dx + K\Big],$$

$$(\mathrm{D}^*)\qquad y_0 = \int \mu_6(x)\,dx + K,$$

où K – comme ci-dessus, sont les solutions particulières de l'équation donnée (0.1).

Remarque 2.3 Les fonctions μ_k pour $k = 2, 3, 5, 6$ d'après les formules (2.1) et (2.2) de ce travail et les hypothèses citées dans le Th. 2.1 sont toutes continues. De là résulte que tous les critères (A), (B), (C), (D) et les solutions (A*), (B*), (C*) et (D*) sont bien déterminées.

Remarque 2.4 Les hypothèses citées dans le Th. 2.1 ce sont les plus faibles hypothèses des théorèmes cités dans le travail [7], mais les critères cités ici sont les plus généraux. On peut formuler le théorème analogique au Th. 2.1 dans lequel fussent d'autres critères de [7] (dans ce travail il y a douze critères), mais alors on doit admettre de beaucoup sur les fonctions a, b, c et μ_k. Cela borne l'ensemble d'équations qu'on peut généraliser.

Corollaire 2.5 Toutes les équations effectivement intégrables en forme (0.1) comprises dans [4, 5, 14], ainsi que données dans des travaux originaux, on peut obtenir de l'équation (2.7).

Corollaire 2.6 Pour chaque équation effectivement intégrable en forme (0.1) présentée dans [4, 5, 14], on peut trouver l'équation plus générale de l'équation donnée et aussi effectivement intégrable, et pour les équations en forme (0.1) comprises dans les postérieurs travaux originaux, on peut trouver l'équation qui possède la généralité non moindre que l'équation donnée (0.1).

Démonstration du Th. 2.1. Comme le point de départ de cette démonstration, nous prenons le critère (A) duquel résulte l'équation (2.7). Elle possède comme la solution particulière la fonction (A*) identique avec la solution (2.8).
Pour démonstration écrivons l'équation (2.7) en forme

$$(2.7')\quad \begin{aligned} y' &= A(x)y^2 + B(x)y \\ &\quad + \mu_2(x) - A(x)\exp\Big(2\int B(x)\,dx\Big)\Big[\int \mu_2(x)\exp\Big(-\int B(x)\,dx\Big)\,dx + K\Big]^2, \end{aligned}$$

et sa solution particulière y_0^* comme suit

$$(2.8') \qquad y_0^* = \exp\Big(\int B(x)\,dx\Big)\Big[\int \mu_2(x)\exp\Big(-\int B(x)\,dx\Big)\,dx + K\Big],$$

où K – comme ci-dessus. Des hypothèses on a: $a, b, c \in C_X$, $a \neq 0$ sur X, y_0 est non nulle solution particulière de l'équation (0.1). Il est donc satisfaite la condition

$$(2.9) \qquad y_0' = a(x)y_0^2 + b(x)y_0 + c(x)$$

pour tous $x \in X$. Admettons que la fonction μ_2 a la forme

$$(2.10) \qquad \mu_2 \equiv y_0' - B(x)y_0,$$

où y_0 est la solution particulière de l'équation donnée (0.1). En la mettant simultanémant dans l'équation (2.7′) et en sa solution (2.8′), et intégrant par parties les expressions obtenues, on obtient l'équation

$$(2.11) \qquad \begin{aligned} y' = {} & A(x)y^2 + B(x)y \\ & + y_0' - B(x)y_0 - A(x)\exp\Big(2\int B(x)\,dx\Big)\Big[K^* + y_0\exp\Big(-\int B(x)\,dx\Big)\Big]^2, \end{aligned}$$

et sa solution particulière en forme

$$(2.12) \qquad y_0^* = y_0 + K^*\exp\Big(\int B(x)\,dx\Big),$$

où K^* – une nouvelle const. arbit. réelle. L'équation (2.11) est une généralisation de l'équation donnée (0.1). Pour ce voire, il suffit de prendre: $A(x) \equiv a(x)$, $B(x) \equiv b(x)$, $K^* = 0$. On obtient alors l'équation

$$(2.13) \qquad y' = a(x)y^2 + b(x)y + y_0' - b(x)y_0 - a(x)y_0^2,$$

qui d'après l'identité (2.9) prend la forme de l'équation donnée (0.1). Nous remarquons encore que, si seulement $K^* = 0$ dans (2.11) et (2.12), on obtient alors l'une généralisation évidente de l'équation donnée (0.1) en forme

$$(2.14) \qquad y' = A(x)y^2 + B(x)y + y_0' - B(x)y_0 - A(x)y_0^2,$$

qui possède la même solution particulière que l'équation donnée (0.1). Si la constante $K^* \neq 0$, les généralisations (2.11) et (2.14) ont les différentes solutions particulières. Cela achève la démonstration. ∎

Dans cette démonstration nous avons profité seulement de l'équation (2.7). Nous remarquons que dans [7], on donne huit classes de l'équation (0.1) à la même généralité. De là résulte, que pour chaque équation pour laquelle sa solution particulière est connue, on peut construire au plus huit sous-classes de l'équation (0.1) – plus générales de l'équation donnée et effectivement intégrables. Quelques-unes de ces classes peuvent être identiques.

Exemple 2.7 Dans [6] p. 125, nous avons donné l'équation (0.1) en forme

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y - \big(b(x)/a(x)\big)'_x.$$

Sa solution particulière a la forme $y_0 = -b(x)/a(x)$. Parce que nous avons obtenu de (2.7) l'équation la plus générale en forme (2.11), alors sa généralisation a la forme

$$\begin{aligned} y' = A(x)y^2 + B(x)y - \big(b(x)/a(x)\big)'_x + \big(B(x)b(x)\big)/a(x) \\ - A(x)\exp\Big(2\int B(x)\,dx\Big)\Big[K^* - \big(b(x)/a(x)\big)\exp\Big(-\int B(x)\,dx\Big)\Big]^2. \end{aligned}$$

Sa solution particulière a la forme (2.12), où y_0 comme ci-dessus.

3. La méthode de l'intégrale particulière pour l'équation linéaire du second ordre. La méthode de l'intégrale particulière pour l'équation (0.2) consiste à l'hypothèse sur la connaissance sa solution particulière u_0, à profiter des équations (0.2*), que conduit à l'existence des fonctions continues β_j $(j = 1, 2, 3)$, déterminées par les égalités

$$L_{2j-1}(u_0) = \beta_j, \tag{3.1}$$

$$L_{2j}(u_0) = \beta_j, \tag{3.2}$$

à la recherche des opérateurs inverses L^{-1}_{2j-1}, L^{-1}_{2j} respectivement par rapport aux opérateurs L_{2j-1} et L_{2j}, à l'introduction des conditions de l'intégrabilité effective en formes

$$L_{2j}\big(L^{-1}_{2j-1}(\beta_j)\big) = \beta_j, \tag{3.3}$$

$$L_{2j-1}\big(L^{-1}_{2j}(\beta_j)\big) = \beta_j, \tag{3.4}$$

où: $u_0 = L^{-1}_{2j-1}(\beta_j)$ designe les solutions successives symboliques de l'identité (3.1), et $u_0 = L^{-1}_{2j}(\beta_j)$ les solutions successives symboliques de l'identité (3.2).

La condition (3.3) pour $j = 1, 2, 3$ prend respectivement les formes explicites (2.2), (3.2) et (4.4) de [8]; et la condition (3.4) pour $j =: 1, 3$ prend respectivement les formes explicites (2.4) et (4.2) de même travail. Cette condition pour $j = 2$ possède seulement l'importance symbolique. Des conditions (3.3) et (3.4) on définit (si cela est possible) les classes de l'équation (0.2) effectivement intégrable c.-à-d. les classes d'équations pour lesquelles les fonctions

$$u_0 = L^{-1}_{2j-1}(\beta_j), \qquad (j = 1, 2, 3), \tag{3.5}$$

$$u_0 = L^{-1}_{2j}(\beta_j), \qquad (j = 1, 3) \tag{3.6}$$

sont leurs solutions particulières. Des formes des identités (3.1) et (3.2) résulte qu'on peut obtenir effectivement les opérateurs L_s^{-1} pour $s = 1, 2, 3, 5, 6$ et que seulement dans le cas (3.2) pour $j = 2$, on ne peut pas le trouver effectivement (dans le cas général $s = 4$). C'est pourquoi dans [8], p.72, on donne l'autre condition de l'intégrabilité effective en forme (3.4). Elle ne possède pas la forme (3.4) pour $j = 2$ de ce travail, mais elle constitue une généralisation de condition (3.3) pour le même j. La formule (3.6) pour $j = 2$ possède seulement l'importance symbolique et peut être utilisée dans les cas très spéciaux.

Les conditions (3.3) et (3.4) constituent des conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions définies par les rélations (3.5) et (3.6) soient les intégrales particulières de l'équation (0.2) à l'exception du cas (3.4) pour $j = 2$. (cf. théorèmes en [8]).

Dans le travail [8] on donne 8 classes de l'équation (0.2) pour lesquelles leurs solutions particulières sont en là citées. Aux équations les plus générales présantées dans [8] appartiennent les classes: (2.6), (2.7), (3.6) et (4.7). Pour les considérations qui suivront nous choisissons la classe (4.7) et nous la signifions par

$$f(x)u'' + g(x)u' + \beta_3(x)u_0^{-1}u = 0. \tag{3.7}$$

Sa solution particulière est la fonction

$$u_0 = \int v^{-1}\left(C_1 - \int \big(\beta_3(x)/f(x)\big)v\,dx\right)dx + C_2, \tag{3.8}$$

où: $v \equiv \exp\left[\int \big(g(x)/f(x)\big)\,dx\right]$, C_1 et C_2 – Ctes réelles arbit. (cf. [8], p. 72–73). On peut l'obtenir de la condition (3.4) pour $j = 3$ de ce travail.

Théorème 3.1 Soit u_0 une solution particulière de l'équation donnée (0.2) satisfaisant aux hypothèses suivantes: $f, g, h \in C_X$, $fh \neq 0$ et $u_0 \neq 0$ sur X, alors: 1) on peut la construire au moins d'un des critères

$$\begin{aligned}&\beta_1(x) + g(x)\left[\int \big(\beta_1(x)/f(x)\big)\,dx + C_1\right]\\ &\qquad + h(x)\left[\iint \big(\beta_1(x)/f(x)\big)\,dx\,dx + C_1x + C_2\right] = 0,\end{aligned} \tag{E}$$

$$\begin{aligned}&\beta_3(x) - h(x)\left[\int \exp\left(-\int \big(g(x)/f(x)\big)\,dx\right)\right.\\ &\qquad \left.\cdot\left(C_1 - \int \Big(\big(\beta_3(x)/f(x)\big)\exp\int \big(g(x)/f(x)\big)\,dx\Big)\,dx\right)dx + C_2\right] = 0,\end{aligned} \tag{F}$$

où C_1 et C_2 – Ctes réelles arbit. en trouvant β_j, $j =: 1, 3$ et choisissant les constantes arbitraires (si cela est nécessaire); 2) on peut construire au moins l'une équation différentielle en forme (0.2) plus générale de l'équation donnée et possédant la même solution particulière u_0 ou la solution particulière u_0^* correspondant à l'équation généralisée.

Remarque 3.2 Les critères (E) et (F) ce sont précisement les plus généraux critères: (2.2) et (4.2) du travail [8] desquels on peut déterminer les coefficients $g(x)$ et $h(x)$ de l'équation généralisée (0.2). Ces critères sont satisfaits si les fonctions correspondant (2.1) et (4.1) de [8], lesquelles nous signifions par:

$$\text{(E*)} \qquad u_0 = \iint \big(\beta_1(x)/f(x)\big)\, dx\, dx + C_1 x + C_2,$$

$$\text{(F*)} \qquad u_0 = \int v^{-1}\Big(C_1 - \int \big(\beta_3(x)/f(x)\big) v\, dx\Big)\, dx + C_2,$$

où: $v \equiv \exp\big[\int \big(g(x)/f(x)\big)\, dx\big]$, C_1, C_2 – Ctes réelles arbit., sont les solutions particulières de l'équation donnée (0.2).

Remarque 3.3 Si l'équation donnée (0.2) a le coefficient $f(x) \not\equiv 0$, on peut la considérer comme l'équation donnée avec $f(x) = 1$ dans les sous-intervalles dans lesquels $f(x) \neq 0$. On peut aussi appliquer le critère

$$\text{(G)} \qquad \beta_2(x) + f(x)\Big(\beta_2(x)/g(x)\Big)'_x + h(x)\Big[\int \Big(\beta_2(x)/g(x)\Big)\, dx + C\Big] = 0$$

de [8] (cf. f. (3.2), p. 71), mais alors il faut admettre de plus sur la fonction $g(x)$: $g \in C^1_X$ et $g \neq 0$.

Remarque 3.4 Les fonctions β_j pour $j = 1, 2, 3$ sont définies par les rélations (3.1) et (3.2) de ce travail et d'après les hypothèses citées dans le Th. 3.1 toutes sont continues. D'ici résulte que les critères (E) et (F), et les solutions (E*) et (F*) sont bien déterminées.

Remarque 3.5 L'équation donnée (0.2) c'est un élément de l'ensemble de toutes équations en forme (0.2) pour lesquelles leurs solutions particulières non banales sont connues (l'une pour chaque équation). L'ensemble de telles équations constituent toutes les équations effectivement intégrables du type (0.2) citées dans les monographies [4, 5, 14] et données dans les travaux originaux jusqu'à présent, dans lesquelles fugirent les fonctions arbitraires (cf. p. ex. [1, 8, 10, 13]).

De Th. 3.1 et les Rem. 3.2–3.5 résultent les corollaires suivants:

Corollaire 3.6 Toutes les équations effectivement intégrables en forme (0.2) comprises dans [4, 5, 14], ainsi que données dans des travaux originaux, on peut obtenir de l'équation différentielle (3.7).

Corollaire 3.7 Pour chaque équation effectivement intégrable en forme (0.2) présentée dans [4, 5, 14], on peut trouver l'équation plus générale de l'équation donnée et aussi effectivement intégrable; et pour les équations en forme (0.2) comprises dans les postérieurs travaux originaux, on peut trouver l'équation qui possède la généralité non moindre que l'équation (0.2).

DÉMONSTRATION du Th. 3.1. Comme le point de départ de cette démonstration, nous profitons de critère (F) duquel résulte l'équation (3.7). Elle possède comme la solution particulière la fonction (F*) identique avec la solution (3.8).
Pour démonstration nous les écrivons en formes

$$F(x)u'' + G(x)u' + \beta_3(x)u_0^{*-1}u = 0, \tag{3.7'}$$

où u_0^* désigne sa solution particulière, qui pour l'équation (3.7′) est de la forme

$$u_0^* = \int v^{-1}\Big(C_1 - \int \big(\beta_3(x)/F(x)\big)v\,dx\Big)\,dx + C_2, \tag{3.8'}$$

où $v \equiv \exp\big[\int \big(G(x)/F(x)\big)\,dx\big]$. Nous faisons la démonstration dans deux pas: 1) Nous démontrons que chaque équation en forme (0.2) effectivement intégrable c.-à-d. la telle équation pour laquelle sa solution particulière est connue, on peut obtenir de l'équation (3.7′). Des hypothèses on a que: $f, g, h \in C_X$, $f \neq 0$ et u_0 est la solution particulière de l'équation donnée (0.2). Il est donc satisfaite la condition

$$f(x)u_0'' + g(x)u_0' + h(x)u_0 = 0 \tag{3.9}$$

pour tous $x \in X$. En égalant la solution (3.8′) et u_0, et différentiant l'égalité obtenue deux fois, on obtient la fonction

$$\beta_3(x) \equiv -F(x)u_0'' - G(x)u_0'. \tag{3.10}$$

En la mettant dans l'équation (3.7′) et profitant du fait que $u_0^* \equiv u_0$ (on peut cela obtenir en choisissant convenablement les constantes C_1 et C_2), nous obtenons l'équation

$$F(x)u'' + G(x)u' - \Big(F(x)u_0'' + G(x)u_0'\Big)u_0^{-1}u = 0. \tag{3.11}$$

Évidemment sa solution particulière est la fonction u_0. En posant maintenant dans (3.11): $F \equiv f$, $G \equiv g$ et profitant du fait (3.9), nous obtenons de l'équation (3.11) l'équation donnée (0.2). 2) Il reste à démontrer le fait qu'existe la généralisation de l'équation donnée (0.2), qui possède la solution particulière plus générale que la solution u_0. En effet, admettant la fonction (3.10) simultanémant dans l'équation (3.7′), et dans la solution (3.8′), et intégrant par parties les expressions obtenues, on obtient l'équation

$$F(x)u'' + G(x)u' - \frac{F(x)u_0'' + G(x)u_0'}{u_0 + \int C_1^* \exp\Big(-\int \big(G(x)/F(x)\big)\,dx\Big)\,dx + C_2^*}u = 0 \tag{3.12}$$

et sa solution particulière en forme

$$u_0^* = u_0 + \int C_1^* \exp\Big(-\int \big(G(x)/F(x)\big)\,dx\Big)\,dx + C_2^*, \tag{3.13}$$

où C_1^* et C_2^* – Ctes réelles arbit. Si $C_1^* = C_2^* = 0$, $F(x) \equiv f(x)$, $G(x) \equiv g(x)$, alors l'équation (3.12), d'après l'identité (3.9) se réduit à l'équation (0.2). Elle est donc sa généralisation comme l'équation (3.11). Si au moins l'une de constantes C_1^*, C_2^* est différente de zéro, alors les solutions particulières des équations (3.11) et (3.12) ne sont pas identiques. Cela finit la démonstration. ∎

Nous avons borné cette démonstration à profiter de l'équation (3.7). Remarquons que dans [8], on a donné quatre sous-classes de l'équation (0.2) à la même généralité. Il en résulte, que pour chaque équation en forme (0.2) pour laquelle sa solution particulière est connue, on peut construire au plus quatre sur-classes de l'équation donnée (0.2) plus générale de cette équation. Quelques-unes de ces classes peuvent être identiques.

Exemple 3.8 – Généralisations de l'équation (0.2) à coefficients constants.
Soit: $u'' + pu' + qu = 0$ une équation linéaire, où $p, q \in \mathbb{R}$. Son équation caractéristique a la forme

$$r^2 + pr + q = 0. \tag{3.14}$$

On a si: $\Delta > 0$, $r_1 \neq r_2$; $\Delta = 0$, $r_1 = r_2$; $\Delta < 0$, r_1 – complexe et $r_2 = \bar{r}_1$. Chacune de ses solutions particulières a la forme

$$u_0 = e^{rx}, \tag{3.15}$$

à l'exception de la deuxième solution linéairement indépendante si $\Delta = 0$, laquelle a la forme $u_0 = x\exp\bigl(-(px)/2\bigr)$. De (3.11) et (3.15), nous obtenons la classe

$$F(x)u'' + G(x)u' - \bigl(F(x)r^2 + G(x)r\bigr)u = 0, \tag{3.16}$$

qui comprend cinq sous-classes, si r admet successivement les valeurs des racines de l'équation (3.14). En mettant: $F(x) \equiv 1$, $G(x) \equiv p$, et profitant du fait que chaque fois r est la racine de (3.14), on obtient de (3.16) l'équation donnée. Remarquons que les classes (3.16) pour les racines complexes de (3.14) ne sont pas réelles. Pour les obtenir, il faut prendre $u_0^* = \mathrm{Re}\bigl(e^{rx}\bigr)$, et ensuite $u_0^{**} = \mathrm{Im}\bigl(e^{rx}\bigr)$ et mettre en l'équation (3.11). Pour la deuxième solution linéairement indépendante, si $\Delta = 0$, on obtient la classe

$$F(x)u'' + G(x)u' - \Bigl(F(x)\bigl(-p + (p^2x)/4\bigr) + G(x)\bigl(1 - (px)/2\bigr)\Bigr)x^{-1}u = 0, \tag{3.17}$$

qui se réduit pour $F(x) \equiv 1$, $G(x) \equiv p$ et $p^2 = 4q$ à l'équation donnée.

On peut aussi donner les équations plus générales que les équations (3.16) et (3.17) en profitant de l'équation (3.12). Toutes ces équations, d'après la connaissance de leurs solutions particulières, sont effectivement intégrables (cf. la formule (0.6)).

On peut trouver analogiquement les généralisations de l'équation de Euler: $x^2u'' + pxu' + qu = 0$, où $p, q \in \mathbb{R}$ – aussi effectivement intégrables.

Exemple 3.9 Dans le travail [1], p. 83, on trouve l'équation (7.15) qui en forme correcte s'écrit comme ci-dessous

$$u'' + \left(P - \frac{Q'}{Q}\right)u' + Q\frac{(f-1)Q - Pv}{v^2}u = 0$$

où $v = C + \int fQ\,dx$, $f, P \in C_X$, $Q \in C_X^1$, $Q \neq 0$, C – Cte réelle arbit. Sa solution particulière est la fonction $u_0 = \exp\bigl(\int (Q/v)\,dx\bigr)$, et son troisième coefficient dépend de trois fonctions arbitraires et d'une constante. En profitant de l'équation (3.12), on obtient sa généralisation en forme

$$F(x)u'' + G(x)u' - \frac{F(x)u_0'' + G(x)u_0'}{u_0 + I(x)}u = 0, \tag{3.18}$$

où u_0 est la solution particulière citée ci-dessus, et

$$I(x) \equiv \int C_1^* \exp\bigl(-\int (G(x)/F(x))\,dx\bigr)\,dx + C_2^*.$$

Sa solution particulière est évidemment la fonction (3.13) dans laquelle $u_0 = \exp\bigl(\int (Q/v)\,dx\bigr)$, où v comme ci-dessus. La solution particulière de (3.18) u_0^* dépend ici de quatre fonctions arbitraires. En mettant dans l'équation (3.18) les fonctions: $F \equiv 1$, $G \equiv (P - Q'/Q)$ et $C_1^* = C_2^* = 0$, on obtient l'équation (7.15) du travail [1].

En faisant analogiquement, on peut introduire les généralisations effectivement intégrables d'équations – les plus générales – des travaux [2] et [13].

Exemple 3.10 Construction des surclasses de l'équation effectivement intégrable pour laquelle une solution particulière est connue.

Considérons l'équation du type (0.2) de [4] n° 2.412a en la signifiant par

$$x^2 \ln x\, u'' + u = 0, \qquad \text{pour } x > 0. \tag{3.19}$$

Sa solution particulière a la forme

$$u_0 = \ln x, \qquad \text{pour } x > 0. \tag{3.20}$$

Dans le travail [8] on cite trois classes d'équations (4.5), (4.6), (4.7) en formes

$$\Bigl(\bigl(-\beta_3(x) - g(x)u_0'\bigr)/u_0''\Bigr)u'' + g(x)u' + h(x)u = 0, \tag{3.21}$$

$$f(x)u'' + \Bigl(\bigl(-\beta_3(x) - f(x)u_0''\bigr)/u_0'\Bigr)u' + h(x)u = 0, \tag{3.22}$$

$$f(x)u'' + g(x)u' + \beta_3(x)u_0^{*-1}u = 0, \tag{3.23}$$

où u_0 pour l'équation (3.21) et (3.22) a la forme

$$u_0 = \beta_3(x)/h(x), \tag{3.24}$$

et u_0^* pour l'équation (3.23) a la forme

$$u_0^* = \int \Bigl[\exp\Bigl(-\int \frac{g}{f}\,dx\Bigr)\Bigl(C_1 - \int \frac{\beta_3}{f} \exp\bigl(\int \frac{g}{f}\,dx\bigr)\,dx\Bigr)\Bigr]\,dx + C_2, \tag{3.25}$$

où C_1, C_2 – Ctes arbit. Des faits (3.20) et (3.24) résulte que la formule

$$\beta_3(x) = h(x)\ln x \tag{3.26}$$

a lieu. En mettant succéssivement la solution (3.20) et ses dérivées, et la fonction (3.26) dans les équations (3.21) et (3.22), nous obtenons les équations:

$$(3.21') \qquad \big(x^2 \ln x\, h(x) + xg(x)\big)u'' + g(x)u' + h(x)u = 0,$$

$$(3.22') \qquad f(x)u'' + \big(f(x)/x - x\ln x\, h(x)\big)u' + h(x)u = 0.$$

Leur solution particulière est la fonction (3.20). Ces deux équations sont les généralisations de l'équation (3.19) et par le même 2.412a de [4].

Du fait que u_0 est la solution de l'équation (0.2) et $\beta_3(x) = h(x)u_0$ résulte qu'elle est définie aussi par la rélation

$$(3.27) \qquad \beta_3(x) = -f(x)u_0'' - g(x)u_0'.$$

En mettant la fonction (3.27) dans la formule (3.25), et intégrant par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned}
u_0^* &= \int \Big[\exp\Big(-\int \frac{g}{f}dx\Big)\Big(C_1 + \int \big(u_0'' + \frac{g}{f}u_0'\big)\exp\big(\int \frac{g}{f}dx\big)dx\Big)\Big]dx + C_2\\
&= \int \Big[\exp\Big(-\int \frac{g}{f}dx\Big)\Big(C_1 + \int u_0''\exp\big(\int \frac{g}{f}dx\big)dx + \int u_0'\frac{g}{f}\exp\big(\int \frac{g}{f}dx\big)dx\Big)\Big]dx + C_2\\
&= \int \exp\big(-\int \frac{g}{f}\,dx\big)\Big(C_1 + u_0'\exp\big(\int \frac{g}{f}\,dx\big)\Big)dx + C_2\\
&= C_1\int \exp\big(-\int \frac{g}{f}\,dx\big)\,dx + \int u_0'\,dx + C_2\\
&= u_0 + C_1\int \exp\big(-\int \frac{g}{f}\,dx\big)\,dx + C_2.
\end{aligned}$$

Nous avons donc obtenu pour la solution de l'équation (3.23) la fonction

$$(3.28) \qquad u_0^* = u_0 + C_1\int \exp\Big(-\int \big(g(x)/f(x)\big)\,dx\Big)\,dx + C_2,$$

où C_1, C_2 – Ctes réelles arbit. En mettant maintenant les fonctions (3.27) et (3.28) dans l'équation (3.23), nous obtenous l'équation

$$(3.23^*) \qquad f(x)u'' + g(x)u' - \frac{f(x)u_0'' + g(x)u_0'}{u_0 + C_1\int\exp\big[-\int\big(g(x)/f(x)\big)\,dx\big]\,dx + C_2}u = 0.$$

Sa solution particulière est la fonction (3.28). C'est la plus forte généralisation de l'équation (3.19), parce que la fonction u_0 peut être totalement arbit. $u_0 \in C_X^2$. Si $C_1^2 + C_2^2 > 0$, la fonction (3.20) n'est pas la solution particulière de l'équation (3.23*). Si $C_1 = C_2 = 0$ pour la fonction (3.20), nous obtenons l'équation

$$(3.23') \qquad f(x)u'' + g(x)u' + \frac{f(x) - xg(x)}{x^2\ln x}u = 0,$$

pour laquelle la fonction (3.20) est sa solution particulière. Nous avons obtenu les trois équations (3.21′), (3.22′) et (3.23′), qui possèdent la même généralité et l'une qui est la plus générale et pour laquelle sa solution particulière est connue.

4. Présentation symbolique de méthode de l'intégrale particulière pour l'équation linéaire du troisième ordre. La méthode de l'intégrale particulière pour l'équation (0.3) consiste à l'hypothèse de connaissance ses deux solutions particulières u_1 et u_2 linéairement indépendantes, à profiter d'équations (0.3*), desquelles – d'après la connaissance des solutions u_1 et u_2 – résulte l'existence des fonctions continues α_i et β_i $(i = 1, \dots, 7)$ définies par les égalités

$$L_{2i-1}(u_1) = \alpha_i \quad \text{et} \quad L_{2i}(u_1) = \alpha_i, \tag{4.1}$$

$$L_{2i-1}(u_2) = \beta_i \quad \text{et} \quad L_{2i}(u_2) = \beta_i; \tag{4.2}$$

à trouver les opérateurs inverses L_{2i-1}^{-1}, L_{2i}^{-1} par rapport aux opérateurs L_{2i-1}, L_{2i}; à l'introduction des systèmes de conditions de l'intégrabilité effective en forme

$$L_{2i}\big(L_{2i-1}^{-1}(\alpha_i)\big) = \alpha_i, \tag{4.3}$$

$$L_{2i}\big(L_{2i-1}^{-1}(\beta_i)\big) = \beta_i; \tag{4.4}$$

ou en forme

$$L_{2i-1}\big(L_{2i}^{-1}(\alpha_i)\big) = \alpha_i, \tag{4.3$'$}$$

$$L_{2i-1}\big(L_{2i}^{-1}(\beta_i)\big) = \beta_i, \tag{4.4$'$}$$

où $L_{2i-1}^{-1}(\alpha_i) = u_1$, $L_{2i-1}^{-1}(\beta_i) = u_2$ designent les solutions symboliques de première couple d'égalités (4.1), (4.2); et $L_{2i}^{-1}(\alpha_i) = u_1$, $L_{2i}^{-1}(\beta_i) = u_2$ designent les solutions symboliques de la deuxième couple d'égalités (4.1), (4.2) $(i = 1, \dots, 7)$. Des conditions (4.3) et (4.4) ou (4.3$'$) et (4.4$'$), on détermine – si cela est possible – les classes effectivement intégrables de l'équation (0.3) – c.-à-d. les telles classes pour lesquelles les fonctions

$$u_1 = L_{2i-1}^{-1}(\alpha_i), \tag{4.5}$$

$$u_2 = L_{2i-1}^{-1}(\beta_i) \tag{4.6}$$

simultanément, ou respectivement les fonctions

$$u_1 = L_{2i}^{-1}(\alpha_i), \tag{4.5$'$}$$

$$u_2 = L_{2i}^{-1}(\beta_i) \tag{4.6$'$}$$

sont leurs solutions particulières. Évidemment, en vetru des définitions d'opérateurs L_j $(j = 1, \dots, 14)$ (cf. les formules (1.3)), on ne peut pas obtenir pour chaque opérateur L_j son opérateur inverse L_j^{-1}.

Remarquons donc, que d'après les identités (4.1) et (4.2), et les formules (1.3) – les opérateurs L_{2i-1}^{-1} sont effectivement déterminables pour $i = 1, \dots, 6$, mais les opérateurs L_{2i}^{-1} seulement en cas si $i = 5$. De là résulte que de conditions (4.3) et (4.4), on peut obtenir six conditions nécessaires et suffisantes d'intégrabilité effective de l'équation (0.3) – non symboliques; et du système (4.3$'$) et (4.4$'$) seulement l'une telle condition. Cependant nous remarquons, qu'on peut construire de plus les telles conditions en introduisant les conditions mixtes:

$$L_{2i}\big(L_{2s-1}^{-1}(\alpha_s)\big) = \alpha_i, \tag{4.7}$$

$$L_{2i}\big(L_{2s-1}^{-1}(\beta_s)\big) = \beta_i, \tag{4.8}$$

où $i \neq s$, $i = 1, \ldots, 6$ et $s = 1, \ldots, 6$. En les résolvant on peut obtenir beaucoup de sous-classes de l'équation (0.3) effectivement intégrables. Nous ne nous occupons de tels critères dans ce travail en se concentrant sur les critères (4.3) et (4.4), (4.3′) et (4.4′).

Pour la meilleure lisibilité de ce travail et la détermination des hypothèses les plus faibles, et pour faire de choix des critères profitables, nous présenterons toutes les conditions (4.3) et (4.4), (4.3′) et (4.4′) en formes développées. Nous avons succéssivement:

La première série:
pour $i = 1$:
les hypothèses: $p_0 p_3 \neq 0,\ w(u_1, u_2) \neq 0,\ w'_x(u_1, u_2) \neq 0,\ w(u'_1, u'_2) \neq 0,$

critère symbolique		critère développé
(4.3_1)	$L_2\big(L_1^{-1}(\alpha_1)\big) = \alpha_1,$	$-p_1 u''_1 - p_2 u'_1 - p_3 u_1 = \alpha_1,$
	(H)	
(4.4_1)	$L_2\big(L_1^{-1}(\beta_1)\big) = \beta_1;$	$-p_1 u''_2 - p_2 u'_2 - p_3 u_2 = \beta_1;$

les solutions:

$$u_1 = \iiint (\alpha_1/p_0)\, dx^3, \tag{4.9_1}$$

$$u_2 = \iiint (\beta_1/p_0)\, dx^3; \tag{4.9_1^*}$$

pour $i = 2$:
les hypothèses: $p_0 p_1 p_3 \neq 0,\ w(u_1, u_2) \neq 0,\ w'_x(u'_1, u'_2) \neq 0,\ \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u'''_1 & u'''_2 \end{vmatrix} \neq 0,$

critère symbolique		critère développé
(4.3_2)	$L_4\big(L_3^{-1}(\alpha_2)\big) = \alpha_2,$	$-p_0 u'''_1 - p_2 u'_1 - p_3 u_1 = \alpha_2,$
	(I)	
(4.4_2)	$L_4\big(L_3^{-1}(\beta_2)\big) = \beta_2;$	$-p_0 u'''_2 - p_2 u'_2 - p_3 u_2 = \beta_2;$

les solutions:

$$u_1 = \iint (\alpha_2/p_1)\, dx^2, \tag{4.9_2}$$

$$u_2 = \iint (\beta_2/p_1)\, dx^2; \tag{4.9_2^*}$$

pour $i = 3$:
les hypothèses: $p_0p_2p_3 \neq 0,\ w(u_1, u_2) \neq 0,\ w(u_1'', u_2'') \neq 0,\ \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1''' & u_2''' \end{vmatrix} \neq 0,$
critère symbolique | critère développé

(4.3$_3$) $L_6\big(L_5^{-1}(\alpha_3)\big) = \alpha_3,$ $\qquad -p_0u_1''' - p_1u_1'' - p_3u_1 = \alpha_3,$

(J)

(4.4$_3$) $L_6\big(L_5^{-1}(\beta_3)\big) = \beta_3;$ $\qquad -p_0u_2''' - p_1u_2'' - p_3u_1 = \beta_3;$

les solutions:

(4.9$_3$) $$u_1 = \int (\alpha_3/p_2)\, dx,$$

(4.9$_3^*$) $$u_2 = \int (\beta_3/p_2)\, dx;$$

pour $i = 4$:
les hypothèses: $p_0p_3 \neq 0$, $w(u_1, u_2) \neq 0$, $w(u_1', u_2') \neq 0$, $w(u_1'', u_2'') \neq 0$, $\begin{vmatrix} u_1' & u_2' \\ u_1''' & u_2''' \end{vmatrix} \neq 0,$
critère symbolique | critère développé

(4.3$_4$) $L_8\big(L_7^{-1}(\alpha_4)\big) = \alpha_4,$ $\qquad -p_0u_1''' - p_1u_1'' - p_2u_1' = \alpha_4,$

(K)

(4.4$_4$) $L_8\big(L_7^{-1}(\beta_4)\big) = \beta_4;$ $\qquad -p_0u_2''' - p_1u_2'' - p_2u_2' = \beta_4;$

les solutions:

(4.9$_4$) $$u_1 = \alpha_4/p_3,$$
(4.9$_4^*$) $$u_2 = \beta_4/p_3;$$

pour $i = 5$:
les hypothèses: $p_0p_3 \neq 0,\ w(u_1, u_2) \neq 0,$
critère symbolique | critère développé

(4.3$_5$) $L_{10}\big(L_9^{-1}(\alpha_5)\big) = \alpha_5,$ $\qquad -p_2u_1' - p_3u_1 = \alpha_5,$

(L)

(4.4$_5$) $L_{10}\big(L_9^{-1}(\beta_5)\big) = \beta_5;$ $\qquad -p_2u_2' - p_3u_2 = \beta_5;$

les solutions:

(4.9$_5$)

$$u_1 = \iint \exp\Bigl(-\int (p_1/p_0)dx\Bigr)\Bigl[\int (\alpha_5/p_0)\exp\Bigl(\int (p_1/p_0)dx\Bigr)dx + K\Bigr]dx^2 + C_1x + C_2,$$

(4.9$_5^*$)

$$u_2 = \iint \exp\Bigl(-\int (p_1/p_0)dx\Bigr)\Bigl[\int (\beta_5/p_0)\exp\Bigl(\int (p_1/p_0)dx\Bigr)dx + K^*\Bigr]dx^2 + C_1^*x + C_2^*;$$

pour $i = 6$:
les hypothèses: $p_0p_1p_3 \neq 0,\ w(u_1, u_2) \neq 0,\ \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1''' & u_2''' \end{vmatrix} \neq 0,$
critère symbolique critère développé

(4.3$_6$) $L_{12}\bigl(L_{11}^{-1}(\alpha_6)\bigr) = \alpha_6,$ $-p_0u_1''' - p_3u_1 = \alpha_6,$

(M)

(4.4$_6$) $L_{12}\bigl(L_{11}^{-1}(\beta_6)\bigr) = \beta_6;$ $-p_0u_2''' - p_3u_2 = \beta_6;$

les solutions:

(4.9$_6$)

$$u_1 = \int \exp\Bigl(-\int (p_2/p_1)\,dx\Bigr)\Bigl[\int (\alpha_6/p_1)\exp\Bigl(\int (p_2/p_1)\,dx\Bigr)dx + K\Bigr]\,dx + C_1,$$

(4.9$_6^*$)

$$u_2 = \int \exp\Bigl(-\int (p_2/p_1)\,dx\Bigr)\Bigl[\int (\beta_6/p_1)\exp\Bigl(\int (p_2/p_1)\,dx\Bigr)dx + K^*\Bigr]\,dx + C_1^*;$$

La deuxièmeme série:
pour $i = 5$:
les hypothèses: $p_0p_2p_3 \neq 0,\ w(u_1, u_2) \neq 0,\ w(u_1'', u_2'') \neq 0,$
critère symbolique critère développé

(4.3$_5'$) $L_9\bigl(L_{10}^{-1}(\alpha_5)\bigr) = \alpha_5,$ $p_0u_1''' + p_1u_1'' = \alpha_5,$

(N)

(4.4$_5'$) $L_9\bigl(L_{10}^{-1}(\beta_5)\bigr) = \beta_5;$ $p_0u_2''' + p_1u_2'' = \beta_5;$

les solutions:

(4.9$_5'$) $$u_1 = \exp\Bigl(-\int (p_3/p_2)\,dx\Bigr)\Bigl[K - \int (\alpha_5/p_2)\exp\Bigl(\int (p_3/p_2)\,dx\Bigr)\,dx\Bigr],$$

(4.9$_5'^*$) $$u_2 = \exp\Bigl(-\int (p_3/p_2)\,dx\Bigr)\Bigl[K^* - \int (\beta_5/p_2)\exp\Bigl(\int (p_3/p_2)\,dx\Bigr)\,dx\Bigr].$$

De chaque critère (H)–(K) on peut obtenir trois équations en forme (0.3) et de critères (L)–(N) de chaque seulement une telle équation. Généralement de ces critères on peut obtenir quinze équations en forme (0.3) pour lesquelles leurs solutions particulières sont déterminées ci-dessus. Les conditions citées ci-dessus à l'exception de la condition (H) (cf. [9], p. 749) n'étaient pas en aucun lieu publiées. Parce que cette condition est satisfaite à cause des plus faibles hypothèses: $w(u_1, u_2) \neq 0$ et $p_0p_3 \neq 0$ et u_1 et $u_2 \in C^3_X$, donc nous la profiterons dans les considérations qui suivrent. En résolvant le système (H) par rapport au couple (p_2, p_3), nous obtenons l'équation

$$(4.10_1) \qquad p_0(x)u''' + p_1(x)u'' + \frac{vu_2 - zu_1}{w}u' + \frac{zu_1' - vu_2'}{w}u = 0,$$

où: $w = w(u_1, u_2) = u_1u_2' - u_1'u_2$, $v = \alpha_1 + p_1u_1''$, $z = \beta_1 + p_1u_2''$. Ses solutions particulières, d'après (4.5) et (4.6) pour $i = 1$ et les rélations (4.1) et (4.2), et le premier système de formules (1.3), sont les fonctions

$$(4.9_1) \qquad u_1 = \iiint \big(\alpha_1(x)/p_0(x)\big)\,dx^3,$$

$$(4.9_1^*) \qquad u_2 = \iiint \big(\beta_1(x)/p_0(x)\big)\,dx^3,$$

(cf. aussi ci-dessus – les mêmes numéros).

Nous remarquons encore, que le système (4.3_1) et (4.4_1) (cf. aussi (H)), on peut résoudre par rapport aux couples (p_1, p_3) et (p_1, p_2). Cela permet d'obtenir les équations suivantes:

$$(4.10_2) \qquad p_0(x)u''' + \frac{ku_2 - lu_1}{w_x'}u'' + p_2(x)u' + \frac{lu_1'' - ku_2''}{w_x'}u = 0,$$

où: $w_x' = \big(u_1u_2' - u_1'u_2\big)_x' = u_1u_2'' - u_1''u_2$, $k = \alpha_1 + p_2u_1'$, $l = \beta_1 + p_2u_2'$;

$$(4.10_3) \qquad p_0(x)u''' + \frac{mu_2' - nu_1'}{w(u_1', u_2')}u'' + \frac{nu_1'' - mu_2''}{w(u_1', u_2')}u' + p_3(x)u = 0,$$

où: $w(u_1', u_2') = u_1'u_2'' - u_1''u_2'$, $m = \alpha_1 + p_3u_1$, $n = \beta_1 + p_3u_2$.
Il est évident que pour l'équation (4.10_2) il faut admettre de plus: $w_x'(u_1, u_2) \neq 0$, et pour l'équation (4.10_3): $w(u_1', u_2') \neq 0$. Leurs solutions particulières sont les mêmes comme pour l'équation (4.10_1) (cf. (4.9_1), (4.9_1^*)).

Remarquons encore que les mêmes hypothèses comme pour obtenir l'équation (4.10_1) possède le critère (L). De ce critère on peut obtenir seulement l'une équation

$$p_0(x)u''' + p_1(x)u'' + \frac{\alpha_5u_2 - \beta_5u_1}{w}u' + \frac{\beta_5u_1' - \alpha_5u_2'}{w}u = 0,$$

où: w – comme ci-dessus. Ses solutions particulières (4.9_5) et (4.9_5^*) sont trop compliquées. Ce critère ne donne pas la possibilité de construire les équations analogiques aux équations (4.10_2) et (4.10_3). C'est pourquoi nous prendrons dans les considérations qui suivront le critère (H) duquel résulte l'équation (4.10_1).

Théorème 4.1 Soient u_1 et u_2 deux solutions particulières linéairement indépendantes de l'équation donnée en forme (0.3), dont les coefficients satisfont aux hypothèses: $p_i(x) \in C_X$, $i = 0, 1, 2, 3$; $p_0(x)p_3(x) \neq 0$, $w(u_1, u_2) \neq 0$, $w'_x(u_1, u_2) \neq 0$, $w(u'_1, u'_2) \neq 0$ sur X, alors: A) one peut la construire au moins d'un des critères

$$\text{(H)} \qquad \begin{aligned} -p_1u''_1 - p_2u'_1 - p_3u_1 &= \alpha_1, \\ -p_1u''_2 - p_2u'_2 - p_3u_2 &= \beta_1; \end{aligned} \qquad \text{(critère symbol. } (4.3_1) \text{ et } (4.4_1)),$$

ou

$$\text{(L)} \qquad \begin{aligned} -p_2u'_1 - p_3u_1 &= \alpha_5, \\ -p_2u'_2 - p_3u_2 &= \beta_5; \end{aligned} \qquad \text{(critère symbol. } (4.3_5) \text{ et } (4.4_5)),$$

en trouvant les fonctions correspondantes α_i et β_i où $i =: 1, 5$ et choisissant les Ctes arbitraires (si cela est nécessaire); B) on peut construire au moins une équation différentielle en forme (0.3) plus générale de l'équation donnée et possédant les mêmes deux solutions particulières que l'équation donnée ou les solutions particulières u_1^*, u_2^* correspondant à l'équation généralisée.

Remarque 4.2 Les fonctions α_i et β_i pour $i =: 1, 5$ sont déterminées par les rélations (4.1) et (4.2) de ce travail et d'après les hypothèses citées dans le Th. 4.1 toutes sont continues. D'ici résulte que les critères (H) et (L) et les solutions particulières: (4.9_1), (4.9_1^*), (4.9_5) et (4.9_5^*) sont bien déterminées.

Remarque 4.3 Les critères cités dans le Th. 4.1 ce sont les critères qui sont satisfaits à condition que les plus faibles hypothèses aient lieu. Il est évident qu'on peut profiter d'autres critères donnés dans ce travail (I–K, M, N), mais leurs hypothèses sont plus fortes et par ce fait bornent l'ensemble d'équations qu'on peut généraliser p. ex.: $p_1 \neq 0$, $p_2 \neq 0$, $u_1u_2''' - u_1'''u_2 \neq 0$ etc. (cf. p. 273–275 de ce travail).

Remarque 4.4 Les équations (4.10_1), (4.10_2), (4.10_3) citées ci-dessus permettent de construire les trois généralisations de l'équation donnée (0.3) pour laquelle au moins deux solutions particulières sont connues.

Corollaire 4.5 Toutes les équations effectivement intégrables en forme (0.3) (pour chacune de ces équations au moins deux ses solutions particulières linéairement indépendantes sont connues) comprises dans [4, 5, 14], ainsi que données dans des travaux originaux, on peut obtenir de l'équation (4.10_1).

Corollaire 4.6 Pour chaque équation en forme (0.3) effectivement intégrable présentée dans [4, 5, 14], on peut trouver l'équation de même forme – plus générale de l'équation donnée et aussi effectivement intégrable; et pour les équations (0.3) comprises dans les postérieurs travaux originaux que les monographies [4, 5, 14], on peut trouver l'équation qui possède la généralité non moindre que les équations là citées et aussi effectivement intégrable.

DÉMONSTRATION du Th. 4.1. Écrivons l'équation (4.10_1) en forme

$$P_0(x)u''' + P_1(x)u'' + \frac{v^* u_2^* - z^* u_1^*}{w^*} u' + \frac{z^* u_1^{*\prime} - v^* u_2^{*\prime}}{w^*} u = 0, \tag{4.10$_1'$}$$

où: $w^* \equiv u_1^* u_2^{*\prime} - u_1^{*\prime} u_2^*$, $v^* \equiv \alpha_1 + P_1 u_1^{*\prime}$, $z^* \equiv \beta_1 + P_1 u_2^{*\prime}$, et ses deux solutions particulières linéairement indépendantes ont les formes

$$u_1^* = \iiint \big(\alpha_1(x)/P_0(x)\big)\, dx^3, \tag{4.9$_1'$}$$

$$u_2^* = \iiint \big(\beta_1(x)/P_0(x)\big)\, dx^3. \tag{4.9$_1^{*\prime}$}$$

Nous traiterons l'équation (0.3) comme l'équation donnée pour laquelle ses deux solutions particulières u_1 et u_2 linéairement indépendantes sont connues. D'abord nous démontrerons qu'on peut obtenir l'équation (0.3) de l'équation $(4.10_1')$ et de solutions $(4.9_1')$, $(4.9_1^{*\prime})$, les solutions u_1 et u_2. D'après les hypothèses admises les identités citées ci-dessous sont satisfaites pour tout $x \in X$:

$$\begin{aligned} p_0(x)u_1''' + p_1(x)u_1'' + p_2(x)u_1' + p_3(x)u_1 = 0, \\ p_0(x)u_2''' + p_1(x)u_2'' + p_2(x)u_2' + p_3(x)u_2 = 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

En égalant la solution u_1^* avec u_1, et u_2^* avec u_2 – après leurs différentation trois fois, nous obtenons les identités

$$\alpha_1(x) \equiv P_0(x)u_1''', \qquad \beta_1(x) \equiv P_0(x)u_2'''. \tag{4.12}$$

En mettant les expressions (4.12) dans les solutions $(4.9_1')$ et $(4.9_1^{*\prime})$, et intégrant trois fois, nous obtenons les solutions généralisées en formes

$$u_1^* = u_1 + p(x), \qquad u_2^* = u_2 + q(x), \tag{4.9$_1''$}$$

où: $p(x) \equiv \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$, $q(x) \equiv \frac{1}{2}K_1x^2 + K_2x + K_3$, où C_i et K_i – Ctes réelles arbit. Il est évident, qu'on peut choisir les constantes C_i et K_i de telle manière qu'on obtient les deux suites finies d'égalités:

$$\begin{aligned} &u_1^* \equiv u_1, && u_1^{*\prime} \equiv u_1', && u_1^{*\prime\prime} \equiv u_1'', && u_1^{*\prime\prime\prime} \equiv u_1'''; \\ &u_2^* \equiv u_2, && u_2^{*\prime} \equiv u_2', && u_2^{*\prime\prime} \equiv u_2'', && u_2^{*\prime\prime\prime} \equiv u_2'''. \end{aligned} \tag{4.13}$$

En posant maintenant les égalités (4.12) et (4.13) dans l'équation $(4.10_1')$, et dans les symboles w^*, v^*, z^*, nous obtenons l'équation

$$P_0(x)u''' + P_1(x)u'' + \frac{vu_2 - zu_1}{w} u' + \frac{zu_1' - vu_2'}{w} u = 0, \tag{4.14}$$

où: $w \equiv u_1u_2' - u_1'u_2$, $v \equiv P_0u_1''' + P_1u_1''$, $z \equiv P_0u_2''' + P_1u_2''$.
On démontre facilement que les fonctions u_1 et u_2 sont ses solutions particulières. Remarquons que l'équation (4.14) on peut transformer en l'équation

$$P_0(x)u''' + P_1(x)u'' + P_2(x)u' + P_3(x)u = 0, \tag{4.15}$$

dont les coefficients P_2 et P_3 ont les formes

$$\begin{aligned}P_2(x) &\equiv \frac{1}{w}\Big(P_1 - P_0(p_1/p_0)\Big)\big(u_1''u_2 - u_1u_2''\big) + P_0(p_2/p_0),\\ P_3(x) &\equiv \frac{1}{w}\Big(P_1 - P_0(p_1/p_0)\Big)\big(u_1'u_2'' - u_1''u_2'\big) + P_0(p_3/p_0).\end{aligned} \tag{4.16}$$

Nous remarquons, que les coefficients P_2 et P_3 sont construits de deux coefficients P_0 et P_1 arbitraires de l'équation (4.15), et de tous les coefficients de l'équation donnée (0.3) et ses solutions particulières u_1 et u_2 pour lesquelles $w(x) \neq 0$. L'équation (4.15) est évidemment l'une généralisation de l'équation donnée (0.3), qu'on obtient en posant $P_0(x) \equiv p_0(x)$, $P_1(x) \equiv p_1(x)$. Parce que nous connaissons deux ses solutions particulières linéairement intépendantes, alors elle est effectivement intégrable (cf. la formule (0.7)). Cela achève la démonstration de partie A) et la première partie du fragment B) de la thèse.

Pour démontrer ce deuxième fragment, nous remarquons, que nous avons déjà construit les solutions plus générales que les solutions u_1 et u_2 en formes $(4.9_1'')$. Admettons que ces solutions ne se réduisent pas simultanément aux solutions u_1 et u_2 (pour cela il suffit que soit $\sum_{i=1}^{3} C_i^2 + K_i^2 > 0$), et que ces solutions u_1^* et u_2^* sont linéairement indépendantes. Alors, d'après (4.12), (4.11) et le fait que: ${u_1^*}''' \equiv u_1'''$, ${u_2^*}''' \equiv u_2'''$, on peut transformer l'équation $(4.10_1')$ en l'équation

$$P_0(x)u''' + P_1(x)u'' + P_2(x)u' + P_3(x)u = 0, \tag{4.15$'$}$$

dont les coefficients P_2 et P_3 ont les formes suivantes:

$$\begin{aligned}P_2(x) &= \frac{1}{w^*}\Big[\big(P_0/p_0\big)\big[p_1w_1 + p_2w_2 + p_3w_3\big] + P_1w_4\Big],\\ P_3(x) &= \frac{1}{w^*}\Big[\big(P_0/p_0\big)\big[p_1w_5 + p_2w_6 + p_3w_7\big] - P_1w_8\Big],\end{aligned} \tag{4.16$'$}$$

où: $\quad P_0 \neq 0, \quad p_0 \neq 0,$

$$\begin{aligned}
&w^* \neq 0,\\
&w^* = u_1^*{u_2^*}' - {u_1^*}'u_2^*,\\
&w_1 = u_1^*u_2'' - u_1''u_2^*, && w_5 = u_1''{u_2^*}' - {u_1^*}'u_2'',\\
&w_2 = u_1^*u_2' - u_1'u_2^*, && w_6 = u_1'{u_2^*}' - {u_1^*}'u_2',\\
&w_3 = u_1^*u_2 - u_1u_2^*, && w_7 = u_1{u_2^*}' - {u_1^*}'u_2,\\
&w_4 = {u_1^*}''u_2^* - u_1^*{u_2^*}'', && w_8 = {u_1^*}''{u_2^*}' - {u_1^*}'{u_2^*}''.
\end{aligned}$$

Ses solutions particulières sont les fonctions $(4.9_1'')$, alors l'équation $(4.15')$ est effectivement intégrable. Si ses solutions particulières u_1^* et u_2^* prennent les formes: $u_1^* \equiv u_1$, $u_2^* \equiv u_2$ les coefficients $(4.16')$ se réduisent aux coefficients (4.16), si non – l'équation $(4.15')$ est une l'autre généralisation de l'équation donnée (0.3). La démonstration est finie. Cette procédure de démonstration on peut reproduire en profitant des équations (4.10_2) et (4.10_3). ■

Grâce aux généralisations en formes (4.15) et (4.15′), on peut construire les généralisations effectivement intégrables des équations (0.3): à coefficients constantes, l'équation de Euler du troisième ordre et beaucoup d'autres.

Exemple 4.7 Dans [12], p. 350, on trouve l'équation

$$u''' - (3/x)u'' + (6/x^2)u' - (6/x^3)u = 0, \qquad x \neq 0. \tag{4.17}$$

Ses solutions particulières linéairement indépendantes ont les formes: x, x^2, x^3. Admettant comme les solutions particulières connues $u_1 = x$, $u_2 = x^2$, et profitant des formules (4.16), nous obtenons les coefficients P_2 et P_3 en forme

$$P_2(x) \equiv -2\big(P_1(x)/x\big), \qquad\qquad P_3(x) \equiv 2\big(P_1(x)/x^2\big).$$

La généralisation de l'équation (4.17) d'après (4.15) a donc la forme

$$P_0(x)u''' + P_1(x)u'' - 2\big(P_1(x)/x\big)u' + 2\big(P_1(x)/x^2\big)u = 0. \tag{4.17*}$$

Sa troisième solution linéairement indépendante, d'après la formule de Liouville (cf. la dernière expression en (0.7)) a la forme

$$u_3 = x\int\left[\int x^{-3}\exp\Big(-\int\big(P_1(x)/P_0(x)\big)\,dx\Big)\,dx\right]dx,$$

et en conséquence sa solution générale prend la forme

$$u = K_1x + K_2x^2 + K_3x\int\left[\int x^{-3}\exp\Big(-\int\big(P_1(x)/P_0(x)\big)\,dx\Big)\,dx\right]dx.$$

Il est évident que l'équation (4.17*) est la généralisation effectivement intégrable de l'équation (4.17). Nous remarquons encore, que pour obtenir les généralisations de l'équation (4.17) plus forte que la généralisation (4.17*), il faut appliquer dans l'équation (4.15) les formules (4.16′).

5. Remarques finales. L'application de méthode de l'intégrale particulière – comme nous avons cela remarqué dans l'introduction – est possible aussi à l'équation (0.4).
Supposant connu l'un système de $n-1$ solutions particulières

$$u_1, \ldots, u_{n-1} \tag{5.1}$$

de l'équation (0.4), pour lequel son wronskien $w(u_1, \ldots, u_{n-1}) \neq 0$ et profitant p. ex. des opérateurs (1.4), d'après l'équation (0.4*), nous obtenons les systèmes de conditions

$$L^1_{k,n-k}(u_i) = \alpha_{k,i} \qquad \text{et} \qquad L^2_{k,n-k}(u_i) = \alpha_{k,i} \tag{5.2}$$

pour chaque fixé $k = 0, 1, \ldots, n$ et $i = 1, \ldots, n-1$. Pour les opérateurs $L^1_{k,n-k}$, on peut toujours déterminer les opérateurs inverses $L^{1^{-1}}_{k,n-k}$ pour chaque k. Cela permet exprimer les solutions u_i par l'un des coefficients p_i et la fonction correspondante $\alpha_{k,i}$. Fixons donc k. Remarquons que le cas, si $k = 0$, est très commode pour l'interprétation. Nous avons

$$L^1_{0,n}(u_i) = \alpha_{0,i} \quad \text{et} \quad L^2_{0,n}(u_i) = \alpha_{0,i}, \qquad (i = 1, \dots, n-1). \tag{5.3}$$

De la première de ces égalités, on obtient

$$u_i = L^{1^{-1}}_{0,n}(\alpha_{0,i}) = \int \cdots \int \Big(\alpha_{0,i}(x)/p_0(x)\Big)\, dx^n. \tag{5.4}$$

La deuxième égalité (5.3), d'après l'opérateur $L^2_{0,n}$ (cf. (1.4)), en forme développée donne le système

$$-p_1 u_i^{(n-1)} - p_2 u_i^{(n-2)} - \cdots - p_n u_i = \alpha_{0,i}, \qquad (i = 1, \dots, n-1), \tag{5.5}$$

d'où résulte évidemment le système

$$p_2 u_i^{(n-2)} + p_3 u_i^{(n-3)} + \cdots + p_n u_i = -\Big(\alpha_{0,i} + p_1 u_i^{(n-1)}\Big). \tag{5.6}$$

Nous remarquons que son déterminant principal c'est le wronskien de système (5.1) qui par l'hypothèse est différent de zéro. On peut donc résoudre le système (5.6) par rapport au système de coefficients $p_2, \dots, p_n$. Cela permet de construire l'équation (0.4) effectivement intégrable, dont les coefficients p_i $(i = 2, \dots, n)$ sont exprimés par les fonctions continues $\alpha_{0,i}$, les coefficients p_0 et p_1, et par $n-1$ ses solutions particulières u_i $(i = 1, \dots, n-1)$. En profitant d'autres formes d'opérateurs $L^1_{k,n-k}$, $(k = 0, \dots, n)$; et $L^3_{k,n-k}$, $k = 0, \dots, n-1$; (cf. les formules (1.4) et (1.5)), on peut créer les systèmes analogiques au système (5.6) et par le même, d'après l'introduction des hypothèses supplémentaires, on peut obtenir beaucoup de classes effectivement intégrables de l'équation du n-ième ordre.

Il est possible qu'en profitant de réprésentation (0.4*) et (0.4**) de l'équation (0.4), on peut démontrer le théorème analogique au Th. 4.1 dans le cas général. Dans ce travail, nous avons borné la présentation de méthode de l'intégrale particulière en détails aux équations (0.1)–(0.3), en la signalant seulement pour l'équation (0.4), parce que les équations (0.1)–(0.3) sont très souvent appliquées et car cette méthode donne les meilleurs résultats pour les équations linéaires d'inférieurs ordres.

On doit remarquer que l'équation linéaire (0.4) à coefficients réels et constants du quatrième ordre est une équation toujours effectivement intégrable parce que son équation caractéristique on peut toujours résoudre. Dans ce cas on obtient les résultats analogiques que dans le cas de l'équation du second ordre (v. l'exemple 3.8 p. 269).

Dans ce travail les équations obtenues par la méthode de l'intégrale particulière en général ne sont pas citées à l'exception des cas nécessaires (v. démonstrations des théorèmes: les formuls (2.7), (2.11), (3.7), (3.12), (3.16), (3.17)). Par contre, elles sont citées toutes pour les équations (0.1) et (0.2) dans les travaux [6, 7, 8]. Pour les obtenir on doit profiter des équations symboliques en les résolvant par rapport aux coefficients convenables (v. p.ex. le système (4.3_i), (4.4_i), $i = 1, \dots, 6$). Remarquons que la présentation symbolique de la méthode de l'intégrale particulière permet facilement obtenir les convenables systèmes des étudiées équations. Ici le problème principal est la possibilité de trouver les opérateurs inverses aux opérateurs (1.1), (1.2), (1.3), (1.4) et (1.5). En quelques-uns cas cela est relativement simple et dans d'autres presque totalement impossible. La base de trouver des opérateurs inverses constituent les équations différentielles en formes:

$$p_k(x)u^{(n-k)} = \alpha_k(x), \qquad k = 0, 1, \dots, n; \quad n - \text{entier}, \quad n > 1, \tag{5.7}$$

$$p_k(x)u^{(n-k)} + p_{k+1}(x)u^{(n-(k+1))} = \alpha_k(x), \qquad k = 0, 1, \dots, n-1, \tag{5.8}$$

et aussi les simples équations algébriques dans le cas de l'équation de Riccati (0.1). Dans ce travail, dans le cas si celà est impossible – ce fait – est clairement signifié (v. p.ex. ce travail p. 261 et p. 265).

De plus, nous remarquons que l'élargissement des résultats obtenus pour l'équation linéaire du second ordre (0.2) présente le travail [10] dans lequel on donne les résultats obtenus par la transformation des résultats généraux obtenus dans les travaux [6] et [7] pour l'équation de Riccati (0.1). Les résultats parciels pour l'équation (0.2) sont compris aussi à ma note [11] dans laquelle on donne huit critères spéciaux ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_6 = 0$), lesquels satisfaites près de 400 équations citées dans les monographies [4, 5, 14].

Ce travail constitue le revue général et symbolique nos résultats pour les équations (0.1), (0.2) et (0.3) dans le domaine de possibilité d'obtenir leures solutions particulières v. [6]–[9]. Dans ces travaux on cite des critères et aussi les équations différentielles d'eux obtenues en formes développées. La méthode de l'intégrale particulière – ici présentée symboliquement – pour les équations (0.1), (0.2) et (0.3) permet de trouver les classes plus générales lesquelles comprennent les centaines équations citées dans les monographies [4, 5, 14] et aussi données dans les travaux originaux. Des expressions symboliques on peut facilement obtenir les classes citées dans [6]–[9]. On peut traiter les critères obtenus dans les travaux [7, 8, 9, 10] comme les équations différentielles, intégro-différentielles, intégralles avec les fonctions inconnues μ_k, β_j, α_i, β_i et faire d'analyse de possibilité de trouver leurs solutions effectivement, mais cela exige de spécial travail.

Bibliographie

[1] L. M. Berkovič, N. Ch. Rozov, A. M. Èjšinskij, *O samosoprjažennych i privodimych linnejnych diffrencialnych uravnenijach vysšich porjadkov i o nekotorych uravnenijach vtorego porjadka, integriruemych v konečnom vide*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. **230–241** (1968), p. 61–87.

[2] A. M. Èjšinskij, J. D. Kečkić, *Some additions to Kamke's treatise*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. **330–337** (1970), p. 39–43.

[3] E. Kamke, *Differentialgleichungen Reeler Funktionen*, dritte unveränderte Auflage, A.V.G., Leipzig 1956.

[4] E. Kamke, *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen I, Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 6 verbesserte Auflage, A.V.G., Leipzig 1959.

[5] E. Kamke, *Spravočnik po obyknovennym differencialnym uravnenijam*, izdanie vtoroe, G.I. Fiz.–Mat. Lit., Moskva 1961 (traduction de l'allemand).

[6] A. Kapcia, *Compléments aux traités de Kamke et de Murphy, III. Quelques critères suffisants de l'intégrabilité effective de l'équation de Riccati avec deux coefficients arbitraires*, Pub. Inst. Math. (Beograd), (NS) **22 (36)** (1977), p. 119–126.

[7] A. Kapcia, *Compléments aux traités de Kamke et de Murphy, V. Quelques classes de l'équation de Riccati effectivement intégrables avec deux coefficients arbitraires et le troisième dépendant de ces deux et d'une fonction arbitraire*, Publ. Inst. Math. (Beograd), (NS) **26 (40)** (1979), p. 113–129.

[8] A. Kapcia, *Compléments aux traités de Kamke et de Murphy, VII. Une méthode de l'obtention des classes de l'équation différentielle linéaire et homogène du second ordre effectivement intégrables*, Publ. Inst. Math. (Beograd), (NS) **35 (49)** (1984), p. 68–74.

[9] A. Kapcia, *Sur les conséquences de méthode de l'intégrale particulière pour les équations linéaires et l'équation de Riccati*, Differential Equations and Applications II. Proc. Third Conf. 1985, Rousse 1987, p. 743–746.

[10] A. Kapcia, *Compléments aux traités de Kamke et de Murphy, VI. Sur certaine méthode de construction des critères et des classes de l'équation différentielle linéaire et homogène du second ordre.* I partie, Mat. Vesnik **35** (1983) **2**, p. 129–144. II partie, ibid. **35** (1983) **3**, p. 257–272.

[11] A. Kapcia, *Compléments aux traités de Kamke et de Murphy, IV. Quelques critères suffisants d'intégrabilité effective de l'équation différentielle linéaire et homogène du second ordre à deux coefficients arbitraires*, Publ. Inst. Math. (Beograd), (NS) **35 (49)** (1984), p. 61–67.

[12] N. M. Matwiejew, *Metody całkowania równań różniczkowych zwyczajnych*, PWN, Warszawa 1970 (traduction du russe)

[13] R. R. Mkrtumjan, *Ob odnom slučae integriruemosti linejnego uravnenija vtorogo porjadka*, Diff. Urav. XV (1979) **3**, p. 555–559.

[14] G. M. Murphy, *Ordinary Differential Equations and Their Solutions*, Princeton, New Jersey, New York 1960.

[15] W. Nikliborc, *Równania różniczkowe, Część I*, PTM, Warszawa–Wrocław 1951.

Andrzej Kapcia
Institut Mathématique et Informatique, L'École Polytechnique
42-201 Częstochowa, Pologne

(Received: 21.02.2007)