ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE III (1959)

A. PEŁCZYŃSKI (Warszawa)

Uwagi o miarach wektorowych

A. Lapunow [1] udowodnił następujące

TWIERDZENIE (L). *Jeśli X jest dowolnym niepustym zbiorem, $\mathcal{R}$ σ-ciałem podzbiorów X, a $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ miarami bezatomowymi określonymi na $\mathcal{R}$, to zbiór*

$$Z(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n) = \mathop{E}_{p \in R_n} \Big(\sum_{A \in \mathcal{R}} p = \{\nu_1(A), \nu_2(A), \ldots, \nu_n(A)\}\Big) (^1)$$

jest wypukły i domknięty.

Przypominam, że przez miarę rozumiem nieujemną, przeliczalnie addytywną funkcję zbioru przybierającą wartość 0 na zbiorze pustym. Miara nazywa się *bezatomowa*, jeśli spełnia warunek

$$\prod_{A \in \mathcal{R}} \sum_{B \subset A} \big[\big(\nu(A) > 0\big) \Rightarrow \big(0 < \nu(B) < \nu(A)\big)\big].$$

Poniżej podane przykłady wykazują, że w przypadku pozaskończonych ciągów miar twierdzenie (L) na ogół nie zachodzi.

Dokładniej: niech T będzie abstrakcyjnym zbiorem wskaźników; oznaczam przez R^T przestrzeń liniową wszystkich funkcji rzeczywistych określonych na T; niech dalej ν_τ (τ przebiega zbiór T) będzie ciągiem pozaskończonym miar bezatomowych, określonych na σ-ciele $\mathcal{R}$ podzbiorów X; wprowadzam oznaczenie

$$Z(\{\nu_\tau\}) = \mathop{E}_{p \in R^T} \Big(\sum_{A \in \mathcal{R}} p = \{\nu_\tau(A)\}\Big).$$

Pokażę, że:

a. zbiór $Z(\{\nu_\tau\})$ nie musi być wypukły,

b. zbiór $Z(\{\nu_\tau\})$ rozpatrywany jako podzbiór jakiejś przestrzeni Banacha może nie być domknięty.

PRZYKŁAD 1. Niech $X = \langle 0, 1\rangle$; jako $\mathcal{R}$ przyjmę ciało wszystkich podzbiorów odcinka $\langle 0, 1\rangle$ mierzalnych w sensie Lebesgue'a.

---

(1) Symbolem R_n oznaczam przestrzeń kartezjańską n-wymiarową.

Ustawmy liczby wymierne odcinka $\langle 0, 1\rangle$ w ciąg nieskończony $\{w_i\}$. Miary ν_i $(i = 1, 2, \ldots)$ określam równością

$$\nu_i(A) \doteq \frac{1}{1-\omega_i}\, |A\cdot\langle w_i, 1\rangle| \tag{1}$$

(gdzie $|C|$ oznacza wartość miary Lebesgue'a dla zbioru C).

Zbiór $Z(\{\nu_i\})$ nie jest wypukły. W przeciwnym bowiem razie wraz z elementami $\{\nu_i(\Lambda)\} = \{0, 0, \ldots\}$ (symbolem Λ oznaczam zbiór pusty), $\{\nu_i(\langle 0, 1\rangle)\} = \{1, 1, \ldots\}$ zbiór $Z(\{\nu_i\})$ powinienby również zawierać element $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\}$.

Przypuśćmy, że $\{\nu_i(B)\} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\}$. Jeśli więc w_i i w_j $(w_i < w_j)$ są dowolnymi liczbami wymiernymi, to wobec (1) mamy

$$\nu_i(B) = \frac{1}{1-w_i}\,|B\cdot\langle w_i, 1\rangle| = \frac{1}{2}, \qquad \nu_j(B) = \frac{1}{1-w_j}|B\cdot\langle w_i, 1\rangle| = \frac{1}{2};$$

stąd

$$|B\cdot\langle w_i, w_j\rangle| = |B\cdot\langle w_i, 1\rangle| - |B\cdot\langle w_j, 1\rangle| = \tfrac{1}{2}(w_j - w_i)$$

i ostatecznie

$$|B\cdot\langle w_i, w_j\rangle| / (w_j - w_i) = \tfrac{1}{2}.$$

Z tej ostatniej relacji wynika, że zbiór B ma w każdym punkcie odcinka $\langle 0, 1\rangle$ gęstość $\frac{1}{2}$, co jak wiadomo jest niemożliwe([2]).

Uwaga. Ponieważ $|\nu_i(A)| \leqslant 1$ dla $i = 1, 2, \ldots$ i dla każdego $A \in \mathcal{R}$, więc przyjmując

$$\nu_i^* = \frac{1}{i}\,\nu_i \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

możemy zbiór $Z(\{\nu_i^*\})$ traktować jako podzbiór przestrzeni Hilberta l^2. Ponieważ zbiór $Z(\{\nu_i\})$ nie był wypukły, więc też zbiór $Z(\{\nu_i^*\})$ nie będzie wypukły. Łatwo też pokazać, że zbiór $Z(\{\nu_i^*\})$ nie jest domknięty, gdyż na mocy twierdzenia (L) dla pewnych $|\xi_{j+1}^{(j)}| \leqslant 1/(j+1)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ punkt

$$p_j = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{j}, \xi_{j+1}^{(j)}, \xi_{j+2}^{(j)}, \ldots\right\} \in Z(\{\nu_i^*\}),$$

a punkt $\lim\limits_{j\to\infty} p_j = \frac{1}{2}\{1, \frac{1}{2}, \ldots\} \operatorname{non} \in Z(\{\nu_i^*\})$.

([2]) Jak zauważył S. Gładysz, można w podobny sposób (korzystając z twierdzenia o gęstości) udowodnić, że jeśli zbiór $Z(\{\nu_i\})$ zawiera skończony układ wektorów, to nie zawiera żadnego punktu sympleksu rozpiętego na tych wektorach różnego od wierzchołków.

PRZYKŁAD 2. Niech X będzie dowolnym zbiorem nieskończonym, $\mathcal{R}$ — jakimś σ-ciałem podzbiorów X, ν — dowolną miarą bezatomową określoną na $\mathcal{R}$, unormowaną, tzn. że $\nu(X) = 1$. Niech

$$T = \mathop{E}_{A \in \mathcal{R}} \left(\nu(A) = \tfrac{1}{2}\right).$$

Zauważmy, że jeżeli $A \in T$, to też $X - A \in T$. Każdemu zbiorowi $A \in T$ przyporządkuję miarę bezatomową ν_A w następujący sposób:

$$\nu_A(C) = 2\nu(CA) \qquad (C \in \mathcal{R}).$$

Zbiór $Z(\{\nu_A\})$ nie jest wypukły. W przeciwnym bowiem razie zbiór $Z(\{\nu_A\})$ wraz z elementami $\{\nu_A(X)\}$ oraz $\{\nu_A(A)\}$ musiałby zawierać element $\frac{1}{2}\left(\{\nu_A(X)\} + \{\nu_A(A)\}\right)$; musiałby więc istnieć taki zbiór B, $B \in \mathcal{R}$, że dla każdego $A \in T$ $\nu_A(B) = \frac{1}{2}$. To jednak jest niemożliwe. Mamy bowiem dla jakiegoś $A \in T$

$$\nu(B) = \nu\left(B\left(A + (X - A)\right)\right) = \nu(BA) + \nu\left(B(X - A)\right) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(\nu_A(B) + \nu_{X-A}(B)\right) = \tfrac{1}{2}.$$

Więc $B \in T$, przeto i $X - B \in T$. Musi więc być $\nu_{X-B}(B) = \frac{1}{2}$, co jest oczywiście niemożliwe.

Praca cytowana

[1] А. А. Ляпунов, *О вполне аддитивных векторных функциях*, Изв. А. Н СССР 4 (1940), str. 34-71.

А. ПЕЛЧИНСКИЙ (Варшава)

ЗАМЕЧАНИЯ О ВЕКТОРНЫХ МЕРАХ

РЕЗЮМЕ

А. Ляпунов доказал следующую теорему:

Если X непустое множество, $\mathcal{R}$ — σ-алгебра подмножеств X, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ — σ-меры, определённые на $\mathcal{R}$, то множество точек n-мерного декартова пространства R_n

$$Z(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n) = \mathop{E}_{p \in R_n} \Big(\sum_{A \in \mathcal{R}} \left(p = \{\nu_1(A), \nu_2(A), \ldots, \nu_n(A)\}\right)\Big)$$

выпукло и замкнуто.

В этой работе даны примеры, показывающие, что теорема Ляпунова неверна, если конечные последовательности мер заменить бесконечными.

A. PEŁCZYŃSKI (Warszawa)

REMARKS ON THE VECTOR MEASURES

SUMMARY

Lapunoff has proved the following theorem:

If X denotes a non-empty set, $\mathcal{R}$ a σ-additive class of the subsets of X, $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ non-atomic σ-measures defined on $\mathcal{R}$, then the set of points of the n-dimensional Cartesian space R_n

$$Z(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n) = \mathop{E}_{p \in R_n} \Big(\sum_{A \in \mathcal{R}} (p = \{\nu_1(A), \nu_2(A), \ldots, \nu_n(A)\}) \Big)$$

is convex and closed.

The examples given in this note show that Lapunoff's theorem is not true if we replace the finite sequence of measures by an infinite one.