ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE III (1959)

S. Gołąb (Kraków)

Zagadnienia teorii obiektów geometrycznych

Referat wygłoszony 11 marca 1955 r. na konferencji Grupy Geometrii Różniczkowej Instytutu Matematycznego PAN we Wrocławiu.

Zarówno fizyka, jak i geometria zmusiły już dawno matematyków do wprowadzenia innych poza liczbami wielkości. Spośród nich najważniejszą rolę grają wektory. Ale i pojęcie wektora okazało się niewystarczające. Pojęcie tensora wprowadzone w teorii sprężystości z końcem ubiegłego wieku przez krystalografa W. Voigta [1] okazało się pożyteczne dla różnych celów. Dalsze uogólnienia tego pojęcia doprowadziły do rozwinięcia rachunku tensorowego, który — jak wiadomo — święcił tryumfy w teorii względności. Od czasu E. B. Christoffela [2] umiano budować pewne wyrażenia, które nie były tensorami, a jednak miały treść geometryczną, tj. niezmienniczą względem przekształceń układu współrzędnych. Chodziło o to, ażeby i tego typu pojęcia zmieścić w ramach jakiejś ogólnej definicji. Definicja ta, która doprowadziła do dzisiejszego pojęcia obiektu geometrycznego i do całej teorii związanej z tym pojęciem, rodziła się powoli, przeszła przez kilka kolejnych etapów i można zaryzykować zdanie, że i dziś sytuacja nie jest jeszcze ustabilizowana.

Pierwszych idei dotyczących pojęcia obiektu geometrycznego dopatrzeć się można u G. Ricciego [3] (1887) oraz u F. Kleina (1909). Pierwsza czysto formalna definicja O. Veblena [4] (pochodząca z r. 1928) powiada, że obiekt geometryczny (Veblen nazywał go jeszcze *inwariantem)* jest to „obiekt abstrakcyjny, który ma w każdym układzie współrzędnych jednoznacznie określony zbiór (należało raczej powiedzieć ciąg, mój przypis) komponentów, z których każdy jest funkcją współrzędnych i ich różniczek".

Termin *obiekt geometryczny* został po raz pierwszy użyty w 1930 r. przez J. A. Schoutena i E. R. van Kampena [5].

Termin *reguła przekształcenia* (*law of transformation*) dla obiektu geometrycznego został wprowadzony w 1932 r. przez O. Veblena i J. H. C. Whitehead'a [6].

Autorzy ci jako pierwsi zrozumieli również, że w teorii obiektów geometrycznych należy porzucić klasyczne pojęcie grupy przekształceń jako niewystarczające i oprzeć się na pojęciu ogólniejszym, które nazwali *pseudogrupą*. Pojęcie to zostało uściślone w następnym etapie przez J. A. Schoutena i J. Haantjesa [7] w 1936 r., a później przeze mnie [8] w 1939 r. Jak się okazało później, do tej teorii lepiej dostosowane jest nie pojęcie pseudogrupy, lecz pojęcie *grupoidu* wprowadzone jeszcze w 1926 r. przez H. Brandta [9].

W 1934 r. A. Wundheiler [10] w swoim odczycie wygłoszonym na konferencji geometrycznej w Moskwie podał podstawowe definicje pojęć, które stały się właściwym początkiem rozwoju teorii obiektów geometrycznych, jako ramowy program tej teorii. Wspomniana wyżej praca Schoutena i Haantjesa, przynosząca dalsze sprecyzowanie pojęć, klasyfikację obiektów oraz pierwsze ważne twierdzenia, stanowi w rozwoju nowej teorii jeden z najważniejszych etapów.

Oto dwie najistotniejsze definicje.

Przypuśćmy dla prostoty, że dana jest grupa G (zamiast ogólniej: pseudogrupa) przekształceń (np. grupa afiniczna). Grupa G „rodzi” zbiór „dopuszczalnych” (*allowable*) układów współrzędnych. Jeśli przez B_0 oznaczymy „praukład”, to każdy dopuszczalny układ będzie taki, do którego można dojść od B_0 za pomocą przekształcenia grupy G. Różne dopuszczalne układy współrzędnych oznaczać będziemy przez $B_1, B_2, \ldots$ nie przesądzając tym oznaczeniem kwestii przeliczalności zbioru wszystkich układów dopuszczalnych.

Ustalmy teraz w rozważanej przestrzeni punkt p. Jeśli każdemu układowi B przyporządkujemy w sposób jednoznaczny ciąg (skończony lub nieskończony(¹)) liczb

$$\omega_1(B),\ \omega_2(B), \ldots, \tag{1}$$

to powiadamy, że w punkcie p określiliśmy *obiekt*. Wyrażenia (1) nazywamy *składowymi* (albo *współrzędnymi*) obiektu w układzie B.

Widzimy więc, że pojęcie obiektu jest ściśle związane z grupą G. Jeżeli obiekt został określony w każdym punkcie p pewnego obszaru (D) rozważanej przestrzeni, to mówimy, że w (D) określiliśmy *pole obiektów*.

Obiekt nazywa się *geometrycznym*, jeśli jego składowe $\omega_j(B_2)$ w dowolnym układzie B_2 dadzą się obliczyć za pomocą składowych $\omega_j(B_1)$ w układzie B_1 oraz za pomocą przekształcenia T_{12}, które prowadzi od układu B_1 do B_2. Innymi słowy, jeśli dana jest tzw. *reguła transformacyjna* postaci

$$\omega_j(B_2) = F_j[\omega_1(B_1), \ldots, \omega_m(B_1);\ T_{12}], \qquad j = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

(¹) Wektor w przestrzeni Hilberta ma np. nieskończoną ilość składowych. W dalszym ciągu rozpatrywać będziemy obiekty o skończonej ilości składowych.

gdzie kształt funkcjonałów F_j (funkcjonałów ze względu na zależność od T_{12}, co nie musi się wyrażać za pomocą parametrów liczbowych) nie zależy od B_1 i B_2.

Dla uzmysłowienia sobie, czym są obiekty geometryczne wśród obiektów, posłużymy się następującą analogią.

Weźmy pod uwagę funkcję $f(x)$ jednej zmiennej rzeczywistej. Na ogół znając wartość funkcji f w jakimś punkcie x oraz przyrost h zmiennej niezależnej (translacja h odpowiada w tej analogii przekształceniu T) nie potrafimy jeszcze obliczyć wartości $f(x+h)$, jeśli nie wiemy nic bliższego o kształcie funkcji $f(x)$. Potrafimy natomiast obliczyć $f(x+h)$ znając $f(x)$ i h, jeśli funkcja f jest liniowa, $f(x) = ax+b$, bo wówczas

$$f(x+h) = f(x)+ah.$$

Obiekty geometryczne odgrywają więc wśród obiektów podobną rolę jak funkcje liniowe wśród funkcji w ogóle.

Najprostszym przykładem obiektu geometrycznego (poza banalnymi stałymi, gdzie składowe nie zależą od układu współrzędnych B) są współrzędne ξ_1^i punktu p w układzie B_1. Tutaj rzeczywiście

$$\xi_2^i = F^i(\xi_1^1, \ldots, \xi_1^n; T_{12}),$$

albowiem po prostu jest

$$\xi_2^i = \varphi^i(\xi_1^1, \ldots, \xi_1^n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

gdzie układ n funkcyj φ^i o n zmiennych niezależnych przedstawia przejście od układu B_1 do układu B_2.

J. A. Schouten i J. Haantjes wyspecjalizowali spośród obiektów geometrycznych obiekty określonej klasy q ($q = 0, 1, 2, \ldots$), specjalizując funkcjonały F_j do funkcyj w sposób niżej przedstawionych.

Załóżmy mianowicie, że funkcjonały F_j stają się funkcjami f_j zależnymi od m zmiennych niezależnych (m jest ilością składowych obiektu) oraz od skończonej ilości parametrów będących przedstawieniem (*Darstellung*) transformacji T_{12} w rozważanym punkcie p, a więc od parametrów następujących:

$$a_i, b_i, c^i_{k_1 \ldots k_l} \quad (i, k_j = 1, 2, \ldots, n; \ l = 1, 2, \ldots, q),$$

gdzie a_i, b_i są odpowiednio współrzędnymi punktu p w układzie B_1 lub B_2, a

$$c^i_{k_1 \ldots k_l} = (\partial^l \varphi^i / \partial \xi^{k_1} \ldots \partial \xi^{k_l})_p.$$

W regule transformacyjnej dla (składowych) obiektów specjalnych

$$\begin{aligned}(3) \quad \omega_j(B_2) = f_j\{\omega_1(B_1), \ldots, \omega_m(B_1); \ a_1, \ldots, a_n, \ b_1, \ldots, b_n, \\ c_1^1, \ldots, c_n^n, \ldots, c^n_{n \ldots n}\}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,\end{aligned}$$

figurują więc liczby naturalne n, m, q, gdzie — przypominamy — n oznacza wymiar przestrzeni, m ilość składowych obiektu geometrycznego, q *klasę obiektu*, czyli rząd najwyższych pochodnych przekształceń danej grupy G, interweniujących w rozważanej regule transformacyjnej.

Jeśli w szczególnym przypadku funkcje f_j nie zależą od zmiennych a_i, b_i, to mówimy, że mamy do czynienia z obiektem *czysto różniczkowym*. Jeśli $q = 0$, to funkcje f_j nie zależą od zmiennych c. Obiekty klasy zero (rozważane dotychczas przeze mnie i H. Pidek-Łopuszańską) znalazły niespodziewanie zastosowanie w teorii reakcji łańcuchowych [11].

Najważniejsze (jeśli idzie o zastosowania) obiekty geometryczne specjalne, to obiekty klasy pierwszej, a następnie klasy drugiej.

Funkcje f_j nie mogą być dowolnie zadane, jeśli równania (3) mają definiować regułę transformacyjną dla jakiegoś obiektu geometrycznego.

Oznaczając mianowicie krótko za pomocą jednej litery ω zespół zmiennych ω_j, przez T_{ik} transformację prowadzącą od układu B_i do układu B_k, jeśli B_1, B_2, B_3 oznaczają trzy dowolne dopuszczalne układy współrzędnych, mamy

$$\begin{aligned} \omega_2 &= f(\omega_1, T_{12}), \\ \omega_3 &= f(\omega_2, T_{23}), \\ \omega_3 &= f(\omega_1, T_{13}), \end{aligned} \tag{4}$$

skąd

$$f(\omega_2, T_{23}) = f(\omega_1, T_{13}). \tag{5}$$

Wstawiając pierwsze z równań (4) do (5) otrzymujemy

$$f\{f(\omega_1, T_{12}), T_{23}\} = f(\omega_1, T_{13}).$$

Ale jest

$$T_{13} = T_{23}T_{12},$$

a więc musi być spełniony związek (piszemy krócej ω zamiast ω_1, T_1 zamiast T_{12} i T_2 zamiast T_{23}):

$$f\{f(\omega, T_1), T_2\} \equiv f(\omega, T_2T_1), \tag{6}$$

który ma zachodzić identycznie dla każdego ω oraz dla każdych dwóch transformacji (pseudo) grupy G. Funkcje f_j muszą więc spełniać układ równań funkcyjnych iterowanych o symbolicznej postaci (6), a których formę wyraźną trzeba dla każdego konkretnego przypadku indywidualnie rozpisać.

Zagadnienie klasyfikacji obiektów geometrycznych specjalnych polegać będzie po pierwsze na tym, ażeby dla danych n, m, q wyznaczyć *wszystkie obiekty* lub wszystkie typy obiektów, zaliczając do jednego typu te, dla których reguła transformacyjna jest ta sama. Tak np. wektory kowariantne (dla których jest $m = n$, $q = 1$) będą tworzyły jeden typ. Po wtóre, żeby stworzyć pojęcie *podobieństwa* dla dwu różnych obiektów (lub różnych typów), albowiem okazuje się, że dwa obiekty o różnych regułach transformacyjnych mogą określać to samo pojęcie geometryczne.

Zagadnienie klasyfikacji obiektów geometrycznych nie jest dotąd w całej ogólności (tj. dla dowolnych n, m, q) rozwiązane.

Pierwsza część zagadnienia prowadzi do równań lub układów równań funkcyjnych iterowanych, które nie są łatwe do rozwiązania. Wprawdzie z równaniami tego typu miała do czynienia teoria grup przekształceń ciągłych stworzona przez S. Liego, ale trzeba pamiętać o tym, że rozwiązania tych równań zależą od założeń dotyczących regularności poszukiwanych rozwiązań. Przy metodach klasycznych zakłada się z reguły analityczność i to założenie robi większość autorów (P. Medolaghi [12], E. Cartan [13], V. V. Wagner [14], G. Pensow [15], A. Nijenhuis [16], K. Yano [17], I. Tashiro [18]). Założenie to może powodować, i w niektórych przypadkach powoduje, wykluczenie pewnych rozwiązań mniej regularnych.

Dla przykładu rozpatrzmy przypadek $n = 1$, $m = 1$, $q = 1$ i ponadto załóżmy, że mamy do czynienia z obiektem czysto różniczkowym. W przestrzeni jednowymiarowej poszukujemy więc obiektów pierwszej klasy o jednej składowej. Reguła transformacyjna określona jest w tym przypadku za pomocą jednej funkcji dwu zmiennych niezależnych, która musi spełniać równanie funkcyjne

$$f[f(x, a), \beta] \equiv f(x, a.\beta) \tag{7}$$

dla wszelkich $a, \beta \neq 0$ oraz warunek dodatkowy

$$f(x, 1) \equiv x. \tag{8}$$

Równanie powyższe ma nieskończenie wiele rozwiązań, których nie da się „podać" za pomocą „rozsądnych" wzorów analitycznych, jeśli o funkcji f nie poczynimy żadnych założeń regularności. Równanie (7) dopuszcza rozwiązania niemierzalne, mierzalne ale nieciągłe, ciągłe ale nieróżniczkowalne. Dopiero założenie różniczkowalności prowadzi do „rozsądnej" klasyfikacji tych rozwiązań (patrz [19]). Wśród rozwiązań ważnych dla teorii są np. rozwiązania postaci

$$f(x, a) = x|a|,$$

które dla $a = 0$ są nieróżniczkowalne i których oczywiście nie można otrzymać przy założeniu analityczności szukanej funkcji.

Co się tyczy roli, jaką przy rozwiązywaniu równań funkcyjnych teorii obiektów geometrycznych gra założenie regularności poszukiwanego rozwiązania, wskażę jeszcze na następujący interesujący przykład.

Załóżmy, że szukamy obiektów czysto różniczkowych, dla których $n = m = 1$. Można wykazać, że dla $q \geqslant 4$ nie istnieją tego rodzaju obiekty geometryczne. Jeżeli założyć analityczność szukanej funkcji f (która w tym przypadku jest funkcją $q+1$ zmiennych niezależnych), to twierdzenie to staje się wnioskiem z pewnego twierdzenia Liego, mówiącego, że dla jednej zmiennej nie istnieje grupa skończona o większej ilości istotnych parametrów niż 3. Przy słabych założeniach regularności twierdzenie to przestaje już być wnioskiem ze wspomnianego twierdzenia Liego (metoda dowodu Liego nie funkcjonuje przy założeniach słabszych niż analityczność).

Na to, że założenia twierdzenia Liego nie dadzą się osłabić, podał kontrprzykład T. Ważewski [20]. Skonstruował on mianowicie dla jednej zmiennej grupę 4-częściową (parametrową)

$$\bar{x} = f(x; p_1, p_2, p_3, p_4)$$

o czterech istotnych parametrach, przy czym funkcja f jest klasy C^∞ (nieograniczenie różniczkowalna).

Wracając do wspomnianego wyżej twierdzenia o nieistnieniu obiektów wyższej klasy niż trzeciej, wykazałem [21] to twierdzenie przy założeniu, że funkcja f należy do klasy C^1. Ostatnio J. Aczélowi [22] udało się znacznie osłabić założenia tego twierdzenia, zakładając jedynie ciągłość i to względem nie wszystkich zmiennych.

Jeśli chodzi o drugą część problemu, to istnieje kilka definicji podobieństwa czy równoważności dwóch obiektów geometrycznych. Żadna z nich — zdaniem J. Haantjesa — nie jest w pełni zadowalająca i sprawa ta jest nadal otwarta.

W 1952 r. teoria obiektów geometrycznych doczekała się nowego przedstawienia, a właściwie nowego ufundowania ze strony A. Nijenhuisa [16].

Autor w swej pracy doktorskiej wykorzystał pewne pojęcie — o czym już wyżej było wspomniane — wprowadzone jeszcze w 1926 r. przez H. Brandta [9], a mianowicie pojęcie *grupoidu*, będące uogólnieniem klasycznego pojęcia grupy. Uogólnienie polega przede wszystkim na tym, że po pierwsze nie każde dwa elementy podstawowego zbioru dają się składać, po drugie zakłada się osłabione prawo łączności

$$(ab)c = a(bc).$$

Osłabienie polega na tym, że o ile dwa (nie każde) z czterech złożeń, jakie figurują w sformułowaniu powyższego związku, istnieją, to istnieją pozostałe dwa oraz wyniki obu stron są jednakowe.

Wreszcie po trzecie nie zakłada się jednoznaczności modułu działania.

To pojęcie grupoidu jest podstawowym w nowej teorii obiektów geometrycznych.

Zamiast transformacji, których zbiór tworzy pseudogrupę, Nijenhuis rozważa tzw. *elementy transformacyjne*, których zbiór (i odpowiednia reguła składania) będzie tworzył grupoid.

W analitycznej przestrzeni n-wymiarowej $\mathfrak{A}_n$, której elementami są ciągi złożone z n liczb, określa Nijenhuis element transformacyjny jako parę złożoną z punktu a przestrzeni $\mathfrak{A}_n$ oraz analitycznej i lokalnie odwracalnej transformacji n-wymiarowej określonej w otoczeniu punktu a. Ponieważ punkt a jest określony za pomocą ciągu n liczb a^i, a transformacja za pomocą n funkcji f^i_a zmiennych niezależnych ξ^i (zmiennych niezależnych dla prostoty nie wypisujemy, a wskaźnik a ma przypominać, że funkcje f^i_a są określone w otoczeniu punktu a), więc „element transformacyjny" zapiszemy symbolicznie jako (a^i, f^i_a).

Rozwijając funkcje f^i_a na szereg Taylora otrzymamy charakteryzację elementu transformacyjnego za pomocą nieskończonego ciągu liczb:

$$a^i, \quad b^i = (f^i_a)_a, \quad c^i_{k_1} = \left(\frac{\partial f^i_a}{\partial \xi^{k_1}}\right)_a, \ldots, c^i_{k_1\ldots k_l} = \left(\frac{\partial^l f^i_a}{\partial \xi^{k_1}\ldots\partial \xi^{k_l}}\right)_a, \ldots$$

Definiując składanie dwóch elementów transformacyjnych (nie zawsze wykonalne, bo musi być spełniony warunek, ażeby element b^i dla „pary wewnętrznej" zlewał się z elementem a^i dla „pary zewnętrznej") otrzymujemy zbiór, który okazuje się grupoidem w sensie Brandta.

Autor dowodzi zasadniczego twierdzenia, że grupoid ten — oznaczmy go Γ_n — jest kartezjańskim iloczynem pewnego bardzo prostego grupoidu γ_n (będącego minimalnym podgrupoidem o identycznych modułach) oraz pewnej grupy (w sensie klasycznym) $\mathfrak{G}_n$, przy czym zarówno γ_n, jak i $\mathfrak{G}_n$ są jednoznacznie wyznaczone przez Γ_n.

Następnym podstawowym dla teorii Nijenhuisa pojęciem jest pojęcie *reprezentacji* pojęte szerzej aniżeli w klasycznej teorii grup. Jest to po prostu homomorfizm w obrębie grupoidów. Jeżeli mamy dane dwa grupoidy Γ i Γ' oraz jednoznaczne przyporządkowanie każdemu elementowi $a \in \Gamma$ elementu $a' \in \Gamma'$, przy czym odwzorowanie to ma tę własność, że jeśli $ab \in \Gamma$ i jeśli $a'b' \in \Gamma'$, wtedy

$$(ab)' = a'b',$$

wówczas mówimy, że grupoid Γ' jest reprezentacją grupoidu Γ.

Załóżmy teraz, że dany jest zbiór elementów Ω będących ciągami m liczb:

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$$

i że zbiór ten tworzy (przy ustaleniu pewnego działania na jego elementach) grupoid Γ'. Jeśli grupoid Γ' jest reprezentacją grupoidu podstawowego Γ_n, wówczas mówimy, że w przestrzeni X_n dany jest obiekt geometryczny (Ω) o m składowych. Jego składowe są w każdym dopuszczalnym układzie współrzędnych jednoznacznie określone. Składowe te zależą od wybranego punktu p przestrzeni. Jeśli B_0 jest jakimś wyróżnionym układem współrzędnych, a^i oznaczają współrzędne punktu p w układzie B_0, a B jest układem współrzędnych otrzymanym z B_0 za pomocą elementu transformacyjnego (a, f_a), wówczas składowymi obiektu w układzie B jest ten ciąg (Ω), który w grupoidzie Γ' jest jednoznacznie przyporządkowany elementowi (a, f_a) w grupoidzie Γ_n. Element (Ω) widocznie nie zależy od wyboru układu B_0.

Korzyścią powyższej definicji obiektu geometrycznego jest ten fakt, że obiekt staje się reprezentacją grupoidu podstawowego Γ_n.

Grupoid podstawowy możemy zacieśniać do podgrupoidów. Wówczas obiekt geometryczny Γ' będący grupoidem (reprezentacją grupoidu Γ_n) ulega również zacieśnieniu do podgrupoidu, a więc oczywiście zmienia się w stosunku do pierwotnego.

A więc np. jeśli grupoid γ_n zacieśnimy do transformacji identycznych (tj. $f_a^i = \xi^i$), otrzymamy obiekty czysto różniczkowe.

Jednym z ważnych problemów teorii obiektów geometrycznych jest rozstrzygnięcie, kiedy dany obiekt jest obiektem geometrycznym. Problem ten nie jest w zupełności rozwiązany. Bardzo ważne jest tu twierdzenie (Schoutena i Haantjesa [7]) o możliwości uzupełnienia każdego obiektu (przez dodanie odpowiedniej ilości składowych) do obiektu geometrycznego. Zilustrujemy to twierdzenie na następującym przykładzie.

Niech będzie dane w przestrzeni X_n pole skalarne σ. Jak wiadomo, ciąg liczb

$$\omega_i = \partial\sigma/\partial\xi^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

przedstawia obiekt geometryczny (tzw. wektor kowariantny). Natomiast ciąg (macierz) liczb

$$\omega_{ik} = \partial^2\sigma/\partial\xi^i\partial\xi^k$$

nie przedstawia już obiektu geometrycznego. Ale zespół liczb (ω_j, ω_{ik}) stanowi już obiekt geometryczny o n^2+n składowych. Jeśli zbiór elementów transformacyjnych zacieśnimy do takich transformacji, dla których

$$c_j^i = (\partial f_a^i/\partial\xi^j)_a = \mathrm{const},$$

to przy tak zacieśnionym grupoidzie Γ_n liczby ω_{ik} staną się już obiektem geometrycznym.

Jak wspomniałem wyżej, kompletnej klasyfikacji obiektów geometrycznych dotąd nie ma. Tutaj podstawową rolę gra ustalenie wszystkich podgrup grupy $\mathfrak{G}_n$.

Przechodzę z kolei do naszkicowania problematyki tzw. *algebry obiektów geometrycznych.*

Wiadomo, że każda funkcja kilku skalarów jest znowu skalarem. Już nie jest tak dla tzw. gęstości (tj. najprostszych po skalarach obiektach o jednej składowej, obiektach czysto różniczkowych pierwszej klasy). Dodawać można tylko gęstości o tej samej wadze, podczas gdy mnożyć można każde dwie gęstości. Podobnie wiadomo, iż można dodawać do siebie wektory kontrawariantne (zaczepione w tym samym punkcie) albo wektory kowariantne, ale nie można dodać wektora kontrawariantnego do wektora kowariantnego. Treść ostatniej wypowiedzi jest następująca. Jeśli przez v^i oznaczymy składowe pewnego wektora w określonym punkcie p, przez w_i składowe pewnego wektora kowariantnego w tym samym punkcie, to wprawdzie wolno utworzyć ciąg liczb

$$v^i + w_i,$$

ale ten ciąg nie będzie przedstawiał żadnego obiektu geometrycznego.

Na tle tych przykładów wyłania się problem ogólny, jakie „działania” można wykonywać na dwu danych obiektach (tego samego lub innego typu) w tym sensie, żeby wynik działania był znów obiektem geometrycznym.

Rozwiązaniem tego problemu zajmuje się właśnie algebra obiektów geometrycznych. Jakkolwiek taka np. algebra tensorów jest teorią poważnie rozwiniętą i zaawansowaną, to systematyczne badania mające na celu wyszukiwanie wszystkich możliwych działań na obiektach geometrycznych są ledwie rozpoczęte. Wyniki są na razie osiągnięte jedynie dla obiektów najprostszych typów (klasy zero, klasy pierwszej o jednej składowej).

Na obiektach pewnych typów (o pewnych regułach transformacyjnych) nie można w ogóle wykonywać żadnych działań, patrz [23] (mówimy wtedy, że obiekty takie nie dopuszczają żadnej algebry).

Analiza obiektów geometrycznych ma za naczelny problem sprawę zdefiniowania w sposób niezmienniczy (tj. niezależny od układu współrzędnych) pojęcia pochodnej dla pól obiektów różnych typów.

Jakkolwiek badania w tej dziedzinie rozpoczęli jeszcze z górą pół wieku temu G. Ricci i T. Levi-Civita, to jednak badania systematyczne są jeszcze dalekie do sfinalizowania. Trudność leży w tym, że pojęcie pochodnej absolutnej można na różne sposoby zdefiniować. Można poszukiwać różnych układów postulatów, które doprowadzałyby do możliwie prostych wzorów na tę pochodną względnie do wzoru jednoznacznego dla pewnych typów przestrzeni.

Okazuje się, że przy pewnych (dość naturalnych) postulatach nie można w ogóle dla obiektów pewnych typów w obrębie grupoidu Γ_n określić pojęcia pochodnej absolutnej, patrz [24].

Z pojęciem pochodnej absolutnej wiąże się pojęcie tzw. pochodnej Liego dla pól obiektów geometrycznych (pojęcie relatywne względem danej kongruencji krzywych). Pojęcie to wprowadzone po raz pierwszy dla afinorów w 1931 r. przez W. Ślebodzińskiego [25] zostało przez japońskich geometrów, wyżej wspomnianych, uogólnione dla dowolnych obiektów geometrycznych i znalazło rozliczne zastosowania zwłaszcza w teorii grup Liego. Japoński geometra Yano pisze w tej chwili całą monografię poświęconą temu pojęciu.

Przechodzę teraz do ostatniego etapu rozwoju teorii obiektów geometrycznych. Teoria ta zyskała zupełnie nowy aspekt przez rozwinięcie jej na bazie przestrzeni włóknistych, o których to przestrzeniach referował kolega A. Goetz.

Prac w tym kierunku jest zaledwie kilka. Wspomnę bliżej o dwóch pracach Haantjesa i Lamana [26].

Niech n i s będą dwiema danymi liczbami naturalnymi (n oznacza jak wyżej wymiar przestrzeni).

Weźmy pod uwagę ciąg n wielomianów stopnia s o n zmiennych $\xi^1, \ldots, \xi^n$ postaci

$$W^i(\xi) = a^i_j \xi^j + \sum_{r=2}^{s} \frac{1}{r!} a^i_{\lambda_1 \ldots \lambda_r} \xi^{\lambda_1} \ldots \xi^{\lambda_r} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

o własności

$$|a^i_j| \neq 0.$$

Jeżeli $s = 1$, to $W^i(\xi)$ redukują się do jednorodnych form liniowych.

Taki ciąg wielomianów (określony jednoznacznie przez współczynniki $a^i_j, a^i_{jk}, \ldots, a^i_{\lambda_1 \ldots \lambda_s}$) oznaczmy krótko jednym symbolem A.

Zbiór elementów A, jeśli składanie zdefiniujemy jako podstawianie jednych wielomianów w drugie z odrzuceniem wyrazów wyższych stopni niż s, będzie tworzył grupę, którą oznaczmy przez L^s_n.

Niech teraz X_n będzie przestrzenią topologiczną taką, że każdy jej punkt ma otoczenie homeomorficzne z otwartymi zbiorami euklidesowej n-wymiarowej przestrzeni R_n. Oznaczmy przez $\{V_j\}$ otwarte pokrycie przestrzeni X_n. Oznaczmy dla otoczenia V_j przez ψ_j homeomorfizm między V_j a zbiorem otwartym $E_j \subset R_n$.

System $\{V_j, \psi_j\}$ nazywa się *systemem różniczkowalnych współrzędnych* klasy r, jeśli dla każdego $x \in V_i \cap V_j$ (o ile $V_i \cap V_j \neq 0$) transformacja $\psi_j^{-1}\psi_i(x)$ jest transformacją klasy C^r (tzn. o ciągłych pochodnych cząstkowych aż do rzędu r włącznie).

Jeżeli tylko jest $r \geqslant s$, to transformacja $\psi_j^{-1}\psi_i(x)$ definiuje jednoznacznie element grupy L_n^s; oznaczmy ten element przez $A_{ji}(x)$.

Łatwo wykazać, że jest

$$A_{ji}(x)A_{ik}(x) = A_{jk}(x),$$

jeśli tylko $x \in (V_i \cap V_j \cap V_k)$.

Niech teraz obok X_n będzie dana przestrzeń topologiczna Y i niech G oznacza grupę transformacji działającą w Y (tzn. przekształcającą Y w siebie), niech $h(x)$ oznacza ciągłą reprezentację (homomorfizm) L_n^s w G.

Oznaczmy przez

$$g_{ij}(x) \overset{\mathrm{df}}{=} h(x)A_{ji}(x).$$

Wtedy istnieje *wiązka (bundle)* $\mathfrak{L}$ z bazą X_n, włóknem Y i grupą włóknistą G. One wraz z homomorfizmem h określają to, co się nazywa „fibre bundle" i co Haantjes i Laman nazywają „wiązką obiektów geometrycznych klasy s w przestrzeni X_n i o typie h".

Następnie definiują autorowie pojęcie równoważności dwu wiązek obiektów za pomocą homeomorfizmu dwu przestrzeni włóknistych. Pojęcia tego w artykule tym bliżej nie precyzujemy.

W ten sposób dla różnych G i h można klasyfikować wiązki obiektów geometrycznych.

Dla przykładu (ogólna teoria jeszcze nie jest rozwinięta) wspomniani autorowie podają pełną klasyfikację wiązek obiektów pierwszej klasy ($s = 1$) dla jednowymiarowego włókna Y.

Zagadnienie to prowadzi do znalezienia wszystkich zamkniętych podgrup grupy centro-afinicznej o wymiarze n^2-1. Mamy tu 5 typów różnych wiązek z *nieskończoną* ilością nierównoważnych między sobą, przy czym włókno Y może się składać bądź ze wszystkich liczb rzeczywistych poza zerem (dwa promienie), bądź ze wszystkich liczb dodatnich (jeden promień), bądź może być kołem, bądź może się składać z dwu okręgów.

Teoria ta jest dopiero zapoczątkowana. Również gdy chodzi o analizę przestrzeni włóknistych, mamy do zanotowania ledwie kilka prac.

Teoria obiektów geometrycznych jest — jak widać z powyższego referatu — teorią w stadium prężnego rozwoju. Nie jest ona teorią li tylko abstrakcyjną i o znaczeniu teoretycznym; dowodzi tego choćby ten fakt, że teorii tej poświęcił dużo miejsca Schouten w swej książce *Tensor analysis for physicists* przeznaczonej dla fizyków.

Prace cytowane

[1] W. Voigt, *Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Kristalle*, 1898.

[2] E. B. Christoffel, *Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades*, 1869.

[3] G. Ricci, *Sulla derivazione covariante ad una forma quadratica differenziale*, Rend. d. Lincei (1887).

[4] O. Veblen, *Differential Invariants and Geometry*, Atti del Congr. Intern. dei Matematici, Bologna, 1 (1928).

[5] J. A. Schouten und E. R. van Kampen, *Zur Einbettungs und Krümmungstheorie nichtholonomer Gebilde*, Math. Ann. 103 (1930), str. 752-783.

[6] O. Veblen and J. H. C. Whitehead, *The foundations of differential geometry*, Cambr. Tracts (1932).

[7] J. A. Schouten and J. Haantjes, *On the theory of the geometric object*, Proc. Lond. Math. Soc. 42 (1936), str. 356-376.

[8] S. Gołąb, *Über den Begriff der „Pseudogruppe von Transformationen"*, Math. Ann. 116 (1939), str. 768-780.

[9] H. Brandt, *Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffs*, Math. Ann. 96 (1926), str. 360-366.

[10] A. Wundheiler, *Objekte, Invarianten und Klassifikation der Geometrien.* Erste intern. Konferenz für tensorielle Differentialgeometrie und ihre Anwendungen. Abhandl. aus dem Seminar f. Vektor-und Tensoranalysis samt Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und Physik. T. IV (1937), str. 366-375.

[11] Б. А. Севастьянов, *Теория ветвящихся случайных процессов*, Усп. Мат. Наук (1951), str. 47-99.

J. Aczél, *Lösung der Vektor-Funktionalgleichung der homogenen und inhomogenen n-dimensionalen einparametrigen „Translation", der erzeugenden Funktion von Kettenreaktionen und der stationären Bewegungsintegralen* (w druku).

[12] P. Medolaghi, *Sulla teoria dei gruppi infiniti continui*, Ann. di Mat. 25 (1897), str. 179-217.

[13] E. Cartan, *Sur les groupes infinis de transformations I, II, III*, Ann. Ec. Norm. Sup. 21 (1904), str. 153-206, 22 (1905), str. 219-308, 25 (1908), str. 57-194.

[14] V. V. Wagner, *Teoria obiektów geometrycznych a teoria skończonych i nieskończonych ciągłych grup przekształceń*, Dokłady 46 (1945), str. 347-349.

V. V. Wagner, *Klasyfikacja pojedynczych obiektów geometrycznych*, Dokłady 69 (1949), str. 294-296.

[15] G. Pensow, *Klasyfikacja obiektów geometrycznych różniczkowych klasy v o jednej składowej*, Dokłady 54 (1946), str. 563-566.

[16] A. Nijenhuis, *Theory of the geometric object*, Teza doktorska, Amsterdam (1952).

[17] K. Yano, *Groups of transformations in generalized spaces*, Tokyo 1949.

[18] Y. Tashiro, *Sur la dérivée de Lie de l'être géométrique et son groupe d'invariance*, Tohôku Math. Journ. 2 (1950), str. 166-181.

[19] S. Gołąb, *Über eine Funktionalgleichung der Theorie der geometrischen Objekte*, Wiad. Matem. 45 (1938), str. 97-137.

[20] T. Ważewski, *Exemples des groupes de transformations d'une droite en elle même qui dépendent de quatre paramètres essentiels*, Prace Mat-Fiz. 47 (1949), str. 105-115.

[21] S. Gołąb, *Contribution à la théorie des objets géométriques*, Prace Mat-Fiz. 47 (1949), str. 1-15.

[22] J. Aczél, *Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte. I. Elementarer Beweis der Nicht-Existenz von rein differentiellen Objekten mit einer Komponenten von höherer Klasse als der dritten im eindimensionalen Raum. II. Elementare Bestimmung aller solcher Objekten der ersten, zweiten und dritten Klasse* (w druku).

[23] H. Pidek, *Sur les objets géométriques de la classe zéro qui admettent une algèbre,* Ann. Soc. Pol. Math. 24, II (1951), str. 111-128.

[24] S. Gołąb, *Sur la dérivée covariante des objets géométriques de deuxième classe,* Ann. Pol. Math. 1 (1954), str. 107-113.

[25] W. Ślebodziński, *Sur les équations de Hamilton,* Bull. Acad. Roy. Belg. 17 (1931), str. 864-870.

[26] J. Haantjes and G. Laman, *On the definition of geometric objects, I and II,* Proc. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam (1953), str. 208-215 i str. 216-222