ANNALES SOCIETATIS MATHEMATICAE POLONAE
Series I: COMMENTATIONES MATHEMATICAE XXX (1991)
ROCZNIKI POLSKIEGO TOWARZYSTWA MATEMATYCZNEGO
Seria I: PRACE MATEMATYCZNE XXX (1991)

EUGENIUSZ WACHNICKI (Monastir)

Sur certaines méthodes de sommation des séries

Abstract. New methods for summability of series and relations among them are presented. As a method for studying these relations we prove a theorem on the behaviour of solutions of singular linear differential equations at singular points.

As special cases we obtain a method of Abel of order n and the n-harmonic method of summability of series.

1. Soit $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$, $n \in N^*$, un système de fonctions définies et de classe C^∞ sur l'intervalle $[r_0, 1]$, $0 \leqslant r_0 < 1$. Soit α un nombre réel strictement positif. Considérons l'opérateur différentiel $D_\alpha^n(G)$ défini sur $C^\infty([r_0, 1])$ de la façon suivante:

$$\tag{1} \begin{cases} D_0(G)f(r) = f(r), \\ D_\alpha^i(G)f(r) = D_\alpha^{i-1}(G)f(r) + (1-r)^\alpha g_i(r)\dfrac{d}{dr}D_\alpha^{i-1}(G)f(r), \quad i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Soit F une suite de fonctions f_k, $k = 0, 1, \ldots$, de classe $C^\infty([r_0, 1])$.

DÉFINITION 1. Soit $\sum a_k$ une série numérique. On dit que la série $\sum a_k$ est *sommable, de somme s, d'après la méthode* $A_\alpha(n, G, F)$ si les séries $\sum_{k=0}^\infty f_k^{(p)}(r)a_k$, $p = 0, 1, \ldots$, sont uniformément convergentes sur chaque intervalle $[r_0, r_1]$, $r_0 \leqslant r_1 < 1$, et si

$$\tag{2} H_\alpha(n, G, F, r) \to s$$

lorsque $r \to 1^-$, où

$$H_\alpha(n, G, F, r) = \sum_{k=0}^\infty D_\alpha^n(G)f_k(r)a_k.$$

D'après cette définition et (1) on a

$$\tag{3} H_\alpha(n, G, F, r) = H_\alpha(n-1, G, F, r) + (1-r)^\alpha g_n(r)\frac{d}{dr}H_\alpha(n-1, G, F, r)$$

pour $r_0 \leqslant r < 1$.

Dans le cas où $\alpha = 1$, $f_k(r) = r^k$, $g_i(r) = (1+r)r/(2i)$ $\big(g_i(r) = r/i\big)$ on reconnait la méthode n-harmonique (méthode généralisée d'Abel) de sommation des séries. Ces méthodes ont été considérées dans [3].

Le cas où $\alpha = 1$, $f_k(r) = r^k$, $g_i(r) = \big(r(1-r^p)\big)/\big(ip(1-p)\big)$ si $p \in N^*$, $r \in [0, 1[$ et $g_i(1) = 1/i$ a été étudié dans [6] et [7]. Dans ces notes on retrouve aussi le cas où $\alpha = 1$, $f_k(r) = r^k$, $g_i(r) = -(r\log r)/\big(i(1-r)\big)$ pour $r \in [0,1[$ et $g_i(1) = 1/i$. Pour $\alpha = 1$, $f_k(r) = I_k(r)/I_k(1)$ (I_k — la fonction modifiée de Bessel) et $g_i(r) = (1+r)r/(2i)$ on a la méthode de sommation considérée dans [2], [4] et [8].

Dans cette note on généralise certains résultats de [3] et [6]. Pour cela on va étudier certaines propriétés des solutions de l'équation

$$(b-t)^\alpha u'(t) + [A + (b-t)B(t)]u(t) = f(t) \tag{4}$$

dans un voisinage du point singulier $t_0 = b$.

2. Soient a, b de $\mathbf{R}$ et $a < b$. Soit E un espace de Banach et $L(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E. Soient $A \in L(E)$ une application inversible, B: $[a, b[\to L(E)$ et f: $[a, b[\to E$ deux applications continues sur $[a, b[$. On considére l'équation (4) dans l'intervalle $[a, b[$.

Soit $t_0 \in [a, b[$. Il est facile de voir que l'application R définie par

$$R(t, t_0) = \begin{cases} \exp\left(A \log \dfrac{b-t}{b-t_0}\right) & \text{si } \alpha = 1, \\ \exp \dfrac{A}{\alpha-1}[(b-t_0)^{1-\alpha} - (b-t)^{1-\alpha}] & \text{si } \alpha \neq 1, \end{cases}$$

est la résolvante de l'équation

$$u'(t) + \frac{A}{(b-t)^\alpha} u(t) = 0.$$

On va démontrer

LEMME 1. *Soient α, σ, M des nombres réels tels que $\alpha > 1$, $\sigma > 0$ et $M > 0$. Posons*

$$k_M(t) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{1-\alpha}(b-t)^{-1} - M\log(b-t) & si\ \alpha = 2, \\ \dfrac{\sigma}{1-\alpha}(b-t)^{1-\alpha} - \dfrac{M}{2-\alpha}(b-t)^{2-\alpha} & si\ \alpha \neq 2 \end{cases}$$

pour $t \in [t_0, b[$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\lim_{t\to b^-} \int_{t_0}^{t} (b-s)^{-\alpha} \exp\big(k_M(t) - k_M(s)\big) ds < C.$$

Démonstration. On va considérer trois cas.

1° $1<\alpha<2$. On a

$$\int_{t_0}^{t}(b-s)^{-\alpha}\exp(-k_M(s))ds$$
$$\leqslant \int_{t_0}^{t}(b-s)^{-\alpha}\exp\left[\frac{\sigma}{\alpha-1}(b-s)^{1-\alpha}+\frac{M}{2-\alpha}(b-t_0)^{2-\alpha}\right]ds$$
$$\leqslant K_1\left[\exp\frac{-\sigma}{1-\alpha}(b-t)^{1-\alpha}-\exp\frac{-\sigma}{1-\alpha}(b-t_0)^{1-\alpha}\right]$$

où K_1 est une constante positive, d'où

$$\int_{t_0}^{t}(b-s)^{-\alpha}\exp(k_M(t)-k_M(s))ds$$
$$\leqslant K_1\exp\frac{-M}{2-\alpha}(b-t)^{2-\alpha}-\exp\left[k_M(t)-\frac{\sigma}{1-\alpha}(b-t_0)^{1-\alpha}\right].$$

En passant à la limite lorsque $t\to b^-$ on obtient

$$\lim_{t\to b^-}\int_{t_0}^{t}(b-s)^{-\alpha}\exp(k_M(t)-k_M(s))ds<K_1$$

puisque $\lim_{t\to b^-}k_M(t)=-\infty$.

2° $\alpha>2$. On a

$$\int_{t_0}^{t}(b-s)^{-\alpha}\exp(-k_M(s))ds$$
$$\leqslant \int_{t_0}^{t}(b-s)^{-\alpha}\exp\left\{(b-s)^{1-\alpha}\left[\frac{\sigma}{\alpha-1}+\frac{M}{2-\alpha}(b-t)\right]\right\}ds$$
$$\leqslant \frac{1}{(\alpha-1)h(t)}[\exp(-k_M(t))-K_2\exp(K_3(b-t))]$$

où K_2, K_3 sont des constantes positives et $h(t)=\dfrac{\sigma}{\alpha-1}+\dfrac{M}{2-\alpha}(b-t)$. D'où

$$\int_{t_0}^{t}(b-s)^{-\alpha}\exp(k_M(t)-k_M(s))ds$$
$$\leqslant \frac{1}{(\alpha-1)h(t)}[1-K_2\exp(k_M(t)+K_3(b-t))]\to\frac{1}{\sigma}$$

lorsque $t\to b^-$ car $\lim_{t\to b^-}h(t)=\dfrac{\sigma}{\alpha-1}$ et $\lim_{t\to b^-}k_M(t)=-\infty$. Par conséquent

$$\lim_{t\to b^-}\int_{t_0}^{t}(b-s)^{-\alpha}\exp(k_M(t)-k_M(s))ds\leqslant 1/\sigma.$$

3° $\alpha = 2$. Supposons d'abord que t_0 de $[a, b[$ est tel que l'inégalité

$$(b-s)\log(b-s) \leqslant (b-t)\log(b-t) \tag{5}$$

a lieu pour $s \in [t_0, t]$. Dans ce cas on a

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} (b-s)^{-2}\exp(-k_M(s))ds &\leqslant \int_{t_0}^{t} (b-s)^{-2}\exp[(b-s)^{-1}(\sigma+M(b-t)\log(b-t))]\,ds \\ &= \frac{1}{q(t)}[\exp(-k_M(t))-\exp((b-t_0)^{-1}q(t))]\end{aligned}$$

où $q(t) = \sigma+M(b-t)\log(b-t)$, d'où

$$\int_{t_0}^{t} (b-s)^{-2}\exp(k_M(t)-k_M(s))ds \leqslant \frac{1}{q(t)}[1-\exp(k_M(t)+(b-t_0)^{-1}q(t))].$$

Par conséquent

$$\lim_{t\to b^-} \int_{t_0}^{t} (b-s)^{-2}\exp(k_M(t)-k_M(s))ds \leqslant 1/\sigma.$$

Supposons maintenant que t_0 est quelconque de $[a, b[$: Il existe $t_1 > t_0$ tel que l'inégalité (5) soit vraie pour $s \in [t_1, t[$. On a

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t} (b-s)^{-2}\exp(k_M(t)-k_M(s))ds &= (\exp k_M(t))\int_{t_0}^{t_1} (b-s)^{-2}\exp(-k_M(s))ds \\ &\quad + \int_{t_1}^{t} (b-s)^{-2}\exp(k_M(t)-k_M(s))ds.\end{aligned}$$

Il est évident que

$$\lim_{t\to b^-} (\exp k_M(t)) \int_{t_0}^{t_1} (b-s)^{-2}\exp(-k_M(s))ds = 0.$$

De cette égalité et de la première partie de la démonstration (pour $\alpha = 2$) on déduit l'existence d'un nombre $C > 0$ tel que

$$\lim_{t\to b^-} \int_{t_0}^{t} (b-s)^{-2}\exp(k_M(t)-k_M(s))ds \leqslant C.$$

On va démontrer

THÉORÈME 1. *Soit* $\alpha \geqslant 1$. *Supposons que*

(i) *il existe deux constantes strictement positives* σ *et* K *telles que*

$$\forall z \leqslant 0 \quad \|\exp Az\| \leqslant K\exp\sigma z,$$

(ii) *B est une application continue et bornée dans $[a, b[$,*
(iii) *f est une application définie et continue dans $[a, b]$.*

Alors toute solution u de l'équation (4) *définie dans $[a, b[$ vérifie*

$$\lim_{t \to b^-} u(t) = A^{-1} f(b).$$

Démonstration. Supposons d'abord $f(b) = 0$. Soit u une solution quelconque de (4), définie dans $[a, b[$. On va démontrer que $\lim_{t \to b^-} u(t) = 0$. On constate que u vérifie l'équation intégrale

$$u(t) = R(t, t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, s)[(b-s)^{1-\alpha} B(s)u(s) + (b-s)^{-\alpha} f(s)]\,ds$$

où $u_0 = u(t_0)$. Il vient

$$\|u(t)\| \leqslant \|R(t, t_0)\|\,\|u_0\| + \int_{t_0}^{t} \|R(t, s)\|\,\|B(s)\|\,\|u(s)\|(b-s)^{1-\alpha}\,ds$$
$$+ \int_{t_0}^{t} \|R(t, s)\|\,\|f(s)\|(b-s)^{-\alpha}\,ds.$$

Par hypothèse

$$\|R(t, s)\| \leqslant \begin{cases} K\left(\dfrac{b-t}{b-s}\right)^{\sigma} & \text{si } \alpha = 1, \\ K \exp \dfrac{\sigma}{1-\alpha}[(b-t)^{1-\alpha} - (b-s)^{1-\alpha}] & \text{si } \alpha > 1, \end{cases}$$

pour $t \geqslant s \geqslant t_0$. Il en résulte que

$$\text{(6)} \quad \|u(t)\| \leqslant K_3\left(\frac{b-t}{b-t_0}\right)^{\sigma}$$
$$+ K_4(b-t)^{\sigma} \int_{t_0}^{t} (b-s)^{-\sigma}\|u(s)\|\,ds + K(b-t)\int_{t_0}^{t} (b-s)^{-1-\sigma}\|f(s)\|\,ds$$

si $\alpha = 1$ et

$$\text{(7)} \quad \|u(t)\| \leqslant K_3 \exp\left[\frac{\sigma}{1-\alpha}((b-t)^{1-\alpha} - (b-t_0)^{1-\alpha})\right]$$
$$+ K_4 \exp\frac{\sigma}{1-\alpha}(b-t)^{1-\alpha} \int_{t_0}^{t} (b-s)^{1-\alpha} \exp\left(\frac{-\sigma}{1-\alpha}(b-s)^{1-\alpha}\right)\|u(s)\|\,ds$$
$$+ K \exp\frac{\sigma}{1-\alpha}(b-t)^{1-\alpha} \int_{t_0}^{t} (b-s)^{-\alpha} \exp\left(\frac{-\sigma}{1-\alpha}(b-s)^{1-\alpha}\right)\|f(s)\|\,ds$$

si $\alpha > 1$ où $K_3 = K\|u_0\|$ et $K_4 = K \sup_{[a,b[}\|B(t)\|$.

Dans la suite on va considérer deux cas:

1° $\alpha = 1$. L'inégalité (6) nous donne

$$(b-t)^{-\sigma}\|u(t)\| \leqslant K_3(b-t_0)^{-\sigma}+K_4\int_{t_0}^{t}(b-s)^{-\sigma}\|u(s)\|ds$$
$$+K\int_{t_0}^{t}(b-s)^{-1-\sigma}\|f(s)\|ds$$

pour $b > t > t_0 \geqslant a$. En appliquant le lemme de Gronwall ([9], p. 14) on obtient

$$(b-t)^{-\sigma}\|u(t)\| \leqslant K_3(b-t_0)^{-\sigma}\exp K_4(t-t_0)$$
$$+K\int_{t_0}^{t}(b-s)^{-1-\sigma}\|f(s)\|\exp K_4(t-s)ds$$

pour $b > t > t_0 \geqslant a$ et ensuite

$$\|u(t)\| \leqslant K_5\left(\frac{b-t}{b-t_0}\right)^{\sigma}+K_6(b-t)^{\sigma}\int_{t_0}^{t}(b-s)^{-1-\sigma}\|f(s)\|ds = U_1(t)+U_2(t),$$

où K_5 et K_6 sont des constantes positives.

Il est évident que $\lim_{t\to b^-} U_1(t) = 0$. On va démontrer que $\lim_{t\to b^-} U_2(t) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $\|f(s)\| < \varepsilon$ pour $0 < b-s < \delta$. Pour $b-t < \delta$ on a

$$U_2(t) \leqslant K_6(b-t)^{\sigma}\int_{t_0}^{b-\delta}(b-s)^{-1-\sigma}\|f(s)\|ds+K_6\varepsilon(b-t)^{\sigma}\int_{t_0}^{t}(b-s)^{-1-\sigma}ds$$
$$= K_6(b-t)^{\sigma}\int_{t_0}^{b-\delta}(b-s)^{-1-\sigma}\|f(s)\|ds+\frac{\varepsilon}{\sigma}K_6\left(1-\left(\frac{b-t}{b-t_0}\right)^{\sigma}\right).$$

En passant à la limite lorsque $t\to b^-$ on obtient

$$\lim_{t\to b^-} U_2(t) \leqslant \frac{\varepsilon}{\sigma}K_6$$

et donc $\lim_{t\to b^-} U_2(t) = 0$, ce qui termine la démonstration du théorème dans le cas où $\alpha = 1$ et $f(b) = 0$.

2° $\alpha > 1$. L'inégalité (7) nous donne

$$\exp\left(\frac{-\sigma}{1-\alpha}(b-t)^{1-\alpha}\right)\|u(t)\| \leqslant K_3\exp\left(\frac{-\sigma}{1-\alpha}(b-t_0)^{1-\alpha}\right)$$
$$+K_4\int_{t_0}^{t}(b-s)^{1-\alpha}\exp\left(\frac{-\sigma}{1-\alpha}(b-s)^{1-\alpha}\right)\|u(s)\|ds$$
$$+K\int_{t_0}^{t}(b-s)^{-\alpha}\exp\left(\frac{-\sigma}{1-\alpha}(b-s)^{1-\alpha}\right)\|f(s)\|ds$$

pour $b > t > t_0 \geqslant a$. En appliquant le lemme de Gronwall on a

$$\exp\left(\frac{-\sigma}{1-\alpha}(b-t)^{1-\alpha}\right)\|u(t)\|$$
$$\leqslant K_3 \exp\left(\frac{-\sigma}{1-\alpha}(b-t_0)^{1-\alpha} + K_4 \int_{t_0}^{t} (b-s)^{1-\alpha} ds\right)$$
$$+ K \exp\left(K_4 \int_{t_0}^{t} (b-s)^{1-\alpha} ds\right) \int_{t_0}^{t} (b-s)^{-\alpha} \exp\left(\frac{-\sigma}{1-\alpha}(b-s)^{1-\alpha}\right.$$
$$\left. - K_4 \int_{t_0}^{s} (b-z)^{1-\alpha} dz\right) \|f(s)\| ds$$

pour $b > t > t_0 \geqslant a$. Il en résulte l'inégalité

$$\|u(t)\| \leqslant K_7 \exp k_{K_4}(t) + K_8 \int_{t_0}^{t} (b-s)^{-\alpha} \exp\left(k_{K_4}(t) - k_{K_4}(s)\right) \|f(s)\| ds$$

où K_7 et K_8 sont des constantes positives.

Il est évident que $\lim_{t \to b^-} \exp k_{K_4}(t) = 0$. On va démontrer que

$$\lim_{t \to b^-} \int_{t_0}^{t} (b-s)^{-\alpha} \exp\left(k_{K_4}(t) - k_{K_4}(s)\right) \|f(s)\| ds = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $\|f(s)\| < \varepsilon$ pour $0 < b-s < \delta$. Pour $b-t < \delta$ on a

$$\int_{t_0}^{t} (b-s)^{-\alpha} \exp\left(k_{K_4}(t) - k_{K_4}(s)\right) \|f(s)\| ds$$
$$\leqslant \int_{t_0}^{b-\delta} (b-s)^{-\alpha} \exp\left(k_{K_4}(t) - k_{K_4}(s)\right) \|f(s)\| ds$$
$$+ \varepsilon \int_{b-\delta}^{t} (b-s)^{-\alpha} \exp\left(k_{K_4}(t) - k_{K_4}(s)\right) ds$$
$$\leqslant \left(\exp k_{K_4}(t)\right) \int_{t_0}^{b-\delta} (b-s)^{-\alpha} \exp\left(-k_{K_4}(s)\right) \|f(s)\| ds$$
$$+ \varepsilon \int_{t_0}^{t} (b-s)^{-\alpha} \exp\left(k_{K_4}(t) - k_{K_4}(s)\right) ds.$$

En passant à la limite lorsque $t \to b^-$ et en utilisant le lemme 1 on a

$$\lim_{t \to b^-} \int_{t_0}^{t} (b-s)^{-\alpha} \exp\left(k_{K_4}(t) - k_{K_4}(s)\right) \|f(s)\| ds \leqslant K_9 \varepsilon$$

où K_9 est une constante positive. Finalement

$$\lim_{t\to b^-} \int_{t_0}^{t} (b-s)^{-\alpha}\exp\bigl(k_{K_4}(t)-k_{K_4}(s)\bigr)\|f(s)\|\,ds = 0.$$

Cela termine la démonstration du théorème dans le cas où $\alpha > 1$ et $f(b) = 0$.

Supposons maintenant $f(b)$ quelconque de E. Soit u une solution de (4) définie dans $[a, b[$. Posons $p = f(b)$ et considérons l'application

$$v(t) = u(t) - A^{-1}p.$$

On a $v'(t) = u'(t)$ et donc v est une solution de l'équation

$$(b-t)^{\alpha}v'(t) + [A + (b-t)B(t)]\,v(t) = g(t)$$

avec $g(t) = f(t) - \bigl(A + (b-t)B(t)\bigr)A^{-1}p$. On constate que g est continue sur $[a, b]$ et que $g(b) = 0$. De là et de la première partie de la démonstration il résulte

$$\lim_{t\to b^-} v(t) = 0$$

et par conséquent

$$\lim_{t\to b^-} u(t) = A^{-1}p.$$

La démonstration du théorème 1 est ainsi achevée.

Remarquons que ce théorème est faux lorsque $0 < \alpha < 1$. Pour le démontrer on va considérer l'équation différentielle ordinaire

$$(1-t)^{\alpha}u'(t) + u(t) = 0$$

dans l'intervalle $[0, 1[$ avec $0 < \alpha < 1$. Il est évident que toutes les autres hypothèses du théorème 1 sont remplies et que la fonction u définie par $u(t) = \exp(1-t)^{1-\alpha}$ est sa solution n'admettant pas zéro comme limite lorsque $t \to 1^-$.

Passons maintenant au cas particulier de E, i.e. $E = \mathbf{R}^n$. Dans ce cas, si toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement positive, l'hypothèse (i) est remplie ([5]).

Il en résulte

Théorème 2. *Soit* $\alpha \geqslant 1$. *Soient* f_i: $[a, b] \to \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, n$, *des fonctions continues sur* $[a, b]$, *et* b_{ij}: $[a, b[\to \mathbf{R}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, *des fonctions continues et bornées sur* $[a, b[$. *Soit* $A = [a_{ij}]$ *une matrice réelle dont toutes les valeurs propres sont de partie réelle strictement positive. Alors toute solution* $u = (u_1, \ldots, u_n)$, *définie dans* $[a, b[$, *du système*

$$(b-t)^{\alpha}u_k'(t) + \sum_{j=1}^{n} \bigl(a_{ij} + (b-t)b_{ij}(t)\bigr)u_j(t) = f_k(t), \qquad k = 1, \ldots, n,$$

vérifie

$$\lim_{t\to b^-} u_k(t) = (\det A)^{-1} \sum_{j=1}^{n} A_{jk} f_j(b), \qquad k = 1, \ldots, n,$$

où A_{jk} est le cofacteur de l'élément a_{jk}.

Dans la suite on étudie une équation d'ordre n. Soit p une fonction réelle définie et continue sur $[a, b]$. Considérons l'équation

$$(8)\qquad (b-t)^n a_n v^{(n)}(t)+\sum_{i=0}^{n-1}(b-t)^i\big(a_i+(b-t)b_i(t)\big)u^{(i)}(t) = p(t)$$

où $a_i\in\mathbf{R}$, $i = 0, \ldots, n$, et b_i: $[a, b[\to\mathbf{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, sont des fonctions continues et bornées sur $[a, b[$.

On a le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Supposons que $a_n \neq 0$ et $a_0 \neq 0$ et que toutes les solutions de l'équation*

$$(9)\qquad \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-i+1)a_i+a_0 = 0$$

sont de partie réelle strictement positive. Toute solution v, définie dans $[a, b[$, de l'équation (8) *vérifie*

$$(10)\qquad \lim_{t\to b^-}(b-t)^k v^{(k)}(t) = \begin{cases}\dfrac{1}{a_0}p(b) & si\ k = 0,\\ 0 & si\ k = 1, \ldots, n.\end{cases}$$

Démonstration. Ecrivons

$$\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-k+1) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}\alpha_{ki}\lambda^i$$

pour $k = 1, 2, \ldots$ Posons

$$\beta_k = \sum_{i=k}^{n}\alpha_{ik}a_i \qquad \text{pour } k = 1, \ldots, n \text{ et } \beta_0 = a_0$$

et remarquons que l'équation (9) prend la forme

$$(-1)^n\lambda^n a_n+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\beta_i\lambda^i = 0.$$

Posons

$$v_1(t) = v(t),\ v_2(t) = (b-t)v_1'(t), \ldots, v_n(t) = (b-t)v_{n-1}'(t).$$

On voit que

$$(11)\qquad \begin{cases}(b-t)^k v^{(k)}(t) = \sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_{ki}v_{i+1}(t), & k = 1, \ldots, n-1,\\ (b-t)^n v^{(n)}(t) = \sum\limits_{i=1}^{n-1}\alpha_{ni}v_{i+1}(t)+(b-t)v_n'(t).\end{cases}$$

Par conséquent l'équation (8) est équivalente au système

$$\begin{cases} (b-t)v_1'(t)-v_2(t) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ (b-t)v_{n-1}'(t)-v_n(t) = 0, \\ (b-t)v_n'(t)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\beta_k}{a_n}v_{k+1}(t)+(b-t)\sum_{k=0}^{n-1}\gamma_k b_k(t)v_{k+1}(t) = \frac{p(t)}{a_n} \end{cases}$$

ou au système

$$(b-t)v_k'(t)+\sum_{j=1}^{n} a_{kj}v_j(t)+(b-t)\sum_{j=1}^{n} b_{kj}(t)v_j(t) = f_k(t),$$

$k = 1, \dots, n$, avec

$$f_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 1, \dots, n-1, \\ p(t)/a_n & \text{si } k = n, \end{cases}$$

$$B(t) = [b_{kj}(t)] = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \\ \gamma_0 b_0(t) & \dots & \gamma_{n-1}b_{n-1}(t) \end{bmatrix},$$

$$A = [a_{kj}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ \frac{\beta_0}{a_n} & \frac{\beta_1}{a_n} & \frac{\beta_2}{a_n} & \frac{\beta_3}{a_n} & \dots & \frac{\beta_{n-2}}{a_n} & \frac{\beta_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}$$

où γ_k, $k = 0, \dots, n-1$, sont des nombres réels.

Le polynôme caractéristique de A est de la forme ([1])

$$(-1)^n\lambda^n+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{\beta_k}{a_n}\lambda^k;$$

ses racines sont celles de l'équation (9). De là et du théorème 2 on obtient

$$(12)\quad \lim_{t\to b^-} v_k(t) = (\det A)^{-1}\sum_{j=1}^{n} A_{jk}f_k(1) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 2, \dots, n, \\ (\det A)^{-1}\dfrac{p(1)}{a_n} & \text{si } k = 1. \end{cases}$$

Puisque $\det A = \beta_0/a_n = a_0/a_n$, l'égalité (12) et la formule (11) nous donnent (10), ce qui termine la démonstration.

3. Revenons maintenant au problème de sommation des séries. Dans la suite on suppose $\alpha \geqslant 1$. D'abord on va démontrer

LEMME 2. *Si f est une fonction de classe C^∞ sur $[r_0, 1]$ alors*

$$D_\alpha^n(G)f(r) = f(r) + \sum_{p=1}^{n} (1-r)^{p\alpha} B_p(r, n) f^{(p)}(r) \tag{13}$$

pour $n = 1, 2, \ldots,$ $r \in [r_0, 1]$ où $B_p(r, n)$, $p = 1, 2, \ldots, n$, sont des fonctions de classe C^∞ sur $[r_0, 1[$, continues sur $[r_0, 1]$ et $B_n(r, n) = \prod_{i=1}^{n} g_i(r)$.

Démonstration. Raisonnons par récurrence. Il est évident que la formule (13) est vraie pour $n = 1$. Supposons maintenant que (13) est vraie pour $1 \leqslant n \leqslant k$. Nous allons démontrer que (13) est satisfaite pour $n = k+1$.

D'après (1) et par hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}
D_\alpha^{k+1}(G)f(r) &= D_\alpha^k(G)f(r) + (1-r)^\alpha g_{k+1}(r)\frac{d}{dr}(D_\alpha^k(G)f(r)) \\
&= f(r) + \sum_{p=1}^{k} (1-r)^{p\alpha} B_p(r, k) f^{(p)}(r) + (1-r)^\alpha g_{k+1}(r) f'(r) \\
&\quad - \sum_{p=1}^{k} p(1-r)^{(p+1)\alpha-1} g_{k+1}(r) B_p(r, k) f^{(p)}(r) \\
&\quad + \sum_{p=1}^{k} (1-r)^{(p+1)\alpha} g_{k+1}(r) B_p'(r, k) f^{(p)}(r) \\
&\quad + \sum_{p=2}^{k+1} (1-r)^{p\alpha} g_{k+1}(r) B_{p-1}(r, k) f^{(p)}(r) \\
&= f(r) + \sum_{p=1}^{k+1} (1-r)^{p\alpha} B_p(r, k+1) f^{(p)}(r)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
B_1(r, k+1) &= B_1(r, k) + g_{k+1}(r) - (1-r)^{\alpha-1} g_{k+1}(r) B_1(r, k) \\
&\qquad + (1-r)^\alpha g_{k+1}(r) B_1'(r, k), \\
B_p(r, k+1) &= B_p(r, k) - \alpha p(1-r)^{\alpha p-1} g_{k+1}(r) B_p(r, k) \\
&\qquad + (1-r)^\alpha g_{k+1}(r) B_p'(r, k) + B_{p-1}(r, k) g_{k+1}(r)
\end{aligned}$$

pour $2 \leqslant p \leqslant k$ et

$$B_{k+1}(r, k+1) = B_k(r, k) g_{k+1}(r) = \prod_{i=1}^{k+1} g_i(r),$$

ce qui termine la démonstration du lemme 2.

On peut démontrer une formule plus exacte, à savoir

$$D_\alpha^n(G)f(r) = f(r)+\sum_{p=1}^{n}(1-r)^{p\alpha}\Big(\sum_{i=0}^{n-p}\sum_{k=0}^{i}(1-r)^{i\alpha-k}A_{ikp}(r,n)\Big)f^{(p)}(r)$$

où $A_{ikp}(r, n)$ sont de classe C^∞ sur $[r_0, 1]$ et $A_{00n}(1, n) = \prod_{i=1}^{n} g_i(1)$.

COROLLAIRE. *On a*

$$H_\alpha(n, G, F, r) = H(r)+\sum_{p=1}^{n}(1-r)^{p\alpha}B_p(r, n)H^{(p)}(r) \tag{14}$$

pour $r\in[r_0, 1[$, *où*

$$H(r) = H_\alpha(0, G, F, r) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(r)a_k. \tag{15}$$

THÉORÈME 4. *Soient F une suite de fonctions f_k, $k = 0, 1, \ldots,$ de classe C^∞ sur $[r_0, 1]$ et $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ un système de fonctions de classe C^∞ sur $[r_0, 1]$. Si*

(a) $\lim_{r\to 1^-} f_k(r) = 1$ *pour* $k = 0, 1, \ldots,$

(b) $\lim_{k\to+\infty} f_k^{(p)}(r) = 0$ *pour* $r\in[r_0, 1[$ *et* $0 \leqslant p \leqslant n$,

(c) $\sum_{k=0}^{\infty}|D_\alpha^n(G)(f_k(r)-f_{k+1}(r))| \leqslant M(r_0, n)$ *pour* $r\in[r_0, 1[$, *où* $M(r_0, n)$ *est une constante strictement positive,*

la méthode $A_\alpha(n, G, F)$ de sommation des séries est linéaire et régulière.

Démonstration. Il est évident que la méthode $A_\alpha(n, G, F)$ est linéaire. Montrons qu'elle est régulière. D'après (a) et (13) on a

(d) $\lim_{r\to 1^-} D_\alpha^n(G)f_k(r) = 1$ pour $k = 0, 1, \ldots,$

donc $\lim_{r\to 1^-} D_\alpha^n(G)(f_k(r)-f_{k+1}(r)) = 0$ pour $k = 0, 1, \ldots$ Par (b) et (13)

$$\lim_{k\to+\infty} D_\alpha^n(G)f_{k+1}(r) = 0$$

et ensuite

$$\sum_{k=0}^{\infty} D_\alpha^n(G)[f_k(r)-f_{k+1}(r)] = D_\alpha^n(G)f_0(r).$$

Alors, d'après (d)

$$\lim_{r\to 1^-}\sum_{k=0}^{\infty} D_\alpha^n(G)(f_k(r)-f_{k+1}(r)) = 1.$$

Compte tenu de (c) on voit que les hypothèses du théorème de Toeplitz ([10], p. 74) sont remplies. Il en résulte que la méthode $A_\alpha(n, G, F)$ est régulière.

THÉORÈME 5. *Soit $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ un système de fonctions de classe C^∞ sur $[r_0, 1]$. Supposons que $g_n(r) > 0$ pour tout $r\in[r_0, 1]$. Si une série $\sum u_k$ est sommable, de somme s, d'après la méthode $A_\alpha(n, G, F)$ alors elle est sommable, de* *somme s, d'après la méthode $A_\alpha(n-1, G, F)$.*

Démonstration. Soit $\sum u_k$ une série sommable, de somme s, d'après la méthode $A_\alpha(n, G, F)$. On a $\lim_{r\to 1^-} H(n, G, F, r) = s$. Posons

$$p(r) = \begin{cases} H_\alpha(n, G, F, r) & \text{pour } r \in [r_0, 1[, \\ s & \text{pour } r = 1. \end{cases}$$

La fonction p est donc continue sur $[r_0, 1]$ et par (3) la fonction u définie par $u(r) = H_\alpha(n-1, G, F, r)$ pour $r \in [r_0, 1[$ est une solution de l'équation

$$(1-r)^\alpha g_n(r) u'(r) + u(r) = p(r). \tag{16}$$

Posons $1/g_n(r) = a + (1-r)h(r)$ où $a = 1/g_n(1) > 0$ et h est une fonction continue sur $[r_0, 1]$ (cela est possible car $g_n(r) > 0$ et g_n est dérivable sur $[r_0, 1]$). Il en résulte que l'équation (16) s'écrit

$$(1-r)^\alpha u'(r) + \big(a + (1-r)h(r)\big)u(r) = p(r)/g_n(r).$$

En appliquant le théorème 2 on a

$$\lim_{r\to 1^-} u(r) = p(1) = s$$

et ensuite

$$\lim_{r\to 1^-} H_\alpha(n-1, G, F, r) = s,$$

ce qui termine la démonstration.

Remarque. Le théorème 5 n'est pas vrai si $0 < \alpha < 1$. En effet, soit $u(r) = \exp(1-r)^{1-\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$. La fonction u est développable en série entière. Soit $\sum u_k r^k$ cette série. Il est évident que son rayon de convergence est égal à 1. Prenons comme F la suite définie par $f_k(r) = r^k$. Posons $G = \{g_1\}$, où $g_1(r) = 1/(1-\alpha)$. On a

$$H_\alpha(0, G, F, r) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k r^k = u(r) \to 1$$

lorsque $r \to 1^-$ et donc la série $\sum u_k$ est sommable, de somme 1, d'après la méthode $A_\alpha(0, G, F)$.

En même temps cette série est sommable, de somme 0, d'après la méthode $A_\alpha(1, G, F)$. En effet, pour $r \in [0, 1[$ on a

$$\begin{aligned} H_\alpha(1, G, F, r) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(r^k + (1-r)^\alpha \frac{1}{1-\alpha} k r^{k-1} \right) u_k \\ &= u(r) + (1-r)^\alpha \frac{1}{1-\alpha} u'(r) = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent $H_\alpha(1, G, F, r) \to 0$ lorsque $r \to 1^-$.

THÉORÈME 6. *Soit $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ un système de fonctions strictement positives et de classe C^∞ sur $[r_0, 1]$. Une série $\sum u_k$ est sommable, de somme s, d'après la méthode $A_\alpha(n, G, F)$ si et seulement si*

$$(17) \qquad \lim_{r\to 1^-} (1-r)^{p\alpha} H^{(p)}(r) = \begin{cases} s & si\ p = 0, \\ 0 & si\ p = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

où $H(r)$ est définie par (15).

Démonstration. Supposons que $\sum u_k$ est sommable, de somme s, d'après la méthode $A_\alpha(n, G, F)$. Du théorème 5 il résulte que $\sum u_k$ est sommable, de somme s, d'après les méthodes $A_\alpha(p, G, F)$ pour $p = 0, 1, \ldots, n-1$. Il en résulte que $H_\alpha(p, G, F, r) \to s$ quand $r \to 1^-$ pour $p = 0, 1, \ldots, n$. Compte tenu de (14) on a successivement $H(r) \to s$ et $(1-r)^{p\alpha} H^{(p)}(r) \to 0$ pour $p = 1, \ldots, n$ lorsque $r \to 1^-$.

Réciproquement, les formules (17) et (14) entraînent la sommabilité de $\sum u_k$ d'après la méthode $A_\alpha(n, G, F)$.

Soient maintenant deux systèmes G et $\tilde{G}$ de fonctions g_n et $\tilde{g}_n$ strictement positives et de classe C^∞ dans $[r_0, 1]$.

THÉORÈME 7. *Les méthodes $A_\alpha(n, G, F)$, $A_\alpha(n, \tilde{G}, F)$ sont équivalentes.*

Démonstration. Cela résulte de $H_\alpha(0, G, F, r) = H_\alpha(0, \tilde{G}, F, r) = H(r)$ et du théorème 6.

COROLLAIRE. *Les méthodes de sommation des séries considérées dans les notes* [3], [6], [7], *i.e.*: *la méthode n-harmonique, la méthode d'Abel d'ordre n et la méthode (A, n, p) sont équivalentes.*

Soient α et β deux nombres réels tels que $\alpha > \beta > 1$. On va comparer les méthodes $A_\alpha(n, G, F)$ et $A_\beta(n, G, F)$.

THÉORÈME 8. *Si $\sum u_k$ est sommable, de somme s, d'après la méthode $A_\beta(n, G, F)$ alors elle est sommable, de somme s, d'après $A_\alpha(n, G, F)$.*

Démonstration. Soit $\sum u_k$ une série sommable, de somme s, d'après la méthode $A_\beta(n, G, F)$. En vertu du théorème 6

$$\lim_{r\to 1^-} (1-r)^{i\beta} H^{(i)}(r) = \begin{cases} s & \text{pour } i = 0, \\ 0 & \text{pour } i = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Puisque $\alpha - \beta > 0$ on a $(1-r)^{i(\alpha-\beta)} \to 0$ lorsque $r \to 1^-$ pour $i = 1, \ldots, n$. Par conséquent $\lim_{r\to 1^-} (1-r)^{i\alpha} H^{(i)}(r) = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$. D'où, d'après le théorème 6, la série $\sum u_k$ est sommable, de somme s, d'après $A_\alpha(n, G, F)$.

Remarque. La réciproque n'est pas vraie. En effet, considérons la fonction v définie par $v(r) = (1-r)\sin 1/(1-r)$ pour $r \in [0, 1[$. Elle est développable en série entière. Soit $\sum v_k r^k$ cette série. Son rayon de convergence est égal à 1. Prenons $G = \{g_1\}$ où $g_1(r) = 1$ et la suite F définie par $f_k(r) = r^k$. La série $\sum v_k$ est sommable, de somme zéro, d'après la méthode $A_2(1, G, F)$. En effet, pour $r \in [0, 1[$ on a

$$H_2(1, G, F, r) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(r^k + (1-r)^2 k r^{k-1}\right) v_k = v(r) + (1-r)^2 v'(r)$$

$$= v(r) - (1-r)v(r) + (1-r)\cos\frac{1}{1-r} \to 0 \quad \text{lorsque } r \to 1^-.$$

En même temps

$$H_1(1, G, F, r) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(r^k + (1-r) k r^{k-1}\right) v_k = v(r) + (1-r) v'(r) = \cos\frac{1}{1-r}$$

pour $r \in [0, 1[$, et par conséquent $\sum v_k$ n'est pas sommable d'après la méthode $A_1(1, G, F)$.

Dans la suite on supposera $\alpha = 1$ et on notera $D^n(G)$, $A(n, G, F)$ et $H(n, G, F, r)$ au lieu de $D_1^n(G)$, $A_1(n, G, F)$ et $H_1(n, G, F, r)$.

Soient F et $\tilde{F}$ deux suites de fonctions f_k et $\tilde{f}_k$ de classe C^∞ sur $[r_0, 1]$. Soit $\sum u_k$ une série numérique. Supposons que les séries $\sum f_k^{(p)}(r) u_k$ et $\sum \tilde{f}_k^{(p)}(r) u_k$, $p = 0, 1, \ldots,$ sont uniformément convergentes sur chaque intervalle $[r_0, r_1]$, $r_0 < r_1 < 1$. On va comparer les méthodes $A(p, G, F)$ et $A(n, G, \tilde{F})$ où G est un certain système de fonctions g_i de classe C^∞ et strictement positives dans $[r_0, 1]$. On a le théorème suivant:

Théorème 9. *Supposons que $\sum u_k$ soit sommable, de somme s, d'après la méthode $A(p, G, F)$, $p \in \mathbf{N}$ et qu'il existe un système $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$ de fonctions q_i, de classe C^∞ sur l'intervalle $[r_0, 1]$, telles que*

(i) $q_n(r) > 0$ *pour* $r \in [r_0, 1]$,

(ii) *les nombres*

$$a_i = \frac{q_i(1)}{q_n(1)} \quad \textit{pour } i = 1, \ldots, n-1, \qquad a_n = 1, \qquad a_0 = \frac{1}{g_n(1)}$$

vérifient l'hypothèse du théorème 3,

(iii) $D^p(G) f_k(r) = \tilde{D}^n(Q) \tilde{f}_k(r)$ *pour* $k = 0, 1, \ldots$ *où*

$$\tilde{D}^0(Q)\tilde{f}_k(r) = \tilde{f}_k(r),$$

$$\tilde{D}^i(Q)\tilde{f}_k(r) = \sum_{j=1}^{i} (1-r)^j q_j(r) \tilde{f}_k^{(j)}(r) + \tilde{f}_k(r)$$

pour $i = 1, \ldots, n$.

Alors $\sum u_k$ est sommable, de somme s, d'après $A(n, G, \tilde{F})$.

Démonstration. Soit $\sum u_k$ une série sommable, de somme s, d'après la la méthode $A(p, G, F)$. L'hypothése (iii) nous donne

$$H(p, G, F, r) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{D}^n(Q)\tilde{f}_k(r)u_k.$$

Puisque les séries $\sum \tilde{f}_k^{(i)}(r)u_k$ sont uniformément convergentes sur $[r_0, r_1]$, $r_0 < r_1 < 1$, pour $i = 0, 1, \ldots,$ donc

$$H(p, G, F, r) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{f}_k(r)u_k + \sum_{j=1}^{n} (1-r)^j q_j(r) \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{f}_k^{(j)}(r)u_k$$
$$= \tilde{H}(r) + \sum_{j=1}^{n} (1-r)^j q_j(r)\tilde{H}^{(j)}(r)$$

pour $r \in [r_0, 1[$ où $\tilde{H}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{f}_k(r)u_k$. Posons

$$w(r) = \begin{cases} H(p, G, F, r) & \text{pour } r \in [r_0, 1[, \\ s & \text{pour } r = 1. \end{cases}$$

Alors w est continue sur $[r_0, 1]$ et $\tilde{H}$ est une solution de

$$\sum_{j=1}^{n} (1-r)^j a_j(r)u^{(j)}(r) = a_0(r)w(r)$$

avec

$$a_i(r) = \frac{q_i(r)}{q_n(r)} \quad \text{pour } i = 1, \ldots, n-1, \qquad a_n(r) = 1, \quad a_0(r) = \frac{1}{q_n(r)}$$

pour $r \in [r_0, 1]$. D'après le théorème 3 on obtient alors

$$\lim_{r \to 1^-} (1-r)^j \tilde{H}^{(j)}(r) = \begin{cases} s & \text{pour } j = 0, \\ 0 & \text{pour } j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Par le théorème 6 la série $\sum u_k$ est sommable, de somme s, d'après la méthode $A(n, G, \tilde{F})$.

References

[1] R. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York 1960.

[2] F. Barański and E. Wachnicki, *On certain boundary value problems and the Orlicz space*, Rocznik Nauk. Dydakt. WSP w Krakowie, 7 (1974).

[3] Z. Dopierała and L. Rempulska, *On the summability of series by harmonic methods*, Comment. Math. Prace Mat. 23 (1983), 199–213.

[4] J. Górowski and E. Wachnicki, *On some methods of summability of the Fourier series*, Zeszyty Nauk. AGH w Krakowie, 935.57 (1984).

[5] J. Levin and N. Levinson, *Singular perturbations of non-linear systems of differential equations and an associated boundary layer equation*, Arch. Rational Mech. Anal. 3 (1954).

[6] L. Rempulska, *Some properties and applications of summability methods of the Abel type*, Funct. Approx. Comment. Math. 14 (1984).

[7] —, *Some properties of summability methods of the Abel type, III*, Demonstratio Math. 17 (3) (1984).

[8] —, *The summability of the Fourier series and the Dirichlet problem* (manuscript).

[9] W. Walter, *Differential and Integral Inequalities*, Springer, Berlin 1970.

[10] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Vol. I, II, Cambridge 1979.

FACULTÉ DES SCIENCES DE MONASTIR
MONASTIR, TUNISIE