



Oczywiście

$$\xi_{nm} = 0 \quad \text{dla} \quad n < m.$$

Oznaczmy przez  $A$  macierz główną układu (U).

DEFINICJA 1. Jeżeli przy pewnym ciągu  $\{u_n\}$  istnieje taka liczba skończona  $u$ , że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^n a_{nm} u_m = u,$$

to powiadamy, że ciąg  $\{u_n\}$  jest *limitowalny do  $u$  metodą  $A$* , lub krócej:  *$A$ -limitowalny do  $u$* .

TWIERDZENIE MAZURA (zob. [1]). Na to, by dla danego ciągu  $\{c_n\}$  i dla każdego ciągu  $\{u_n\}$   $A$ -limitowalnego szereg  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n$  był zbieżny, potrzeba i wystarcza, by

1. szereg  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi_n$  był zbieżny,
2. przy ustalonym  $m$  ( $m = 0, 1, \dots$ ) każdy z szeregów  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi_{nm}$  był zbieżny,
3. istniała taka liczba rzeczywista dodatnia  $K$ , że

$$\sum_{r=0}^n \left| \sum_{k=0}^{n-r} \xi_{r+k,r} c_{r+k} \right| < K \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

DEFINICJA 2. Ciąg  $\{u_n\}$  nazywa się *limitowalny do  $u$  metodą Eulera i Knoppa rzędu  $q > 0$* , lub krócej: *metodą  $(E, q)$* , jeżeli istnieje taka skończona liczba  $u$ , że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(q+1)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} u_k = u.$$

Oznaczmy

$$(1) \quad a_{nk} = \frac{1}{(q+1)^n} \binom{n}{k} q^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n; n = 0, 1, 2, \dots).$$

Wykażemy wpieryw, że dla tej metody zachodzą wzory

$$(2) \quad \begin{aligned} \xi_n &= 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ \xi_{nm} &= (-1)^{n-m} \binom{n}{m} \left( \frac{q+1}{q} \right)^m q^n \quad (n \geq m). \end{aligned}$$

Wzór pierwszy wynika wprost z definicji  $\{\xi_n\}$  i ze wzoru (1). Dla wykazania prawdziwości wzoru drugiego wyprowadzimy najpierw wzór

$$(3) \quad \sum_{p=0}^{n+1-m} (-1)^p \binom{m+p}{p} \binom{n+1}{n+1-p-m} = 0,$$

( $n \geq m \geq 0$ ;  $n, m$  całkowite).

Otóż dla  $n \geq m$ ,  $|x| < 1$  mamy

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m+k}{k} x^k = \frac{1}{(1+x)^{m+1}},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k = (1+x)^{n+1};$$

stąd

$$\left[ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m+k}{k} x^k \right] \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+1}{k} x^k \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-m}{k} x^k$$

albo

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[ \sum_{p=0}^k (-1)^p \binom{m+p}{p} \binom{n+1}{k-p} \right] x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-m}{k} x^k.$$

Porównując współczynniki przy  $x^{n-m+1}$ , występujące w obu powyższych szeregach, otrzymamy wzór (3).

Udowodnimy teraz drugi ze wzorów (2). Jeżeli  $n = m$ , to wobec tego, że  $\xi_{km} = 0$  dla  $k < m$ ,  $m$ -te równanie układu (U) redukuje się do równania  $a_{mm}\xi_{mm} = 1$ , skąd wobec (1) otrzymujemy  $\xi_{mm} = (q+1)^m$ , a więc wzór jest prawdziwy dla  $n = m$ . Załóżmy teraz, że jest on prawdziwy dla pewnego  $n \geq m$ . Wykażemy jego prawdziwość dla  $n+1$ . I tak, z definicji ciągu  $\{\xi_{nm}\}$  wynika, że

$$\sum_{p=0}^{n+1-m} a_{n+1, m+p} \xi_{m+p, m} = 0,$$

a więc na mocy (1) i założonej prawdziwości wzoru dla  $n \geq m$  mamy

$$q^{n+1} \left( \frac{q+1}{q} \right)^m \sum_{p=0}^{n-m} (-1)^p \binom{m+p}{p} \binom{n+1}{m+p} + \xi_{n+1, m} = 0.$$

Ale na mocy (3)

$$\sum_{p=0}^{n-m} (-1)^p \binom{m+p}{p} \binom{n+1}{m+p} + (-1)^{n+1-m} \binom{n+1}{m} = 0;$$

wobec tego

$$-(-1)^{n+1-m} \binom{n+1}{m} \left(\frac{q+1}{q}\right)^m q^{n+1} + \xi_{n+1,m} = 0,$$

skąd ostatecznie

$$\xi_{n+1,m} = (-1)^{n+1-m} \binom{n+1}{m} \left(\frac{q+1}{q}\right)^m.$$

Przez indukcję wnosimy, że drugi ze wzorów (2) jest prawdziwy dla wszelkich  $n \geq m$ .

**TWIERDZENIE.** Niech  $\{u_n\}$  będzie ciągiem limitowalnym metodą  $(E, q)$ ,  $q > 0$ . Warunkiem koniecznym zbieżności szeregu  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n$  jest

$$(4) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \leq 1/(2q+1),$$

a dostatecznym

$$(5) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1/(2q+1).$$

**Dowód.** W dowodzie dostateczności oprzemy się na założeniach 1-3 twierdzenia Mazura, a dla wykazania warunku (4) — na znanych własnościach szeregów potęgowych.

Z uwagi na wzory (2) założenia twierdzenia Mazura przybiorą dla metody  $(E, q)$  postać następującą:

1'. Szereg  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  jest zbieżny.

2'. Każdy z szeregów  $\sum_{n=m}^{\infty} (-1)^n \binom{n}{m} q^n c_n$  jest zbieżny przy  $m = 0, 1, 2, \dots$

3'.  $\sum_{r=0}^n \left| \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \binom{r+k}{r} q^k (q+1)^r c_{r+k} \right| < K, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

Z (5) wynika, że warunki 1' i 2' są spełnione. Wykażemy, że i warunek 3' jest spełniony. Zauważmy najpierw, że

$$\binom{r+k}{r} \frac{q^k}{(2q+1)^k} < \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k}{r} \left(\frac{q}{2q+1}\right)^k = \left(\frac{2q+1}{q+1}\right)^{r+1}.$$

Mamy stąd

$$\begin{aligned}
 & \sum_{r=0}^n \left| \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \binom{r+k}{r} q^k (q+1)^r c_{r+k} \right| \leq \\
 & \leq \sum_{r=0}^n \sum_{k=0}^{n-r} \binom{r+k}{r} \left( \frac{q}{2q+1} \right)^k (q+1)^r (2q+1)^k |c_{r+k}| < \\
 & < \sum_{r=0}^n \sum_{k=0}^{n-r} \left( \frac{2q+1}{q+1} \right)^{r+1} (q+1)^r (2q+1)^k |c_{r+k}| = \\
 & = \frac{2q+1}{q+1} \sum_{r=0}^n \sum_{k=0}^{n-r} (2q+1)^{r+k} |c_{r+k}| = \frac{2q+1}{q+1} \sum_{r=0}^n \sum_{k=r}^n (2q+1)^k |c_k| < \\
 & < \frac{2q+1}{q+1} \sum_{r=0}^n \frac{1}{(r+1)^2} \sum_{k=r}^n (k+1)^2 (2q+1)^k |c_k|.
 \end{aligned}$$

Ale przy założeniu (5) szereg  $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 (2q+1)^k c_k$  jest zbieżny, gdyż

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{(k+1)^2 (2q+1)^k |c_k|} = (2q+1) \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{(k+1)^2 |c_k|} < (2q+1) \frac{1}{2q+1} = 1.$$

Mamy więc

$$\begin{aligned}
 & \sum_{r=0}^n \left| \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k \binom{r+k}{r} q^k (q+1)^r c_{r+k} \right| < \\
 & < \frac{2q+1}{q+1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(r+1)^2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2 (2q+1)^k |c_k| = K \quad (n = 0, 1, 2, \dots).
 \end{aligned}$$

Warunek 3' jest więc spełniony. Udowodniliśmy tym samym drugą część twierdzenia.

Udowodnimy obecnie, że jeżeli

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} > \frac{1}{2q+1},$$

to istnieje taki ciąg  $\{u_n\}$  limitowalny  $(E, q)$ ,  $q > 0$ , że szereg  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n$  jest rozbieżny. Przypuśćmy, że

$$\frac{1}{2q+1} < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{q+1}.$$

Wtedy istniałaby taka liczba  $0 < \varepsilon < 1$ , że

$$(6) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{(1+\varepsilon)q+1}.$$

Obierzmy teraz taką liczbę  $\eta$ , by  $0 < \varepsilon < \eta < 1$ , i przyjmijmy

$$u_n = (-1)^n [(1+\eta)q+1]^n.$$

Ciąg  $\{u_n\}$  jest limitowalny metodą  $(E, q)$  do zera. Mamy bowiem

$$\begin{aligned} \tau_n &= \frac{1}{(q+1)^n} \sum_{v=0}^n \binom{n}{v} q^{n-v} (-1)^v [(1+\eta)q+1]^v = \\ &= \frac{1}{(q+1)^n} [q - (1+\eta)q - 1]^n = (-1)^n \left( \frac{\eta q + 1}{q+1} \right)^n \rightarrow 0, \quad \text{gdy } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Utwórzmy szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [(1+\eta)q+1]^n c_n.$$

Szereg ten jest rozbieżny, gdyż w przeciwnym razie szereg potęgowy

$$(7) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

byłby dla  $|x| < (1+\eta)q+1$  bezwzględnie zbieżny. Tymczasem to jest niemożliwe, bo gdyby wybrać  $\xi$  tak, by

$$(8) \quad 0 < \varepsilon < \xi < \eta < 1,$$

to szereg (7) byłby bezwzględnie zbieżny dla  $|x| = (1+\xi)q+1$ , wbrew nierówności

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n| [(1+\xi)q+1]^n} = \frac{(1+\xi)q+1}{(1+\varepsilon)q+1} > 1,$$

wynikającej z (6) i (8). Stąd wynika, że jeżeli

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} > \frac{1}{2q+1},$$

to istnieją takie ciągi  $\{u_n\}$ , limitowalne metodą  $(E, q)$ ,  $q > 0$ , że szereg  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n$  jest rozbieżny; dowodzi to prawdziwości pierwszej części twierdzenia.

Twierdzenie nasze zostało tym samym udowodnione w zupełności.

## Prace cytowane

- [1] S. Mazur, *Über lineare Limitierungsverfahren*, Math. Zeit. 28 (1928), str. 602.  
 [2] W. Orlicz, *Zur allgemeinen Limitierungstheorie*, The Tôhoku Mathematical Journal 26 (1926), str. 233-237.

Ю. МЕДЕР (Штетин)

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ МАЗУРА О МНОЖИТЕЛЯХ УСТРЕМЛЯЮЩИМ  
 К ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМ ЛИМИТИРУЕМЫМ МЕТОДОМ  
 ЭЙЛЕРА-КНОППА

## РЕЗЮМЕ

В статье доказано теорему аналогичную той, которую доказал В. Орлич для метода Цезаря в статье [2].

Назовем последовательность  $\{u_n\}$  лимитируемой к значению  $u$  методом Эйлера-Кнопфа порядка  $q > 0$  или короче лимитируемой  $(E, q)$  к  $u$ , если существует такое конечное число  $u$ , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(q+1)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} u_k = u.$$

ТЕОРЕМА. Для сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n$ , причем  $\{c_n\}$  — заданная последовательность, а  $\{u_n\}$  — произвольная последовательность лимитируемая  $(E, q)$  (при  $q > 0$ ), условие

$$(1) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \leq 1/(2q+1)$$

является необходимым, а условие

$$(2) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1/(2q+1)$$

достаточным.

Теорема эта доказана на основании достаточного условия теоремы С. Мазура ([1], стр. 602, теорема III) и на основании известной теоремы с теории степенных рядов.

J. MEDER (Szczecin)

APPLICATION OF MAZUR'S THEOREM ON CONVERGENCE MULTIPLIERS  
 TO SEQUENCES LIMITABLE BY THE EULER-KNOPP METHOD

## SUMMARY

The author proves an analogical theorem to that proved by W. Orlicz for the method of Cesàro (in the paper [2]).

A sequence  $\{u_n\}$  is said to be limitable to a value  $u$  by the Euler-Knopp method of the order  $q > 0$ , or, shortly,  $(E, q)$ -limitable to  $u$ , if there exists a finite number  $u$  such that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(q+1)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} u_k = u.$$

THEOREM. For the convergence of the series  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n$ , in which  $\{c_n\}$  denotes the given sequence and  $\{u_n\}$  denotes an arbitrary  $(E, q)$ -limitable sequence (for  $q > 0$ ), the condition

$$(1) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \leq 1/(2q+1)$$

is necessary, and the condition

$$(2) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} < 1/(2q+1)$$

is sufficient.

The author proves this theorem basing himself on the sufficient condition of S. Mazur's theorem ([1], Satz III, p. 602) and on a known theorem concerning the theory of power series.

---